

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ALKALMAZOTT
MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

II. KÖTET



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

II. KÖTET

1953

SZERKESZTŐSÉG:
ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET
BUDAPEST, VI., SZTÁLIN-ÚT 31. I. EM.

TECHNIKAI SZERKESZTŐ:
G. SZÉKELY ÁGOTA

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei évente általában egy kötetben jelennek meg, s az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó dolgozatokat közölnek.

A kiadásért felelős: Mesttyán János

Műszaki felelős: Tóth Ferenc

A kézirat érkezett: 1954. II. 5. Példányszám: 1000* Terjedelem: 46 (A/5) fv, 93 ábra + 10 melléklet

Megjelent 1954. aug. hó

30161/54 Akadémiai nyomda — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

II.



304645

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

РЕДАКТОР: АЛЬФРЕД РЕНЬИ

В трудах Института прикладной математики печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательского работы Института, на венгерском языке с резюме на русском и французском (или английском или немецком) языках. Ежегодно выходит один том. Редакция: Институт прикладной Математики, Будапешт VI, ул. Сталина 31. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет Kultúra (Budapest VI., Sztálin-út 21) текущий счет № 45—790—057—50—032. По поводу отношения обмена просим отращаться непосредственно к редакции.

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES
APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

Rédacteur: ALFRED RÉNYI

Les Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées contiennent des articles concernant les résultats du travail de l'Institut en langue hongroise avec des résumés en russe et français ou anglais ou allemande. Il paraît un volume par an.

Rédaction: l'Institut des Mathématiques Appliquées Budapest, VI., Sztálin-út 31.

On peut s'abonner à l'Entreprise du Commerce Extérieur des Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI., Sztálin-út 21.) Compte-courant No 45—790—057—50—032. Pour établir les relations d'échange adressez vous à la rédaction.

ELŐSZÓ

Intézetünk Közleményeinek első kötetét kutatóintézeteknek, tervezőirodáknak, üzemeknek és különböző állami szervezeteknek küldöttük meg. A beérkezett száznál több válaszlevélből is kitűnik, hogy Közleményeink beváltották a hozzájuk fűzött reményeket: elősegítették, hogy igen sok szakember ismerkedjék meg az Intézet munkájával. Sokan Közleményeink olvasásán keresztül ismerték fel az Intézetünkkel való együttműködés szükségességét. Ez viszont lehetővé tette, hogy az Intézet feladatát jobban tudja ellátni, szorosabb kapcsolatot építsen ki a különböző tudományok kutatóival és az iparban, a mezőgazdaságban dolgozó szakemberekkel.

Az említett intézmények közül több válaszlevelében munkája során felmerült matematikai problémákat közölt velünk és kérte azok megoldását. Jelen kötet is tartalmazza olyan probléma megoldását, amely ilyen módon került az Intézethez.* Közleményeink első kötete az Akadémia 1953. évi nagygyűlésén »Az alkalmazott matematika helyzete hazánkban« címen rendezett széleskörű vita alapjául szolgált. Ez a vita, amelynek során számos értékes javaslat és bírálat hangzott el, szintén előbbre vitte munkánkat. Ilyen módon Intézetünk Közlemény-sorozata folytatásának szükségességét az első kötet kedvező fogadtatása és munkánkat elősegítő hatása messzemenően alátámasztotta. Közleményeinkért cserébe igen sok, számunkra fontos folyóiratot és más tudományos kiadványt kaptunk, amelyek tanulmányozása is nagy segítséget jelentett munkánkban.

Közleményeink második kötetét azzal a reménnyel bocsátjuk útjára, hogy tovább fogja erősíteni a matematika és más tudományok, továbbá a matematika és a gyakorlat kapcsolatát.

Jelen kötet 36 tudományos dolgozatot tartalmaz, amelyek mind szoros kapcsolatban állnak intézetünk munkájával. Ezek közül 16 külső megbízás kidolgozása során megoldott matematikai problémáról szól, 16 az Intézet tudományos terve keretében végzett kutatómunka eredményeit tartalmazza; 4 dolgozat pedig kiegészítés Közleményeink első kötetében megjelent egyegy dolgozathoz.

Ezen kiegészítések közül kettő az elért eredményeknek a gyakorlatban való felhasználása során nyert tapasztalatokról számol be (*Sors László* és *Arató Mátyás* dolgozatai), egy a gyakorlati felhasználást elősegítő új, egyszerűsített és javított táblázatokat tartalmaz (*Juvancz Iréneusz* és *Lipták Tamás* dolgozata), egy pedig elméleti irányban fejleszti tovább az elért eredményeket (*Medgyessy Pál* dolgozata). A szükséghez képest a jövőben is vissza kívánunk

* Gondolunk pl. *Lovass Nagy Viktor*: Két végén szabadon felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának vizsgálata c. dolgozatára.

térni az előző kötetekben közölt dolgozatok témáira, ha azzal kapcsolatban újabb mondanivalónk lesz.

Új vonás Közleményeink második kötetében, hogy két olyan munkát tartalmaz, amelyek a műszaki tudományok egy, az Intézetünkben folyó munkába bekapcsolódó, másutt dolgozó kutatójának (*Sors László*, illetve *Török Vilmos*) munkái, továbbá két dolgozat (*Lovass Nagy Viktor—Pál Sándor—Pásztor János és Kempelen Márta—Lengyel Sándor* munkái) pedig az Intézetben és másutt dolgozó kutatók együttműködésének eredménye.

Általában lényegesen megnövekedett Közleményeinkben a több (két, három, sőt négy) szerző együttes munkáját tartalmazó dolgozatok száma; ez arról tanúskodik, hogy Intézetünkben a kollektív tudományos munka kialakítása terén előrehaladás történt. Öröndetes jelenség, hogy a dolgozatok szerzői között ott találjuk kivétel nélkül azokat az aspiránsokat, akik már az 1953. év elejétől Intézetünkben dolgoztak, továbbá több olyan fiatal kutatót, akiknek a Közleményeinkbe felvett dolgozata az első nyomtatásban megjelenő munkája.

Néhány szót szeretnék szólni a dolgozatok témáiról is. Jelen kötet dolgozatai közül több a matematika olyan alkalmazási területének egy-egy kérdésével foglalkozik, amellyel Intézetünk az 1953. évben kezdett behatóbban foglalkozni. Így pl. jelen kötetben öt dolgozat tárgyal kémiai kérdést. Ezekkel az alkalmazási területekkel a jövőben még fokozottabban fog foglalkozni az Intézet. Sok olyan alkalmazási területe van azonban a matematikának, amely Közleményeinkben eddig nem szerepelt. Gondolok itt elsősorban a mezőgazdaságra. E téren kétségtelenül meglehetősen vontatottan indult meg Intézetünkben a munka. Ennek oka egyrészt, hogy a mezőgazdaság kutatói a múltban csak elvétve fordultak Intézetünkhöz, másrészt mi sem fordítottunk a matematikának erre az alkalmazási területére jelentőségével arányos figyelmet. Pedig e téren igen fontos feladatok várnak arra, hogy a mezőgazdasági tudományok kutatói és a matematikusok együttes erőfeszítéssel megoldják azokat. Gondolunk itt elsősorban a növénynevelési kísérletek kiértékelésére vonatkozó matematikai módszerek továbbfejlesztésére, a matematikai statisztika módszereinek felhasználására a termésbecslésnél, az öntözéssel, a talajvíz áramlásával kapcsolatos matematikai problémákra stb. Népköztársaságunk kormányának új programja hívta fel figyelmünket arra, hogy ezen a téren távolról sem tettünk meg mindent, amire szükség lett volna. Az elmúlt hónapokban hozzákezdünk ennek a hiányosságnak a felszámolásához, és meg vagyunk győződve, hogy Közleményeink 1954. évi kötete már tartalmazni fogja az e téren megindult munka eredményeit is. Ennek egyik biztosítékát abban látom, hogy *Sedlmayr Kurt* akadémikusnak az Akadémia 1954. évi nagygyűlésén tartott előadása felhívta az agrártudomány szakembereinek a figyelmét a matematikai módszerek felhasználására és ezzel jelentős segítséget nyújtott az agrártudományok szakembereinek a matematikától való húzódozása leküzdésére irányuló törekvésünkhöz. Egy másik terület, ahol még ma is tapasztalható húzódozás a matematikai módszerek felhasználásától: a közgazdaságtudomány. Pedig e téren a matematikai módszerek felhasználásának (pl. a reprezentatív mintavétel módszereinek) igen nagy jelentősége volna. Számos más olyan terület is van a fizikában, az ipar különböző ágaiban, ahol még nagy kiaknázatlan lehetőségei vannak a matematikai módszerek felhasználásának. Messze vezetne, ha ezeket mind felsorolnánk. Igyekezni fogunk, hogy a magunk részéről

mindent megtegyünk, hogy mielőbb eltűnjenek e »fehér foltok« a matematikai módszerek hazai felhasználásának térképéről. Reméljük, hogy Közleményeink harmadik kötete már tükrözni fogja ennek a törekvésünknek a gyümölcseit.

Szeretném ezt az alkalmat is megragadni, hogy a matematika és a gyakorlat kapcsolata terén ma még nálunk fennálló néhány súlyos hiányosságra felhívjam az illetékesek figyelmét. Az egyik az eredmények tényleges felhasználásának kérdése. E téren a helyzet távolról sem kielégítő. Az Intézetünk kutatói által, részben saját kezdeményezésből, de részben üzemek, vagy állami szervek határozott felkérésére kidolgozott matematikai módszerek, illetve matematikai problémák megoldása útján nyert megállapítások, amelyeknek figyelembevétele, a termelésben való felhasználása, lehetővé tenné a termelés emelését, az energiafelhasználás csökkentése útján — vagy más úton — az önköltség csökkentését, a munka termelékenységének emelését, vagy pedig a minőség javítását, gyakran nem kerülnek tényleges felhasználásra, más esetekben felhasználásukat igen hosszadalmas és felesleges huzavona előzi meg. Példaképpen megemlítjük, hogy Intézetünk egyik kutatója, *Arató Máttyás*, az uzsai kőbányában végzett mérései eredményeképpen (melyekről e kötetben közölt dolgozatában számol be), javaslatot dolgozott ki, amely lehetővé tenné a bánya energiafogyasztásának igen lényeges (kb. 30%-os) csökkentését, és ugyanakkor a csökkentett energiafogyasztás mellett a termelés emelését. E megállapításokat az illetékesek tudomására hoztuk, de ezek felhasználása még nem történt meg. Hasonlóképpen nem kerültek felhasználásra a Közleményeink első kötetében közölt, az üzemek energiafogyasztására vonatkozó vizsgálatok eredményei sem, pedig ezek figyelembevétele az ország energiagazdálkodása szempontjából rendkívül nagyjelentőségű volna.*

Távolról sem kielégítő a helyzet a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereinek gyakorlati felhasználása terén sem. Intézetünk több éve szorgalmazza ezt a kérdést, és öt üzemmel (Csepeli Autógyár, Telefongyár, Egyesült Izzó, Gördülőcsapágygyár, RM Művek Kerékpárgyára) szocialista szerződést is kötött ennek a kérdésnek megoldása céljából. Azonban igen sok más üzem van, ahol szintén megvolna a lehetősége ezen módszerek bevezetésének, ez azonban ezideig nem történt meg. Azokban az üzemekben, amelyekkel Intézetünk állandó kapcsolatban áll, megindult ez a munka és több helyen szép kezdeti sikerekre is vezetett. Több helyen akadályt jelent azonban, hogy az üzemben nem dolgozik matematikus, aki állandó jelenlétével biztosítaná a munka folyamatosságát. Ez nemcsak a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek bevezetésénél, hanem általában a matematikai módszereknek a termelésben való fokozottabb felhasználásánál az egyik legnagyobb akadály. Pedig évről-évre nagyobb számban kerülnek ki az egyetemről végzett alkalmazott matematikusok, akik erre a munkára a megfelelő előképzettséget megszerezték. Üzemeink azonban még jórészt nem is tudnak erről a lehetőségről és ezért nem igen igényelnek alkalmazott matematikust. Pedig a Szovjetunió példája világosan mutatja, hogy ez a fejlődés következő láncszeme. Ahhoz, hogy a matematikai módszerek az iparban, a mezőgazdaságban szélesebb körben és nagyobb eredménnyel kerüljenek felhasználásra és fokozottabban elősegítsék népgazdaságunk fejlődését, elengedhetetlen, hogy a nagyobb üzemek, továbbá a termelés problémáival foglalkozó kutató- és tervezőintézetek és

* Ezirányban az Intézet a Kohó- és Gépipari Minisztériummal együttműködésben most dolgoz ki konkrét javaslatot.

irányító állami szervek matematikusokat foglalkoztassanak, akik beledolgozzák magukat egy-egy terület konkrét problémáiba és azon a területen folyamatos munkával biztosítják a matematikai módszerek eredményes felhasználását. Intézetünk természetesen mindent megtesz, ami csak módjában áll, de nem tudja egyidejűleg és folyamatosan irányítani az ország összes számbajövő üzemeiben e téren folyó munkát. Ehhez sem megfelelő létszámmal, sem megfelelő hatáskörrel nem rendelkezik, de ez nem is lehet az Intézet feladata. Intézetünk fő feladata a tudományos kutatómunka, a matematikának az alkalmazások szempontjából jelentőséggel bíró ágaiban. Az Intézet kutatási programja ez évben kibővült és előkészületek történtek arra, hogy az Intézet rövidesen Matematikai Kutató Intézetté alakuljon át. Ez azt fogja jelenteni, hogy az Intézet kutatási programja még tovább szélesedik, és elméleti irányban is elmélyül. Több új elméleti osztály felállítása van tervbe véve. Ilyen módon az Intézet fejlődésének perspektívája az, hogy a tulajdonképpeni tudományos kutatómunka egyre nagyobb súllyal szerepeljen az Intézet tevékenységében. Ez természetesen egyáltalán nem fogja azt jelenteni, és nem is szabad, hogy azt jelentse, hogy az Intézet átszervezése után nem fogja ugyanúgy feladatának tekinteni, hogy a matematika eredményeinek a termelésben való felhasználását minden rendelkezésére álló módon elősegítse. Erre természetesen az Intézet továbbra is még fokozottabban fog törekedni: Intézetünk egyre inkább tudományos irányító központja kíván lenni ennek a munkának. Arról van azonban szó, hogy ennek a célnak a megvalósítására új és az eddiginél jobb munkamódszereket és munkamegosztást hozunk létre. Ennek pedig éppen az a módja, hogy matematikusok minél nagyobb számban dolgozzanak közvetlenül a termelésben, illetve a termelés problémáival foglalkozó állami irányító szervezetben és tudományos intézményeknél, és Intézetünk tudományos segítséget, irányítást adjon ezeknek a matematikusoknak mindennapi munkájukhoz. A jobb munkamegosztáshoz az is hozzátartozik, hogy a matematikai módszerek bevezetésének, így például a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei bevezetésének a minisztériumokban, a Tervhivatalban is meglegyen az irányító szerve, amely segít legyőzni az ily módszerek bevezetésénél szükségképpen fellépő szervezési nehézségeket, és egyéb akadályokat, így nem utolsósorban a maradiságot, a konzervativizmust.

A munka jobb megszervezése, matematikusoknak a termelésbe való közvetlen beállítása természetesen nem teszi feleslegessé, sőt még inkább szükségessé teszi, hogy az Intézet kutatói közvetlen kapcsolatot tartsanak a termeléssel és a helyszínen ismerkedjenek meg a problémákkal. Ennek érdekében Intézetünk kutatói ez évben a Magyar Dolgozók Pártja III. Kongresszusa tiszteletére kialakult munkaverseny keretében vállalták, hogy meglátogatnak 38 üzemet és egyéb intézményt, amelyek megbízásából az 1953. év folyamán az Intézet munkát végzett, hogy a helyszínen nyújtsanak segítséget az általunk kidolgozott módszerek felhasználásához. Ezt a felajánlásunkat teljesítettük, sőt, túl is teljesítettük, amennyiben 41 ilyen látogatás történt. E látogatások nemcsak a régebben végzett munka eredményeinek felhasználását segítették elő, hanem újabb problémák feltárásához, újabb megbízásokhoz is vezettek, és kutatóink a látogatások során számos értékes tapasztalatot szereztek. Ezt a munkát a jövőben folyamatossá kívánjuk tenni, és az elért eredmények sikeres felhasználását rendszeresen elő kívánjuk segíteni. Ezúton is felkérjük mindazokat az intézményeket, amelyek meg-

bízásából a múltban számításokat végeztünk, hogy ha ezek felhasználása során nehézségek léptek fel, közöljék ezt velünk, hogy bekapcsolódhassunk ezeknek a nehézségeknek a legyőzésébe. Egyben felkérjük mindazokat a tudományos intézményeket, üzemeket és állami szerveket, amelyekkel eddig nem álltunk kapcsolatban, hogy ha munkájuk során olyan probléma merül fel, amelynek megoldása matematikai vizsgálatokat igényel, forduljanak Intézetünkhez, hogy közös erővel oldjuk meg a felmerült problémákat.

Közleményeink második kötetében, az első kötettől eltérőleg nem osztályok szerinti csoportosításban közöljük a dolgozatokat. Ennek oka, hogy az elmúlt hónapokban az Intézet osztályokra való tagozódása átalakult és nem láttuk indokoltnak a régi beosztás szerinti csoportosítást, de nem lett volna még indokolt az új beosztás szerinti csoportosítás sem. Az Intézet jelenleg a következő osztályokból és csoportokból áll:

I. *Mechanikai és szilárdságtani osztály.* (Osztályvezető: *Egerváry Jenő*, h. osztályvezető: *Lovass-Nagy Viktor*.)

II. *Valószínűségyszámítási osztály.* (Osztályvezető: *Rényi Alfréd*, h. osztályvezető: *Takács Lajos*.)

Az osztály keretében működő önálló csoportok:

a) Debreceni csoport. (Vezetője: *Gyires Béla*.)

b) Orvosi-biológiai statisztikai csoport. (Vezetője: *Juvancz Iréneusz*.)

c) Mezőgazdasági statisztikai csoport. (Vezetője: *Székelly Gábor*.)

III. *Matematikai statisztikai osztály.* (Osztályvezető: *Vincze István*, h. osztályvezető: *Sarkadi Károly*.)

IV. *Numerikus és grafikus módszerek osztálya.* (Osztályvezető: *Hajós György*, h. osztályvezető: *Békéssy András*.) Az osztálynak Debrecenben önálló csoportja működik, vezetője: *Aczél János*.

V. *Differenciálegyenletek osztálya.* (Osztályvezető: *Freud Géza*.)

VI. *Elektrotechnikai osztály.* (Helyettes osztályvezető: *Pál Sándor*.)

VII. *Valós függvénytan osztály.* (Osztályvezető: *Alexits György*.) Az osztály keretében működő önálló csoport: *Integrálegyenletek és integráltranszformációk csoportja.* (Vezetője: *Fenyő István*.)

Az osztályok szemináriumairól szóló beszámolót, továbbá az Intézet munkatársai 1953-ban másutt megjelent munkáinak jegyzékét a kötet végén összesítve közöljük. A szemináriumokról szóló beszámolókból megállapítható több, a kötetben foglalt dolgozat kialakulásának előzménye.

Ezúton is közöljük, hogy Közleményeinkkel szívesen lépünk cserekapcsolatba tudományos folyóiratokkal vagy más tudományos intézetek kiadványaival. Ilyen természetű ajánlatokat kérjük a szerkesztőség címére eljuttatni (Bp. VI. Sztálin-út 31). Korlátolt példányszámban még rendelkezésre áll Közleményeink 1. kötete és így lehetőség van a cserekapcsolatnak 1952-ig visszamenőleg való létesítésére is.

Kérjük továbbá, hogy olvasóink juttassák el hozzánk megjegyzéseiket, bírálatukat a Közleményeinkben szereplő dolgozatokkal kapcsolatban, továbbá egyéb matematikai problémáikat. Azt szeretnénk, ha Közleményeink második kötetének megjelenése elősegítené munkánk megjavítását, továbbá azt, hogy még elevebbé váljék a kapcsolat Intézetünk és más tudományok kutatói, Intézetünk és a termelésben dolgozó szakemberek között, hogy közös erővel szorosabb együttműködésben vigyük előbbre mindannyiunk közös ügyét.

Rényi Alfréd

az Alkalmazott Matematikai Intézet
igazgatója

MATRIXOK DIADIKUS ELŐÁLLÍTÁSÁN ALAPULÓ MÓDSZER BILINEÁRIS ALAKOK TRANSZFORMÁCIÓJÁRA ÉS LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA¹

EGERVÁRY J.

Összefoglalás.

A lineáris egyenletrendszer gyakorlati (numerikus, gépi) megoldására szolgáló módszerek — a matrixtechnika kibontakozásával párhuzamosan — több fejlődési fokon mentek át. Első a determinánsok elméletén alapuló, matrixmentes módszer. Ezt követi a determinánsokat és matrixokat egyaránt igénybevevő módszer, mely a matrixaritmetika eszközeit, elsősorban a reciprokok matrixot alkalmazza. Az utolsó fejlődési fokra jellemző, hogy az a determinánselméletet, sőt a reciprokok matrixot is teljesen mellőzi és kizárólag a matrixok összeadási és szorzási szabályán épül fel.

Az első és az utolsó fejlődési fokozat közti különbséget találóan jellemzi Forsythe a következő példával: Egy $n = 26$ ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásához az ú. n. »Cramer-szabály« egyenes alkalmazása mellett $(n + 1)! \sim 10^{27}$ szorzás lenne szükséges, melyet egy — mp-ként 2600 szorzást végző — elektromos számológép cca 10^{17} év alatt tudna elvégezni. Ezzel szemben a matrixtechnikán alapuló módszernél a megoldáshoz csupán $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ szorzás szükséges, azaz nem egész 3 mp.

Lehetséges — és talán a gyakorlati érdeklődésű olvasók számára rokonszenvesebb — volna a matrixtechnikán felépülő módszert az elmélet mellőzésével, rövid gyakorlati szabályok formájában megfogalmazva bemutatni. Jelen esetben azonban az elmélet és gyakorlat egységének követelményét feltétlenül kielégítendőnek véljük, mert a matrixtechnikai tárgyalásmód egyidejűleg szolgáltatja a megoldás elméleti alapjait és gyakorlati kiviteli formáját. Továbbá a lineáris egyenletek matrixtechnikai megoldása és a bilineáris (kvadratikus) alakok transzformációja közt olyan szoros kapcsolat áll fenn, melyet következtetésnek volna figyelmen kívül hagyni.

A dolgozat olvasásához csak a matrixaritmetika elemeinek ismerete szükséges.

Jelölések

a, b, c, \dots skalárok, A, B, C, \dots matrixok,
 $a, b, \dots a_1, a_2, \dots$ oszlopvektorok, $a^*, b^*, \dots a^1, a^2, \dots$ sorvektorok.
 n sort és m oszlopot tartalmazó matrix:

$$A_{(n,m)} [a_1 a_2 \dots a_m] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

¹ A dolgozat olvasásához csak a matrixaritmetika elemeinek ismerete szükséges. L. pl. a szerzőnek a M. T. A. III. osztálya közleményeiben megjelent dolgozatát: Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. I. és II. fejezet. 1953. III. 4. szám. 417—458. o.

A $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ -ik sorát és $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ -ik oszlopát tartalmazó minormatrix:

$$A_{\substack{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r \\ \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s}} = \begin{bmatrix} a_{\beta_1 \gamma_1} & \dots & a_{\beta_1 \gamma_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\beta_r \gamma_1} & \dots & a_{\beta_r \gamma_s} \end{bmatrix}.$$

$A^* = A$ transzponáltja, $\varrho(A) = A$ rangja,

$|A| = A$ determinánsa.

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \text{ diagonálmatrix;}$$

$$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle = E$$

$\langle A, B, C, \dots \rangle =$ diagonális hipermatrix $(= A + B + C + \dots)$

Ha $A = [a_1 a_2 \dots a_r]$ és $B = [b_1 b_2 \dots b_s]$, akkor $[A, B] = [a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s]$.

Noha a lineáris egyenletek elmélete *Kronecker*, *Frobenius*, *Rouché* és *Fontené*² munkáival lezártnak tekinthető, a lineáris egyenletek gyakorlati (numerikus, gépesített) megoldási módszereire vonatkozó kutatások újabban is számos dolgozatnak képezték a tárgyát.³

A gyakorlati módszerekre vonatkozó vizsgálatok azonban túlnyomó részben a kvadratikus, nem-szinguláris koeficiensmatrix-szal bíró rendszerekkel foglalkoznak, a szinguláris v. nem-kvadratikus koeficiensmatrix-szal bíró rendszereket illetően többnyire csak az általános elméletre hivatkozó utalások találhatók.

Egyébként a szinguláris koeficiensmatrix-szal bíró rendszerekkel kapcsolatban *Jacobi* még a következőket írta:⁴

»Tehát, ha a determináns eltűnik, igen különböző eseteknek a sokaságát kellene megkülönböztetni és az egyes esetek számára algebrai kritériumokat kellene megadni. Ez azonban tetszőleges számú lineáris egyenlet esetén nagyon hosszadalmasnak látszik«.

*Jacobi*nak ez a megállapítása azért különösen figyelemreméltó, mert éppen a bilineáris alakok *Jacobi*tól származó transzformációjának matrix-elméleti analogonja: a diadikus előállítás fog alkolmasnak bizonyulni — a jelen dolgozatban kifejtendő módon — egy, az elmélet és gyakorlat igényeit egyaránt kielégítő, tetszőleges rendszerre kivétel nélkül alkalmazható megoldási módszer megalapozására.

² *L. Baltzer*, Determinanten. 2. Aufl. (1864) S. 62. *Frobenius*, Journ. f. Math. 82 (1877) S. 236. *Rouché*, C. R. 81 (1875). *Fontené*, Nouv. ann. 14 (1875).

³ *Th. Banachiewicz*, Méthode de résolution numérique des équations linéaires, Bull. intern. Acad. Polonaise, 1938. 393—404. o. *R. Zurmühl*, Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme. ZAMM. 1949. S. 76—84. *Фаддеева*, Успехи математических наук (1950.)

⁴ *L. pl. E. Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik (1910) I. Band. S. 78.

A klasszikus elveken alapuló megoldási módszerek⁵ matrixtechnikailag úgy jellemezhetők, hogy a megoldandó $\mathbf{Ax} = 0$ homogén egyenletrendszer koeficiensmatrixát két tényezőre bontjuk oly módon, hogy az $\mathbf{Ax} \equiv \mathbf{CBx} = 0$ egyenletből $\mathbf{Bx} = 0$ következze, továbbá a \mathbf{B} tényező a $\mathbf{Bx} = 0$ egyenlet gyakorlati megoldása szempontjából kedvező struktúrával bírjon.

A jelzett követelményeket legtökéletesebben az a faktorizáció elégíti ki, mely valamely matrixnak Hermite-féle normálalakra⁶ való redukálásánál szerepel. Ez esetben ugyanis az $\mathbf{A} = \mathbf{CB}$ szorzat első tényezője nem-szinguláris és a második tényező hermitikus normálalakú felső háromszögmatrix a következő tulajdonságokkal:

1. a fődiagonális-elemek 0 vagy 1 értékkel bírnak,
2. a 0 fődiagonális-elemeket tartalmazó sorok csupa 0-ból állnak,
3. az 1 fődiagonális-elemeket tartalmazó oszlopok (az 1-esen kívül) csupa 0-ból állanak.

Könnyen belátható, hogy ez a »hermitikus« faktorizáció már az egyenletrendszer végleges megoldását szolgáltatja. Ugyanis $\mathbf{C} \neq 0$ miatt $\mathbf{CBx} = 0$ -ból $\mathbf{Bx} = 0$ következik. A \mathbf{B} tényező pedig a fentebb körülírt struktúrájával az ismeretleneket automatikusan két csoportba osztja:

a »szabad« ismeretlenekre, melyek a 0 fődiagonális-elemekkel megegyező indexűek, és

a »kötött« ismeretlenekre, melyek az 1 fődiagonális-elemekkel megegyező indexűek. A $\mathbf{Bx} = 0$ egyenletből következő skaláregyenletek pedig éppen a kötött ismeretleneket fejezik ki homogén lineáris módon, mint a tetszőleges paraméterekként szereplő szabad ismeretlenek függvényeit.

A hermitikus faktorizáció kivitelére alkalmas, közvetlen és gyakorlati eljárás nem ismeretes, de a faktorizáció elvén alapuló megoldási módszerek mindegyikénél felismerhető az a tendencia, hogy az egyik faktormatrix minél jobban hasonlítson a hermitikus normálformához.

A koeficiensmatrix faktorizációjának elve először *Cholesky* és *Banachiewicz*-nél mutatkozik kifejezetten, akik kvadratikus, nem-szinguláris koeficiensmatrix esetére adtak egy módszert, melynél a koeficiensmatrix két háromszögmatrix szorzatára bomlik. Az ennél a módszernél fellépő matrixtényezők még csupán a háromszögstruktúra tekintetében hasonlítanak a hermitikus normálformához. Azonban — mint közismert — ez a struktúra már lehetővé teszi az ismeretleneknek közvetlen, rekurzív módon való kiszámítását.

Cholesky és *Banachiewicz* módszerének a Gauss-féle eliminációs algoritmus-sal való kapcsolatát (I. I. §) *Bodewig* tárta fel, amennyiben kimutatta, hogy a Gauss-féle eliminációs eljárásnak matrixtechnikai eszközökkel való kivitele pontosan a koeficiensmatrixnak *Cholesky* és *Banachiewicz* által megadott faktorizációjára vezet.

A háromszögmatrix-tényezőkre való bontásnak meg van az az előnye, hogy — megfelelő számológép használatánál — kevesebb írásmunkát igényel, mint a klasszikus módszer. Ezzel szemben gyakorlati szempontból lényeges hiányossága a módszernek, hogy csak akkor alkalmazható, ha a koeficiensmatrixnak összes sarokminorai 0-tól különbözők, ennek a feltételnek a teljesülése pedig — miután a minorok előzetes effektív kiszámítása gyakorlati

⁵ Iteratív megoldási módszereket illetőleg l. pl. *G. E. Forsythe* Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953) 299—329. o.

⁶ *Ch. Hermite*, Journ. f. Math. (1851) 191—216. o.

szempontból nem jöhet tekintetbe — csak a számítás folyamán dől el és így állandóan indexcserék és egyéb korrekciók válhatnak szükségessé.

Ha mármost tekintetbe vesszük, hogy a lineáris egyenletrendszernek a koeficiensmatrix faktorizációja útján történő megoldásánál mindig csupán az egyik faktormatrixnak van kiüntetett szerepe, akkor önként felmerül a kérdés hogy lehet-e a tényezőkre bontáshoz oly módszert megadni, mely direkt, kivétel nélkül alkalmazható és az egyenletrendszer megoldása szempontjából lényeges tényezőt az ismeretlenek kiszámítására alkalmas, a Hermite-féle normálformát minél jobban megközelítő matrix alakjában szolgáltatja.

A jelen dolgozatban egy, az elmélet és gyakorlat igényeit egyaránt kielégítő megoldási módszert fogunk ismertetni, mely tetszőleges, nem-kvadratikussal koeficiensmatrix esetén kivétel nélkül alkalmazható, formailag az egyenletrendszer koeficiensmatrixának diadikus előállításán⁷ alapszik és lényegében úgy a Gauss-féle elimináció, valamint a Jacobi-féle transzformáció⁸ matrixelméleti analogonjának tekinthető és a lényeges tényezőt a Hermite-féle normálforma 1. és 2. tulajdonságaival rendelkező háromszögmatrix alakban szolgáltatja.

Diadikus előállítás⁷ alatt értjük valamely matrixnak a saját rangjával megegyező számú elsőrangú matrix, azaz *diád* összegére való

$$(1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \dots + \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*, \quad \rho(\mathbf{A}) = r$$

alakú felbontását.

Egy matrix (1) alakú diadikus előállításának — miként azt a 2. §-ban bővebben kifejtjük — a következő tulajdonságai vannak:

Az előállítás minimális abban az értelemben, hogy \mathbf{A} nem állítható elő kevesebb diád összegéként.

Az előállításban szereplő baloldali $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r$ tényezők, valamint a jobb-oldali $\mathbf{v}_1^* \dots \mathbf{v}_r^*$ tényezők lineárisan független vektorrendszerek (a matrix oszlopvektor-terének, ill. sorvektor-terének bázisai).

Egy matrixnak diádok összegéként való előállítása legegyszerűbben alkalmas diádok szukcesszív leválasztásával nyerhető és csupán másodrendű determinánsok számítását igényli. Ennélfogva a diadikus előállítás a matrix rangjának gyakorlati meghatározására és evidenciába helyezésére is alkalmas.

Egy diadikus előállítás a matrix faktorizációjával ekvivalens az

$$(2) \quad \mathbf{A} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \dots + \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^* = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{V}^* \quad \begin{matrix} 9 \\ (r,r) \end{matrix}$$

⁷ A diadikus előállítás egyéb alkalmazásaira nézve l. E. Egervári, On a property of the projector matrices, On a Lemma of Stieltjes on matrices, Acta Szeged Tom. XV. 1–6, o. 99–103. o.

⁸ L. pl. ⁴ S. 120–121. o.

⁹ Az $\mathbf{U} \mathbf{V}^*$ szorzat két különböző előállítása közül az irodalomban legtöbbször az $[\mathbf{u}^i \mathbf{v}_j^*]$ alak szerepel, míg a (2)-ben közölt és a particionált matrixok műveleti szabályainak speciális eseteként jelentkező $\sum \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^*$ alak alig van említve. L. pl. A. C. Aitken, Determinants and Matrices. Edinburgh, 1948. 24–25. o.

identitás következtében és ebből az összes többi $(nr) \times (rm)$ típusú faktORIZÁCIÓK az (\mathbf{UT}) $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}^*)$ alakban adódnak, ahol \mathbf{T} tetszőleges r -edrendű nem-szinguláris matrixot jelent.

Egy adott \mathbf{A} matrixnak bármely (2) alakú előállítás mármint a következő feladatok közvetlen megoldását teszi lehetővé:

I. Az $\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ bilineáris alaknak minimális számú formapár szorzatösszegére való redukálását a (2)-ből közvetlenül folyó

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^* \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \right) \mathbf{x} = \sum_1^r (\mathbf{y}^* \mathbf{u}_k) (\mathbf{v}_k^* \mathbf{x})^{10}$$

azonosság alapján.

II. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ (ill. $\mathbf{y}^*\mathbf{A} = 0$) homogén lineáris egyenletrendszernek minimális számú egyenletből álló, ekvivalens rendszerre való redukálását Ugyanis (2) szerint az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \right) \mathbf{x} = \mathbf{u}_1 (\mathbf{v}_1^* \mathbf{x}) + \dots + \mathbf{u}_r (\mathbf{v}_r^* \mathbf{x}) = 0$$

egyenlet az $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r$ vektorok lineáris függetlensége folytán akkor és csak akkor van kielégítve, ha

$$(3) \quad \mathbf{v}_1^* \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{v}_r^* \mathbf{x} = 0.$$

Ezzel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenlet az \mathbf{A} matrix rangjával egyező számú lineárisan független skaláregyenletre van visszavezetve.

Mintán minden matrixnak a fentiek szerint végtelen sok diadikus előállítása van, önként felmerül a kérdés, hogy ezek közül melyik előnyös az I. és II. feladatok gyakorlati megoldása szempontjából.

Nyilván mindkét feladat megoldása szempontjából természetes követelmény, hogy a (2) felbontásban szereplő diádok elemei az adott \mathbf{A} matrix elemeiből egyszerű (numerikus, gépi számításra alkalmas) műveletekkel adódjanak.

A lineáris egyenletek megoldása szempontjából lényeges követelmény továbbá, hogy a (3) alatti, redukált egyenletrendszer együtthatói — a Gauss-féle eliminációs elvnek megfelelően — lényegileg (azaz esetleges sorcseréktől eltekintve) — háromszögmatrixot alkossanak.

Mindkét követelménynek megfelel a diadikus előállítás effektív kivitelére szolgáló — a II. §-ban kifejtendő módszer — mely diádok szukcesszív leválasztásából áll és lényegileg a Jacobi-transzformációval ekvivalens.

Ha továbbá figyelembe vesszük, hogy nagyszámú egyenletből álló rendszer effektív megoldása folyamán lehetőleg minden sor- ill. indexcsere elkerülendő, akkor kívánatosnak látszik a diadikus előállításnak egy olyan megválasztása, melynek alkalmazása mellett a redukált egyenletrendszer minden sor- ill. indexcsere nélkül háromszögmatrix-szal bír, tehát közvetlenül rekurzíve megoldható.

¹⁰ Ez az azonosság definit (v. semidefinit) \mathbf{A} esetére az $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alaknak négyzetösszegbe való transzformálását szolgáltatja.

Ez a további követelmény is kielégíthető, ha a matrix hermitikus normálformájának fentidézett definíciójában rejlő alapgondolatot kihasználva az egyes diádok leválasztására egy olyan sorrendet jelölünk ki, mely az egyik (pl. a jobboldali) matrixtényezőt automatikusan a hermitikushoz közelálló struktúrájú alakban szolgáltatja.

* * *

A lineáris egyenletek megoldására vonatkozólag eddig elmondottak a homogén rendszerekre vonatkoztak. Azonban az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inhomogén egyenlet különálló tárgyalása (az $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ megoldásnak megfelelően) tudvalevőleg csak kvadratikus, nem-szinguláris \mathbf{A} esetében és akkor is csak elméletileg¹¹ indokolt. A III. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy az inhomogén rendszer megoldása — mint a megfelelő homogén rendszernek egy speciális megoldása a — diadikus előállítás felhasználásával minden nehézség nélkül, természetes módon nyerhető és a közismert kompatibilitási feltételek a diadikus előállításnál alkalmazásra kerülő matrixtechnikában igen egyszerű kifejezést nyernek.

Végül a IV. §-ban az ismertetett módszerek alkalmazását mutatjuk be néhány numerikus példa keretében.

I. A Banachiewicz—Cholesky-féle módszer és annak Bodewigtól származó matrixtechnikai interpretációja

A szóbanforgó módszernél fel van tételezve, hogy az adott matrix kvadratikus és összes sarokminorai 0-tól különbözők, tehát nem-szinguláris. Kerestetik \mathbf{A} -nak két háromszögmatrix szorzatára való felbontása, melynél az általánosság megszorítása nélkül az egyik tényező összes fődiagonális-elemeit 1-gyel egyenlővé tehetjük. A keresett felbontás tehát a következő alakú:

$$(4) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{CB}.$$

A matrixszorzás elvégzése után a tényezők elemeinek meghatározására a következő bilineáris egyenletek adódnak:

$$a_{ij} = c_{i1}b_{1j} + \dots + c_{ik}b_{kj} \quad k \leq i, j.$$

Ezen egyenletekből a b_{ij} és c_{ij} elemek egy sajátos lexikografikus sorrendben racionális úton kiszámíthatók a¹²

$$\begin{aligned} b_{ij} &= (a_{ij} - c_{i1}b_{1j} - \dots - c_{i,i-1}b_{i-1,j}) : c_{ii} & i < j \\ c_{ij} &= a_{ij} - c_{i1}b_{1j} - \dots - c_{i,j-1}b_{j-1,j} & i \geq j \end{aligned}$$

¹¹ V. ö. Zurmühl 1. c.³ S. 77—78. o.

¹² V. ö. Zurmühl 1. c.³ S. 79, továbbá Гантмахер, Теория матриц, Москва 1953., 38. o.

képletek alapján. A a_{ii} számokkal való oszthatóságot a sarokminorokra vonatkozó kikötés garantálja.

Bodewig kimutatja, hogy a háromszögmatrix-tényezőkre való felbontás a Gauss-féle eliminációs algoritmus matrixtechnikai átírásával identikus.

Matrixtechnikailag ugyanis az x_1 ismeretlen eliminációja az $\mathbf{Ax} = 0$ rendszerből a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}a_{11}^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Ha ezt a processzast iteráljuk és rendre balról szorzunk

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(2)}a_{22}^{(2)-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2}^{(2)}a_{22}^{(2)-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \dots \quad \mathbf{T}_{n-1} = \dots$$

vel, akkor a $\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$, $\mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A}$, ..., $(\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) \mathbf{A}$ szorzat első két, három, ..., n fődiagonális-eleme alatti elemek mind 0-val lesznek egyenlők. E szerint a

$$(5) \quad \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

szorzat felső háromszögmatrix lesz. Azonban a \mathbf{T}_k matrixokkal együtt ezek szorzata, valamint annak reciproka is alsó háromszögmatrix, tehát az (5)-ből következő

$$\mathbf{A} = (\mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_1)^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{CB}$$

egyenlet az adott \mathbf{A} matrixnak háromszögmatrix-tényezőkre való bontását adja. Az eljárás kivihetőségének szükséges és elegendő feltétele, hogy a_{11} , $a_{22}^{(2)}$, ..., $a_{nn}^{(n)}$ 0-tól különbözőeknek adódjanak.

Későbbi felhasználás céljából megemlíjtük, hogy ha a *Bodewig* által alkalmazott \mathbf{T}_1 matrix-szal balról és a

$$\mathbf{T}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

matrix-szal jobbról szorzunk egy \mathbf{A} típusú matrixot, akkor a

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}'_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix} = \langle a_{11}, \mathbf{A}^{(2)} \rangle; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}$$

illetve az

$$(6) \quad \mathbf{A} = \mathbf{T}_1^{-1} \langle a_{11}, \mathbf{A}^{(2)} \rangle \mathbf{T}_1'^{-1}$$

egyenletre jutunk. Innen következik, hogy ha az \mathbf{A} matrix rangja r , akkor az eggyel kevesebb sort és oszlopot tartalmazó $\mathbf{A}^{(2)}$ matrix rangja $r - 1$. Továbbá kvadratikus matrix esetén $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_1'| = 1$ figyelembevételével adódik, hogy

$$(6.1) \quad |\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_1'| = |\mathbf{A}|.$$

II. A diadikus előállítás és annak kapcsolata a bilineáris alak transzformációjával és a homogén lineáris egyenletek megoldásával

Elsőrangú matrix meg van határozva egy sora és egy oszlopa által, ha a sor és oszlop közös eleme 0-tól különböző. Legyen pl. a β -dik sor :

$$\alpha^\beta : [a_{\beta 1} \dots a_{\beta m}] \text{ és a } \gamma\text{-dik oszlop : } \alpha_\gamma = \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix}, \text{ közös elemük}$$

$a_{\beta\gamma} \neq 0$. Ekkor az összes másodrendű minorok eltűnéséből következik

$$a_{ij} = \frac{a_{1\gamma} a_{\beta i}}{a_{\beta\gamma}}$$

$$[a_{ij}] = \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} a_{\beta 1} & \dots & a_{1\gamma} a_{\beta m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n\gamma} a_{\beta 1} & \dots & a_{n\gamma} a_{\beta m} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1} \dots a_{\beta m}] = \frac{\alpha_\gamma \alpha^\beta}{a_{\beta\gamma}}.$$

E szerint minden elsőrangú matrix előállítható mint egy baloldali oszlopvektor-tényező és egy jobboldali sorvektor-tényezőnek a közönséges matrixszorzás szabálya szerint képezett szorzata. Ha a $c [u_i v_j] = c u v^*$ matrixot rövidség kedvéért és az irodalomban kialakult szokást követve diádnak¹³ nevezzük, akkor fenti eredményünk így fogalmazható :

Bármely elsőrangú matrix diád alakban írható.

Közelfekvő ezek után a kérdés : Lehet-e egy r -edrangu matrixot r diád összegeként előállítani? Ennek a kérdésnek az eldöntéséhez előrebocsátjuk a következőket :

¹³ A »diád« és »diádösszeg« fogalmak és elnevezések W. Gibbs. nyomán főként az elméleti fizikai irodalomban, a háromdimenziós vektortér lineáris vektorfüggvényeinek felbontásánál szerepelnek, egyes helyeken önkényes műveleti szabályok és misztikus kommentárok (»unbestimmtes Produkt«) kíséretében. Jelen dolgozatban a — rövidsége folytán előnyben részesített és használt — diád elnevezés alatt kizárólag elsőrangú matrixot fogunk érteni, ennél fogva a diádokra vonatkozó műveleti szabályok a közönséges matrixaritmetika műveleti szabályainak speciális esetei.

Megjegyezzük még e helyen, hogy a diádok az általános matrixok közt hasonló szereppel bírnak, mint a kétváltozós függvények közt az egyváltozós függvények szorzatai.

r diád összegét általában

$$(7) \quad \sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \dots & u_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rm} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{V}^*$$

alakban fogjuk írni. Egyes esetekben azonban célszerű a diádok vektortényezőit bizonyos módon normírozni és ekkor a diádösszeg a következő alakú lesz:

$$(7.1) \quad \sum_1^r \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = \mathbf{U} \langle \lambda_1 \dots \lambda_r \rangle \mathbf{V}^*.$$

Az $\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* \dots \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*$ diádokat lineárisan függetleneknek fogjuk nevezni, ha úgy a baloldali $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r$ tényezők, valamint a jobboldali $\mathbf{v}_1^* \dots \mathbf{v}_r^*$ tényezők lineárisan függetlenek.

A továbbiakban lényeges szerepe lesz a következő lemmának:

Diádösszeg rangja nem nagyobb a tagok számánál és azzal akkor és csak akkor egyenlő, ha a diádok lineárisan függetlenek.

Ugyanis a diádösszeg (7) kifejezéséből nyilvánvaló, hogy $\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ minden $r+1$ -edrendű minora 0. Ha viszont a diádok lineárisan függetlenek, akkor definíció szerint az $\mathbf{U} \mathbf{V}^*$ szorzatnak van legalább egy

$$(\mathbf{U} \mathbf{V}^*)_{\gamma_1 \dots \gamma_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} = \mathbf{U}_{\gamma_1 \dots \gamma_r}^{\beta_1 \dots \beta_r} \mathbf{V}_{\gamma_1 \dots \gamma_r}^{*1 \dots r}$$

alakú, r -edrendű, 0-tól különböző minora. Ekkor tehát $\varrho \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \right) = r$.

Valamely matrixnak lineárisan független diádok összegeként való előállítása nyilván nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A} = \sum_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* = \mathbf{U} \mathbf{V}^*$ alakú előállítás ismeretes, akkor az összes többi diadikus előállítások

$$(8) \quad \mathbf{A} = (\mathbf{U} \mathbf{T}) (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}^*)$$

alakúak, ahol \mathbf{T} tetszőleges r -edrendű nem-szinguláris matrix. Ebből következik továbbá, hogy a diadikus előállítás baloldali \mathbf{U} (jobboldali \mathbf{V}^*) tényezőjéül \mathbf{A} oszlop (sor) vektorterének tetszőleges bázismatrixa választható és ezáltal a másik tényező egyértelműen meg van határozva.

Kézenfekvő ezek után a következő, elméletileg és gyakorlatilag egyaránt fontos kérdésnek a felvetése: Hogyan lehet valamely adott matrixnak egy (7 v. 7.1) alakú diadikus előállítását effektíve megszerkeszteni? Az alábbiakban erre a célra egy olyan algoritmust adunk meg, mely kizárólag másodrendű determinánsok számításából áll és amely az adott matrix rangszámát egy alkalmas diád leválasztása (kivonása) által eggyel csökkenti.

Feltesszük, hogy $\varrho(\mathbf{A}) = r \geq 1$, tehát van legalább egy 0-tól különböző elem: $a_{\beta\gamma}$. Ekkor \mathbf{A} -ból az $a_{\beta\gamma}$ elem által generált $\frac{1}{a_{\beta\gamma}} \mathbf{a}_{\gamma} \mathbf{a}_{\beta}^T$ diádot kivonva a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{\beta\gamma}} \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ \vdots \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1} \dots a_{\beta m}] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - \frac{a_{1\gamma} a_{\beta 1}}{a_{\beta\gamma}} & \dots & 0 & a_{1m} - \frac{a_{1\gamma} a_{\beta m}}{a_{\beta\gamma}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} - \frac{a_{n\gamma} a_{\beta 1}}{a_{\beta\gamma}} & \dots & 0 & a_{nm} - \frac{a_{n\gamma} a_{\beta m}}{a_{\beta\gamma}} \end{bmatrix} \dots \mathbf{A}^{(2)}$$

matrixot nyerjük, melynek γ -dik oszlopa és β -dik sora csupa 0 elemből áll. Továbbá az I. § végén bizonyított segédétel szerint $\varrho(\mathbf{A}^{(2)}) = \varrho(\mathbf{A}) - 1$.

E szerint az adott \mathbf{A} matrixot az $\frac{1}{a_{\beta\gamma}} \mathbf{a}_{\gamma} \mathbf{a}_{\beta}^T$ diád leválasztásával eggyel alacsonyabb rangúra redukáltuk. Nyilvánvaló, hogy a redukeiót r -szer iterálva, azaz r diád leválasztásával 0 matrixhoz jutunk és ezzel az adott r -edrangú matrix r diád összegére van bontva, melyek szükségképpen lineárisan függetlenek.

A diádok fokozatos leválasztásából álló algoritmus e szerint nemcsak a rangszám gyakorlati kiszámítására alkalmas, hanem azt evidenciába is helyezi.

Vizsgáljuk ezek után tüzetesebben a szukcesszív redukeiókkal keletkező diádok elemeit.

A k -adik redukeiónál az $\mathbf{A}^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$ matrix és az abból egy 0-tól különböző $a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}$ elem által generált diád leválasztásával keletkező $\mathbf{A}^{(k+1)} = [a_{ij}^{(k+1)}]$ matrix közt (8) szerint az

$$(9.1) \quad [a_{ij}^{(k+1)}] = [a_{ij}^{(k)}] - \frac{1}{a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}} [a_{i \gamma_k}^{(k)} a_{\beta_k j}^{(k)}] ; a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

összefüggés áll fenn.

Másrészt \mathbf{A} minorai közt az

$$(9.2) \quad A_{ij}^{(k)} = \frac{|\mathbf{A}_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} i, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} j}|}{|\mathbf{A}_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \gamma_1 \dots \gamma_{k-1}}|}, \quad A_{ij}^{(1)} = a_{ij}; \quad A_{ij}^{(0)} = 1$$

jelölés alkalmazásával fennáll a következő azonosság¹¹:

$$A_{ij}^{(k)} A_{\beta_k \gamma_k}^{(k)} - A_{i \gamma_k}^{(k)} A_{\beta_{kj}}^{(k)} = A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)} A_{ij}^{(k+1)}$$

melyből $A_{\beta_k \gamma_k}^{(k)} \neq 0$, $A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)} \neq 0$ esetén átrendezéssel

$$(9.21) \quad \frac{[A_{ij}^{(k+1)}]}{A_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}} = \frac{[A_{ij}^{(k)}]}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}} - \frac{[A_{i \gamma_k}^{(k)} A_{\beta_{kj}}^{(k)}]}{[A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}]^2} : \frac{A_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}}$$

következik. (9.1) és (9.21) összehasonlításából látható, hogy $a_{ij}^{(k)}$ és $\frac{A_{ij}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}}$ ugyanazon rekurzív relációknak tesznek eleget, továbbá az $a_{ij}^{(1)}$ és $\frac{A_{ij}^{(1)}}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}}$ kezdeti értékek megegyeznek. Következésképpen

$$(10) \quad a_{ij}^{(k)} = \frac{A_{ij}^{(k)}}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)}} = \frac{|\mathbf{A}_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} i, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} j}|}{|\mathbf{A}_{\beta_1 \dots \beta_{k-1} \gamma_1 \dots \gamma_{k-1}}|}.$$

A $k = 1, 2, \dots, r$ értékekhez tartozó egyenleteket összegezve, $a_{ij}^{(r+1)} = 0$ figyelembevételével az adott r -edrangu matrix explicit diadikus előállítását nyerjük (ahol $a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}$ az $\mathbf{A}^{(k)}$ matrixnak tetszőleges, 0-tól különböző eleme).

$$(11) \quad \mathbf{A} = \sum_1^r \frac{[a_{i \gamma_k}^{(k)} a_{\beta_{kj}}^{(k)}]}{a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1 \gamma_1} a_{1 \gamma_2}^{(2)} \dots a_{1 \gamma_r}^{(r)} \\ a_{2 \gamma_1} a_{2 \gamma_2}^{(2)} \dots a_{2 \gamma_r}^{(r)} \\ \dots \\ a_{n \gamma_1} a_{n \gamma_2}^{(2)} \dots a_{n \gamma_r}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\beta_1 \gamma_1} \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots a_{\beta_r \gamma_r}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{\beta_{11}} a_{\beta_{12}} \dots a_{\beta_{1m}} \\ a_{\beta_{21}}^{(2)} a_{\beta_{22}}^{(2)} \dots a_{\beta_{2m}}^{(2)} \\ \dots \\ a_{\beta_{r1}}^{(r)} a_{\beta_{r2}}^{(r)} \dots a_{\beta_{rm}}^{(r)} \end{bmatrix}$$

$$(11.1) \quad = \sum_1^r \frac{1}{A_{\beta_{k-1} \gamma_{k-1}}^{(k-1)} A_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}} \begin{bmatrix} -A_{1 \gamma_k}^{(k)} \\ \vdots \\ -A_{n \gamma_k}^{(k)} \end{bmatrix} [A_{\beta_{k1}}^{(k)} \dots A_{\beta_{km}}^{(k)}]$$

¹¹ L. pl. 1. c. 4) S. 61. o.

Ha \mathbf{A} -nak első-, második-, ... r -edrendű sarokminorai 0-tól különböznek, akkor $\beta_k = \gamma_k = k$ tehető és ez esetben (10) szerint $a_{ij}^{(k)} = 0$, ha $i < k$ vagy $j < k$, tehát a (11) előállítás a következő alakú lesz¹⁵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2}^{(2)} & \dots & a_{rr}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nr}^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2r}^{(2)} & \dots & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rm}^{(r)} \end{bmatrix}. \quad (11.2)$$

Ez esetben tehát a (11) felbontásban szereplő balszélső és jobbszélső tényezők trapéz(háromszög)mátrixok.

Végül, a (11.1)-ben szereplő oszlop- és sorvektorok elemeinek (9.2) alatti struktúrájából látható, hogy

$$\begin{bmatrix} A_{1\gamma_r}^{(k)} \\ \vdots \\ A_{n\gamma_k}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\beta_1\gamma_k} & \dots & a_{\beta_1\gamma_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\beta_{k-1}\gamma_1} & \dots & a_{\beta_{k-1}\gamma_k} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \dots & \mathbf{a}_{\gamma_k} \end{bmatrix},$$

$$[A_{\beta_k 1}^{(k)} \dots A_{\beta_k m}^{(k)}] = \begin{bmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \dots & a_{\beta_1\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\beta_k\gamma_1} & \dots & a_{\beta_k\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_k} \end{bmatrix}$$

és ennek felhasználásával a (11.1) diádok tényezői az \mathbf{A} matrix skálár- és vektor-elemeivel explicite is kifejezhetők a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_{\gamma_1} \mathbf{a}^{\beta_1}}{a_{\beta_1\gamma_1}} + \frac{\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & a_{\beta_1\gamma_2} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \mathbf{a}_{\gamma_2} \end{vmatrix}}{a_{\beta_1\gamma_1} A_{\beta_2\gamma_2}^{(2)}} \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ a_{\beta_2\gamma_1} & \mathbf{a}^{\beta_2} \end{vmatrix} + \dots \quad (11.3)$$

$$\dots + \frac{\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \dots & a_{\beta_1\gamma_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\beta_{r-1}\gamma_1} & \dots & a_{\beta_{r-1}\gamma_r} \\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \dots & \mathbf{a}_{\gamma_r} \end{vmatrix}}{A_{\beta_{r-1}\gamma_{r-1}}^{(r-1)} A_{\beta_r\gamma_r}^{(r)}} \begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & \dots & a_{\beta_1\gamma_{r-1}} & \mathbf{a}^{\beta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\beta_r\gamma_1} & \dots & a_{\beta_r\gamma_{r-1}} & \mathbf{a}^{\beta_r} \end{vmatrix}$$

ahol $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}^j = [a_{j1} \dots a_{jm}]$ és $A_{\beta_k\gamma_k}^{(k)}$ a (9.2)-ben megadott jelentéssel bír.

¹⁵ V. ö. Гантмахер 1. o.¹²). 39. o.

Ha az r -edrangú \mathbf{A} matrix-szal az $\mathbf{y}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum \sum a_{ij} y_i x_j$ bilineáris alakot képezzük és arra (11.3)-et alkalmazzuk, akkor pontosan a bilineáris alak Jacobi-féle transzformációjához¹⁶ jutunk. Ezzel igazoltuk korábbi állításunkat, miszerint valamely matrix (11) alakú diadikus előállítása nem egyéb, mint a

$$(12) \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0,$$

vagy matrixokkal kifejezve, az

$$(12.1) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$$

lineáris, homogén egyenletrendszer és legyen $\varrho(\mathbf{A}) = r$.

Az \mathbf{A} koefficiensmatrix diadikus előállítása azonnal evidenciába helyezi, hogy a (12) rendszer r számú független egyenlettel ekvivalens. Ha ugyanis

$\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$ az \mathbf{A} koefficiensmatrixnak egy tetszőleges diadikus előállítása, akkor a (12) rendszer az

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \left(\sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \right) \mathbf{x} = \mathbf{u}_1 (\mathbf{v}_1^* \mathbf{x}) + \dots + \mathbf{u}_r (\mathbf{v}_r^* \mathbf{x}) = 0$$

alakban írható, tehát az $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r$ tényezők lineáris függetlensége folytán akkor és csak akkor van kielégítve, ha

$$(13) \quad \mathbf{v}_1^* \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{v}_r^* \mathbf{x} = 0$$

Az $\mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ rendszer tehát az \mathbf{A} rangszámával egyező számú független egyenletből álló (13) rendszerrel ekvivalens.

Egy tetszőleges diadikus előállítás felhasználásával adódó rendszer gyakorlati számításra nem alkalmas, minthogy az még egy r -ismeretlenű, nem-szinguláris koefficiensmatrix-szal bíró egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé.

Ha azonban az \mathbf{A} koefficiensmatrixnak (11)-ben megadott diadikus előállítását vesszük alapul, akkor — szükség esetén kellő átrendezés és átszámolás után — (11.2) szerint a következő alakú egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(2)}x_r + \dots + a_{2m}^{(2)}x_m &= 0 \\ \vdots & \\ + \dots + a_{rr}^{(r)}x_r + \dots + a_{rm}^{(r)}x_m &= 0, \end{aligned}$$

melyből nyilván x_r, x_{r-1}, \dots, x_1 rekurzív, mint az x_{r+1}, \dots, x_m tetszőleges paraméterek függvényei kifejezhetők.

¹⁶ V. ö. E. Pascal, l. c. S. 121. o.

Noha az ily módon adódó redukált rendszer a Gauss-féle elvnek, vagyis a kötött ismeretlenek rekurzív kiszámíthatóságának követelményét kielégíti, számítástechnikai szempontból még mindig különféle hiányosságokat mutat, amennyiben átrendezéseket, átszámozásokat és az $a_{kk}^{(k)}$ együtthatókkal való osztásokat teszi szükségessé, ami nagyobb számú ismeretlen esetén a kivített nehézkessé és könnyen elhibázhatóvá teszi.

Felvethető tehát a kérdés: Van-e az adott \mathbf{A} koeficiensmatrixnak olyan diadikus előállítás, mely az $\mathbf{Ax} = 0$ rendszer megoldásához egyedül lényeges jobboldali tényezőt az effektív számítás cáljaira előnyös alakban szolgáltatja?

Mint fentebb említettük, egy ilyen előállítás létezését valószínűsíti a matrix Hermite-féle normálformájára vonatkozó tétel.

A következőkben egy olyan diadikus előállítást fogunk megadni, mely a jobboldali tényezőt a Hermite-féle normálforma 1. és 2. tulajdonságaival rendelkező háromszögmatrix alakban szolgáltatja.¹⁷

Kezdjük könnyebb áttekintés végett egy kvadratikus, nem-szinguláris matrix felbontásával. Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ feltevésből következik, hogy \mathbf{A} első oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta_1 1}$ elem, tehát képezhető az

$$(14) \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, \frac{a_{\beta_1 2}}{a_{\beta_1 1}}, \dots, \frac{a_{\beta_1 n}}{a_{\beta_1 1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

különbség. A maradékmatrixból a β_1 -dik 0-sor és az első 0-oszlop elhagyásával keletkező $n - 1$ -edrendű matrix — az I. § végén közölt lemma szerint — szintén nem-szinguláris, arra tehát az előbbi konstrukció alkalmazható. Ilyen módon a konstrukció n -szeri kivitele után \mathbf{A} következő alakú felbontásához jutunk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Itt a jobboldali tényező valóban kielégíti a Hermite-féle normálformára vonatkozó 1. és 2. követelményeket.

Abban a kivételes (csupán definit \mathbf{A} esetén garantált) esetben, ha \mathbf{A} összes sarokminorai 0-tól különbözők, a most közölt eljárás (az $a_{\beta_k k}^{(k)} = a_{kk}^{(k)}$ választás mellett) pontosan a Cholesky—Banachiewicz-féle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

felbontáshoz vezet.

¹⁷ »Háromszög-matrix« itt a legáltalánosabb értelemben veendő, amennyiben az tetszőleges számú 0-sort tartalmazhat.

Ezek után ismertetjük egy szinguláris, vagy nem-kvadratikus matrixnak gyakorlati számításra alkalmas felbontását. Miután egy olyan ismeretlenre, mely a kiindulási $\mathbf{Ax} = 0$ egyenletrendszerben elő sem fordul, nyilván nem kell tekintettel lennünk, feltehetjük, hogy \mathbf{A} első oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta,1}$ elem. Az $a_{\beta,1}$ elem által generált diádot \mathbf{A} -ból levonva a (14) jobboldalán álló maradékmatrixot nyerjük. Most két eset lehetséges:

$\alpha)$ A maradékmatrix második oszlopában van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta,2}^{(2)}$ elem. Ekkor az előbbi konstrukció megismétlésével egy további 0-tól különböző diádot választunk le.

$\beta)$ A maradékmatrix második oszlopa csupa 0 elemből áll. Ekkor egy

$$\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} [0, 0, \dots, 0] \text{ alakú } 0\text{-diádot választunk le, melyben a } * \text{-gal jelölt}$$

elemek tetszőlegesek.

Az $\alpha)$ és $\beta)$ -ben leírt redukciókat az egyes maradékmatrixok struktúrájának megfelelően végrehajtva, m lépésben az adott \mathbf{A} matrixnak következő diadikus előállításához jutunk:

$$(15) \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & \dots & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & b_{v_2, v_2+1} & \dots & b_{v_2 m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & b_{v_3, v_3+1} & b_{v_3 m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$1 < v_2 < v_3 < \dots < v_r \leq m$$

Ez a felbontás az $\mathbf{Ax} = 0$ homogén rendszerrel ekvivalens redukált rendszert a következő alakban szolgáltatja:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \dots &+ b_{1m}x_m = 0 \\ x_{v_2} + b_{v_2, v_2+1}x_{v_2+1} + \dots &+ b_{v_2 m}x_m = 0 \quad (15.1) \\ x_{v_3} + b_{v_3, v_3+1}x_{v_3+1} + \dots &+ b_{v_3 m}x_m = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Az így nyert rendszer alakjából rögtön felismerhető, hogy abban $x_1, x_{v_2}, x_{v_3}, \dots, x_{v_r}$ a kötött ismeretlenek, melyek a (15.1) egyenletekből a többi ismeretleneknek, mint tetszőleges paramétereknek függvényei, rekurzíve pusztán összeadás- és szorzásműveletekkel kiszámíthatók.

Nyilvánvaló, hogy a most kifejtett módszer bármely matrixra minden átrendezés és átszámozás nélkül alkalmazható és lényegében nem egyéb, mint a Gauss-féle eliminációs algoritmusnak a Hermite-féle normálforma követelményeit tekintetbe vevő általánosítása és matrixtechnikai átírása.

III. Inhomogén egyenletrendszer

Bármely inhomogén egyenletrendszer általános megoldása előállítható mint egy homogén rendszernek egy speciális megoldása. Ha ugyanis a megoldandó inhomogén rendszer

$$(16) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

vagy matrixjelöléssel

$$(16.1) \quad \mathbf{Ax} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \equiv \mathbf{b}$$

ill. particionált matrixok alkalmazásával

$$(16.2) \quad [\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

akkor ennek minden \mathbf{x} megoldása az

$$(17) \quad [\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{m+1} \end{bmatrix} = 0$$

homogén rendszernek egy olyan speciális megoldása, melynél $x_{m+1} = -1$. Ahhoz pedig, hogy a (17) homogén rendszernek legyen olyan speciális megoldása, melyben $x_{m+1} = -1$, szükséges és elegendő, hogy x_{m+1} a (17) rendszerre nézve szabad ismeretlen (tetszőleges paraméter) legyen, vagyis a \mathbf{b} vektorral jobbról kiegészített $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrixnak (15) előállításában szereplő háromszögmatrix legalsó eleme 0 legyen.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inhomogén lineáris egyenletrendszer tehát akkor és csak akkor kompatibilis, ha az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrixnak (15) alakú felbontásában szereplő háromszögmatrixnak utolsó fődiagonális-eleme 0. Ekkor a megfelelő homogén rendszer általános megoldásában az x_{m+1} tetszőleges paraméternek -1 értéket adva nyerjük az inhomogén rendszer általános megoldását.

Ily módon egy inhomogén rendszer megoldása gyakorlati számításra alkalmas formában vissza van vezetve a megfelelő homogén rendszer megoldására.

Numerikus példák

A diadikus felbontás gyakorlati kivitelére vonatkozólag előre bocsátjuk a következőket. A (9.1) egyenletek mutatják, hogy a fokozatos redukció minden egyes lépésénél a megfelelő $a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}$ -val való osztás válik szükségessé.

Ha az adott matrix elemei egész számok, akkor törtek előfordulását csak abban az esetben lehet elkerülni, ha mindegyik $[a_{ij}^{(k)}]$ matrixnak van legalább egy $a_{\beta_k \gamma_k}^{(k)}$ eleme, mely a saját sorában v. oszlopában lévő elemek legnagyobb közös osztója.

Ha viszont a matrix elemei korlátolt pontossággal adott számok, (pl. tizedestörtek), akkor a korlátolt pontosságú számításból eredő hibákat azáltal csökkenthetjük, hogy a redukció folyamán az egyes diádok generáló eleméül az abszolút legnagyobb választjuk.

1. példa. Megszerkesztendő az alábbi matrixnak egy diadikus előállítás:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}$$

Itt pl. $a_{35} = -5$ az ötödik oszlop elemeinek legnagyobb közös osztója, tehát $a_{\beta_1 \gamma_1} = a_{35}$ választás mellett

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)},$$

$a_{\beta_2 \gamma_2} = a_{14}$ választással

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)},$$

végül $a_{\beta_3 \gamma_3} = a_{23}$ választással

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

következésképpen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{UV}^* \quad (18)$$

tehát az adott matrix rangja: $\rho(\mathbf{A}) = 3$.

Ennek az eredménynek a felhasználásával az

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{Ax} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4] \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

bilineáris alak az

$$\begin{aligned} & (y_1 - y_3 - 2y_4)(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5) + \\ & (y_1 + 2y_2 - y_4)(2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4) + \\ & (y_2 + y_4)(3x_1 + 2x_2 + x_3) \end{aligned}$$

szorzatösszegbe transzformálható.

A (18) felbontás felhasználható továbbá úgy az $\mathbf{y}^* \mathbf{A} = 0$, valamint az $\mathbf{Ax} = 0$ homogén rendszerek rekurzív megoldására, miközben azonban ügyelni kell a rekurzió helyes sorrendjére. Pl. $\mathbf{y}^* \mathbf{A} = \mathbf{y}^* \mathbf{UV}^* = 0$ -ból következik

$$\mathbf{y}^* \mathbf{U} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0, \text{ azaz } \begin{aligned} y_1 - y_3 - 2y_4 &= 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 &= 0 \\ y_2 + y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Itt y_3, y_1, y_2 a kötött ismeretlenek, y_4 tetszőleges paraméter:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 - 2y_4 = y_4 \\ y_1 &= -2y_2 + y_4 = 3y_4 \\ y_2 &= -y_4 \end{aligned}$$

$$[y_1, y_2, y_3, y_4] = [3 \ -1 \ 1 \ 1] \text{ const.}$$

Próba:

$$[3 \ -1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

2. példa. Homogén rendszer.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0.$$

Első generáló elem az első oszlop $a_{21} = 1$ eleme,

$$\mathbf{A} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)}.$$

Második generáló elem a második oszlop $a_{42}^{(2)} = -2$ eleme,

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} - & 2 & - \\ & 0 & \\ & 2 & \\ - & 2 & - \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2] = \begin{bmatrix} -0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)}.$$

Harmadik oszlop 0.

Negyedik lépésnél generáló elem a negyedik oszlop $a_{14}^{(3)} = 1$ eleme

$$\mathbf{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ & 0 & \\ - & 1 & \\ & 0 & - \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2] = 0.$$

Ezek felhasználásával \mathbf{A} tényezőkre bontott alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & ? & 1 & ? \\ 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ -1 & 2 & ? & -1 & ? \\ 0 & -2 & ? & 0 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (? = \text{tetszőleges szám})$$

tehát x_1, x_2, x_4 kötött, és x_3, x_5 szabad ismeretlenek és a redukált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 2x_4 - 3x_5 = x_3 - 7x_5 \\ x_2 &= -x_3 + 2x_5 \\ x_4 &= 2x_5. \end{aligned}$$

Próba:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

3. példa. Inhomogén rendszer.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Szerkesszük meg az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ matrix diadikus előállítását, a matrix oszlopait ezúttal is balról jobbra haladó sorrendben véve.

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^{(2)}$$

$$\mathbf{A}_b^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^{(3)} = \mathbf{A}^{(4)}$$

miután a harmadik oszlop 0.

$$\mathbf{A}_b^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0.$$

E szerint $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ tényezőkre bontott alakja:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? & 0 & ? \\ 2 & 1 & ? & 0 & ? \\ 3 & 0 & ? & 2 & ? \\ -1 & 1 & ? & 3 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

tehát az $[\mathbf{A}, \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_5 \end{bmatrix}$ homogén rendszer x_5 ismeretlen tetszőleges paraméter, vagyis a (19) rendszer kompatibilis. A redukált rendszer, $x_5 = -1$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Innen az x_1, x_2, x_4 ismeretlenek mint az x_3 tetszőleges paraméter függvényei

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - 2x_3 + 1 = -3x_3 - 3 \\ x_2 &= -x_3 - 2x_4 = -x_3 - 4 \\ x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Próba:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3x_3 & -3 \\ -x_3 & -4 \\ x_3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

О НОВОМ МЕТОДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВЫВАЮЩЕМСЯ НА ДИАДИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАТРИЦ.

Е. Эгервари

Резюме

В течение развития техники матриц развивались и методы практического (численного, механического) решения систем линейных уравнений. Первым этапом этого развития являлся основывающийся на теории определителей метод, который не пользуется матрицами. Следующий метод одинаково воспользовался определителями и матрицами. Он применял средства арифметики матриц, — в первую очередь, обратную матрицу. Последний этап развития характеризуется полным пренебрежением теорией определителей и обратной матрицей. Он основывается исключительно на правилах сложения и умножения матриц.

Разница между первым и последним этапом хорошо характеризуется примером Форсайса: При прямом применении т. н. «правила Крамера» решение систем линейных уравнений, содержащих $n = 26$ неизвестных, требует $(n + 1)! \sim 10^{27}$ умножений. Электронической вычислительной машине, способной на исполнение 2600 умножений в секунду, нужно 10^{17} лет для исполнения упомянутых умножений. С другой стороны метод,

основывающийся на технике матриц, требует только $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ умножений при решении той же системы (т. е. приблизительно 3 секунды).

Было бы возможно представить в форме кратких практических правил метод, основывающийся на технике матриц, пренебрегая теорией. Пожалуй, этот путь был бы более симпатичен для читателей с практическим интересом. Но мы того мнения, что принцип единства теории и практики в этом случае должен быть удовлетворен безусловно, так как технико-матричный способ изложения предоставляет одновременно теоретические основы и практическую форму исполнения решения. Помимо этого существует тесная связь между решением линейных уравнений с помощью техники матриц и преобразованием билинейных (квадратических) форм, пренебрежение которой являлось бы непоследовательностью.

Чтение работы требует только знания элементов арифметики матриц.

AUF DYADISCHER MATRIZENDARSTELLUNG BERUHENDE METHODE ZUR TRANSFORMATION BILINEARER FORMEN UND AUFLÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

E. EGERVÁRY

Zusammenfassung

Die Methoden der praktischen (numerischen, maschinellen) Auflösung linearer Gleichungssysteme entwickelten sich, zugleich mit der Entfaltung des Matrizenkalküls, durch mehrere Stufen.

Die erste ist die Stufe der auf der Determinantentheorie beruhenden, matrizenfreien Methode. Auf der zweiten herrscht die Methode, die sich der Determinanten sowohl als auch der Matrizen bedient und die Matrizenarithmetik, in erster Linie die Reziproke, anwendet. Die letzte Entwicklungsstufe kennzeichnet die völlige Ausschaltung der Determinantentheorie und selbst der reziproken Matrix; die Rechnung beruht ausschliesslich auf den Additions- und Multiplikationsregeln der Matrizen.

Bezeichnend für den Unterschied zwischen der ersten und dritten Phase der Entwicklung ist folgendes Beispiel von Forsythe: Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 26 Unbekannten wären bei direkter Anwendung der sogenannten Cramerschen Regel $(n + 1)! \sim 10^{27}$ Multiplikationen nötig: eine elektronische Rechenmaschine, die 2600 Multiplikationen in einer Sekunde absolviert, bräuchte dazu ungefähr 10^{17}

Jahre. Unter Anwendung der auf dem Matrizenkalkül beruhenden Methode sind hingegen nur $\frac{n^3}{3} \sim 6000$ Multiplikationen erforderlich, somit nicht ganze 3 Sekunden.

Es wäre möglich — und vielleicht für den praktisch interessierten Leser sympathischer — die auf den Matrizenkalkül aufgebaute Methode bei Vernachlässigung der Theorie in Form kurzer Rechenregeln darzustellen. Doch glauben wir in diesem Falle die Forderung zur Einheit von Theorie und Praxis unbedingt befriedigen zu müssen, da doch die Behandlung mittels des Matrizenkalküls die theoretischen Grundlagen und die praktischen Rechenregeln gleichzeitig liefert. Weiter besteht zwischen der Lösung von linearen Gleichungssystemen mittels des Matrizenkalküls und der Transformation von bilinearen (quadratischen) Formen eine überaus enge Verbindung, deren Ausserachtlassung Inkonsequenz wäre.

Zum Verständnis der Abhandlung genügt die Kenntnis der Elemente der Matrizenarithmetik.

KÉT VÉGÉN SZABADON FELFÜGGESZTETT GERENDA OLDALIRÁNYÚ KIHAJLÁSSAL SZEMBENI STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA¹

LOVASS—NAGY VIKTOR

Összefoglalás

A szerző két végén keresztmetszetének súlypontja fölött felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitását vizsgálja, azon esetben, amikor a felfüggesztési pontok a gerenda szélső keresztmetszetének egyik főinerciatengelyébe esnek, és a szélső keresztmetszeteknek saját síkjukban történő elfordulását a felfüggesztési módból kifolyólag kényszerhatás nem gátolja.

Szerző vizsgálatait azon esetekre terjeszti ki, amikor:

a) A gerendát középső keresztmetszetének súlypontjában ható függőleges irányú koncentrált erő terheli.

b) A gerendát egyenletesen megoszló, függőleges irányú erő terheli.

A levezetett eredmények megadják a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontjától mért magasságának azon minimális értékét, amelynél a gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitása biztosítva van.

Az alábbiakban vizsgáljuk valamely — két, egymásra merőleges szimmetriasíkkal bíró — gerendának (prizmatikus v. hengeres rúdnak) mind a középső keresztmetszet súlypontjában ható függőleges irányú koncentrált erő², mind egyenletesen megoszló függőleges irányú terhelés³ hatására létrejövő deformációját, azon esetben, amikor a gerenda oly módon van két végén felfüggesztve, hogy a forgást megengedő felfüggesztési pontok a szélső keresztmetszetek súlypontja fölött, valamelyik főinerciatengelyben fekszenek.⁴

¹ Jelen dolgozat a Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium XII. Tervezési Főosztályának megbízásából végzett számítások eredményeinek egy részét tartalmazza.

² Két végén befalazott derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerendának középső keresztmetszetének súlypontjában ható koncentrált erő által előidézett kibillenését *S. Timoshenko* vizsgálta. Lásd: *S. Timoshenko: Théorie de la Stabilité Élastique*, Paris et Liège, 1947, Librairie Polytechnique, Ch. Béranger kiadása, 242. o.

³ Két végén keresztmetszetének súlypontja felett felfüggesztett, egyenletesen megoszló erővel terhelt derékszögű négyszög-keresztmetszetű gerenda kibillenésével *Csonka P.* foglalkozott. Lásd: *Csonka P.: A végein felfüggesztett négyszögkeresztmetszetű rúd stabilitása*. A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. IX. kötet. 1—4. szám.

⁴ Számításaink nyilvánvalóan olyan gerendákra vonatkoznak, amelyek anyaga homogén, izotrop és tökéletesen rugalmas. A levezetett eredmények nem alkalmazhatók vékonyfalú szelvényrészekből összetett keresztmetszetekre, ahol az övhajlítások is figyelembeveendőek.

Az adott terhelés esetén kétféle egyensúlyi helyzet lehetséges :

1. A gerenda csak függőleges irányú lehajlást és az egyes keresztmetszetek csak a gerenda hossztengetelyére merőleges vízszintes tengely körüli elfordulást szenvednek. Ennek az egyensúlyi helyzetnek a labilis, vagy stabilis volta a felfüggesztési pontok helyzetétől függ. Ha a felfüggesztési pontok helyzete olyan, amely mellett a most körülírt egyensúlyi helyzet labilis, akkor létezik egy másik, stabilis egyensúlyi helyzet is :

2. A gerenda az adott terhelés hatására mind függőleges, mind vízszintes irányban kihajlik, az egyes keresztmetszetek pedig mind a hossztengetely, mind az arra merőleges vízszintes és függőleges tengely körül is elfordulnak.

A következő számítások célját azon kérdés megválaszolása képezi, hogy vajjon lehetséges-e a gerenda felfüggesztését oly módon eszközölni, hogy a gerenda stabilis állapota az egyes pontban vázolt legyen.

Jelölések. Számításaink során a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni : (lásd az ábrákat is!)

- z . . . a deformálatlan súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mérve.
- s . . . a deformált súlyponti szál valamely pontjának távolsága a deformált súlyponti szál középpontjától, a deformált súlyponti szál mentén mérve.
- $r(z)$. . a deformálatlan súlyponti szál középpontjától a deformálatlan súlyponti szál mentén mért z távolságra lévő pont helyzetvektora.
- $r(s)$. . a deformált súlyponti szál középpontjától a deformált súlyponti szál mentén mért s távolságra lévő pont helyzetvektora.
- r_1 . . . a lentebb értelmezendő Q erő támadási pontjának helyzetvektora.
- $P(z)$. . a gerendára ható (a deformálatlan súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(z)$ helyzetvektorú pontban.
- $P(s)$. . a gerendára ható (a deformált súlyponti szál hosszegységére vonatkoztatott) terhelés az $r(s)$ helyzetvektorú pontban.
- Q . . . a gerenda jobboldali végén működő koncentrált (reakció-) erő.
- $M(z)$. a gerenda valamely z koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz z -től $+\frac{l}{2}$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő.
- $M(s)$. a deformált gerenda valamely s koordinátájú keresztmetszetétől jobbra eső (azaz s -től $+\frac{l}{2}$ -ig terjedő) darabjára ható nyomatékvektor-eredő.
- $\alpha + \beta$. jelenti azon szöget, amellyel az egyensúlyi helyzetben a gerenda tetszésszerű keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti függőleges, illetőleg vízszintes helyzetükhöz képest a felfüggesztési pontokon át fektethető tengely körül elfordulnak.
- α . jelenti azon (véges mértékű) szöget, amellyel a gerenda két szélső keresztmetszetének főinerciatengelyei eredeti helyzetükhöz képest elfordulnak.
- β . jelenti azon (elsőrendűen kicsiny) szöget, amellyel a gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyei a deformált állapotban a két szélső keresztmetszethez viszonyítva elfordulnak.

1. *Megjegyzés:* Mivel a jelenség α -ban szimmetrikus, α pozitív iránya tetszés szerint választható. A következő számításokban α -t β -val megegyező irányításának vesszük. A β szög pozitív iránya megegyezik a lentebb értelmezendő t_0 vektorhoz rendelt jobbcavar-iránnyal.

2. *Megjegyzés:* A gerenda 2./fajta egyensúlyi helyzetének kialakulása úgy is elképzelhető, hogy először az egész gerenda (deformálódás nélkül) elfordul a felfüggesztési pontokon átfektetett tengely körül a (véges nagyságú) α szöggel, és a gerenda két végét ebben a helyzetben befalazva, a gerenda az eredetileg adott (függőleges irányú) koncentrált vagy megoszló terhelés hatá-

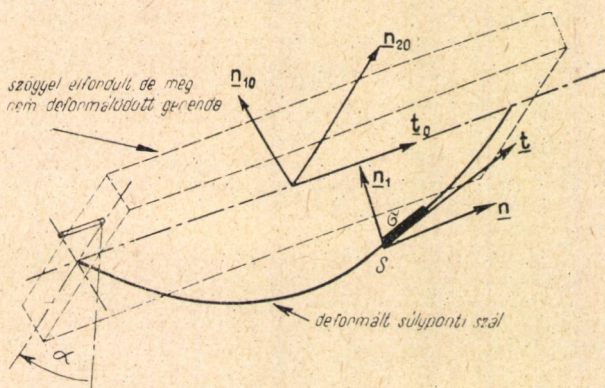
sára deformálódik, amely deformációt a fenti β szög, továbbá a lentebb értelmezendő φ és ψ szögek, valamint u és v elmozdulások jellemeznek.

$\mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}, \mathbf{t}_0$ az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerenda középső keresztmetszetének főinerciatengelyeivel és a gerenda súlyponti szálával egybeeső, az adott sorrendben jobbsavarrendszert alkotó egységvektor-hármas (lásd az 1. sz. ábrát);

$\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$ a deformált gerenda valamely keresztmetszetének főinerciatengelyeivel és a deformált súlyponti szálnak az illető keresztmetszet súlypontjához tartozó érintőjével egybeeső, az adott sorrendben jobbsavarrendszert alkotó egységvektor-hármas; az alábbiakban: »kísérő triéder«⁵.

φ a deformált gerenda súlyponti szála \mathbf{t} érintővektorának az $\mathbf{n}_{10}\mathbf{t}_0$ síkra való vetületének a \mathbf{t}_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense).

ψ a deformált gerenda súlyponti szála \mathbf{t} érintővektorának az $\mathbf{n}_{20}\mathbf{t}_0$ síkra való vetületének a \mathbf{t}_0 vektorral bezárt (elsőrendűen kicsiny) szöge (illetve a vetület iránytangense).



1. ábra

3. *Megjegyzés:* φ ill. ψ akkor minősítendőek pozitívoknak, ha forgási irányuk megegyezik az \mathbf{n}_{20} ill. \mathbf{n}_{10} vektorhoz rendelt jobbsavar forgási irányával.

4. *Megjegyzés:* a β , φ és ψ szögek felhasználásával az $\mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}, \mathbf{t}_0$ »alap-triéder« és az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$ »kísérő triéder« között a következő összefüggések írhatók fel:⁶

$$\mathbf{n}_1 = 1 \cdot \mathbf{n}_{10} + \beta \cdot \mathbf{n}_{20} - \varphi \cdot \mathbf{t}_0$$

$$\mathbf{n}_2 = -\beta \cdot \mathbf{n}_{10} + 1 \cdot \mathbf{n}_{20} + \psi \cdot \mathbf{t}_0$$

$$\mathbf{t} = \varphi \cdot \mathbf{n}_{10} - \psi \cdot \mathbf{n}_{20} + 1 \cdot \mathbf{t}_0$$

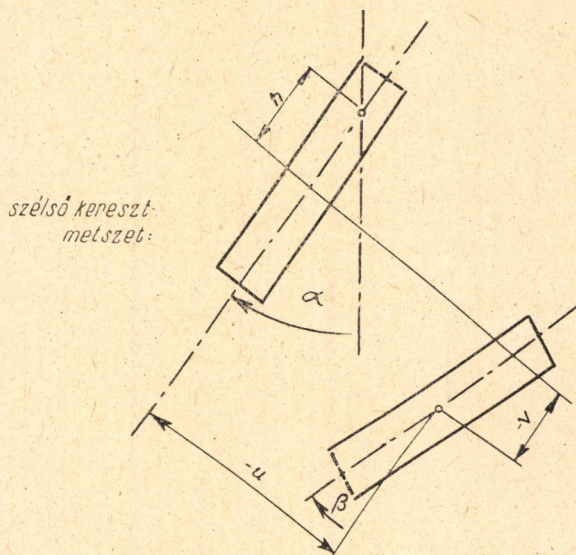
u a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az \mathbf{n}_{10} vektorral megegyező irányban.

v a deformált gerenda valamely keresztmetszete súlypontjának (elsőrendűen kicsiny) elmozdulása az α szöggel elfordult, de még nem deformálódott gerendában elfoglalt helyzetéhez képest, az \mathbf{n}_{20} vektorral megegyező irányban.

⁵ A »kísérő triéder« kifejezését a geometriai szóhasználattól eltérően, a rugalmas rudak tárgyalásánál általában szokásos értelemben használjuk.

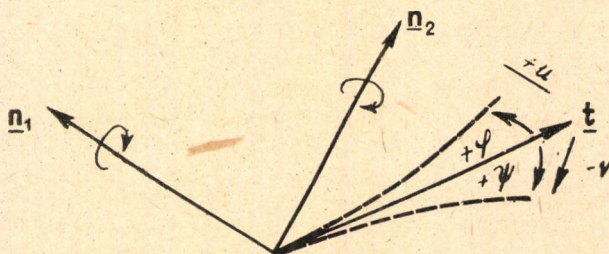
⁶ A $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_{10}, \mathbf{n}_{20}$ alap-triéder a $\mathbf{t}(z), \mathbf{n}_1(z), \mathbf{n}_2(z)$ kísérő triéderbe forgató matrixnak itt felhasznált alakja közvetlenül adódik a közismert Cayley-féle formulákból (lásd pl. M. Lagally: Vektor-Rechnung, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1928., 210. old.), ha a végtelen kis forgásnak megfelelően az ott szereplő paraméternek csupán első hatványait tartjuk meg.

5. *Megjegyzés:* az u illetve v elmozdulást akkor minősítjük pozitívnak, ha az megegyező irányú az \mathbf{n}_{10} , illetve az \mathbf{n}_{20} vektorral.



2. ábra

6. *Megjegyzés:* Minthogy feltevésünk szerint a gerenda α szöggel elfordult, de még nem deformálódott helyzetétől számított $\mathbf{n}_{10} \cdot u + \mathbf{n}_{20} \cdot v$



3. ábra

deformációs elmozdulás elsőrendűen kicsiny, továbbá \mathbf{t}_0 irányú elmozdulás nincs, másodrendű kicsinyektől eltekintve írhatjuk, hogy :

$$s = z$$

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(z)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}(z)}{dz} \right| = 1.$$

$$\text{Továbbá: } \varphi = \frac{du}{dz} \text{ és } \varphi = \frac{dv}{dz}.$$

(Tehát, amint azt a 3. sz. ábrán is feltüntettük, pozitív u -hoz pozitív φ , pozitív v -hez negatív ψ tartozik.)

A folyamatot leíró differenciálegyenletek megszerkesztése

A folyamatot leíró differenciálegyenletek megszerkesztése végett elegendő a gerenda egy tetszőleges darabjára (pl. a szilárdságtanban szokásos módon a gerenda valamely kiválasztott keresztmetszetétől jobbra eső — azaz z -től $\pm \frac{l}{2}$ -ig terjedő — gerendadarabra) ható nyomatékvektor-eredőnek $[\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}(z)\text{-nek}]$ az egyensúly fennállása esetén való eltűnését felhasználni. (Ugyanis a gerendára ható erők egyensúlyban vannak.)

A fentebb bevezetett jelölések, valamint az 1. sz. ábra figyelembevételével:

$$(1) \quad \mathbf{M}(s) = \int_s^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\sigma) - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{P}(\sigma) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(\sigma)| d\sigma + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(s)] \times \mathbf{Q}$$

ebből (a 6. Megjegyzésben foglaltak alapján) nyerjük, hogy:

$$(2) \quad \mathbf{M}(z) = \int_z^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\xi) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\xi) d\xi + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol:

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} u(z) + \mathbf{n}_{20} v(z) + \mathbf{t}_0 z$$

Annak érdekében, hogy az elemi rúd-elmélet három alap-differenciálegyenletét felírassuk, a fenti vektoriális alakban megadott $\mathbf{M}(z)$ nyomatékvektor-eredőnek a deformált gerendán kiválasztott valamely keresztmetszet főinerciatengelyei és a deformált súlyponti szál érintője által alkotott $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{t}$ »kísérő-triéder« egyységvektorokra való vetületeit kell képezni.

Ily módon az egyensúly feltételeként azt nyerjük, hogy:

$$(3) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{d\psi}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_1 \\ B_1 \frac{d\varphi}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{n}_2 \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \mathbf{t} \end{aligned}$$

A (3) egyenletrendszerből (a 4. és 6. Megjegyzésekben foglaltak figyelembevételével) az alábbi egyenletrendszerre⁷ jutunk :

$$(4) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{dv^2}{dz^2} &= - \mathbf{M}(z) \cdot \left(\mathbf{n}_{10} + \beta(z) \cdot \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \\ B_1 \frac{d^2u}{dz^2} &= \mathbf{M}(z) \cdot \left(-\beta(z) \cdot \mathbf{n}_{10} + \mathbf{n}_{20} - \frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{t}_0 \right) \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \mathbf{M}(z) \cdot \left(-\frac{du(z)}{dz} \cdot \mathbf{n}_{10} + \frac{dv(z)}{dz} \cdot \mathbf{n}_{20} + \mathbf{t}_0 \right). \end{aligned}$$

I.

(A középső keresztmetszetének súlypontjában ható P koncentrált erővel terhelt gerenda vizsgálata.)

Ha a gerendát csak középső keresztmetszetének súlypontjában ható (függőleges irányú) P koncentrált erő terheli, akkor elegendő vizsgálatainkkal

a $0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ szakaszra szorítkoznunk. E szakasz bármely helyén :

$$\mathbf{M}(z) = [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q}$$

ahol :

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} \cdot u(z) + \mathbf{n}_{20} \cdot v(z) + \mathbf{t}_0 \cdot z; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{n}_{20}h + \mathbf{t}_0 \frac{l}{2}$$

⁷ A (4) egyenletrendszerben B_1 és B_2 a gerenda fő hajlítási szilárdságait, C pedig a torziós szilárdságot jelentik :

$$B_1 = J_1 \cdot E \quad \text{és} \quad B_2 = J_2 \cdot E$$

(ahol J_1 és J_2 a gerenda keresztmetszet főinercianyomatékai az 1. illetve 2 jelű tengelyekre és E a rugalmassági modulus), továbbá :

$$C = J_3 \cdot G$$

(ahol J_3 a gerenda-keresztmetszet torziós nyomatéka és G a torziós modulus). A főinercianyomatékok meghatározása közismert módon történik. A torziós nyomaték meghatározását illetőleg lásd pl. : *A. E. H. Love : Lehrbuch der Elastizität*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1907, 375 o., továbbá : *H. Geiger und K. Scheel : Handbuch der Physik*, Band VI, Berlin 1928., J. Springer kiadása, 151. o.

Pl. »a« alappal és »b« magassággal bíró négyszögkeresztmetszetű tartó esetén

$$J_1 = \frac{ab^3}{12}; \quad J_2 = \frac{ab^3}{12}.$$

J_3 értéke csak végtelen sor alakban állítható elő ; keskeny $\left(\frac{a}{b} < \frac{1}{3}\right)$ tartóknál :

$$J_3 \cong \frac{a^3b}{3} \left(1 - 0,63 \frac{a}{b}\right).$$

(Lásd pl. a *Handbuch der Physik* idézett VI. kötetének 153. oldalán.)

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}_{10} \cdot \frac{P}{2} \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} \cdot \frac{P}{2} \cos \alpha,$$

tehát :

$$\mathbf{M}(z) = \frac{P}{2} \left\{ -\mathbf{n}_{10} \left(\frac{l}{2} - z \right) \cos \alpha + \mathbf{n}_{20} \left(\frac{l}{2} - z \right) \sin \alpha - \right. \\ \left. - \mathbf{t}_0 [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] \right\},$$

Az $\mathbf{M}(z)$ így nyert kifejezését a (4) egyenletrendszerbe helyettesítve, nyerjük, hogy :⁸

$$(4.1) \quad \begin{aligned} B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) (\cos \alpha - \beta \sin \alpha) \\ B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) (\beta \cos \alpha + \sin \alpha) \\ C \frac{d\beta}{dz} &= \frac{P}{2} \left[\left(\frac{l}{2} - z \right) \left(-\frac{du}{dz} \cos \alpha + \frac{dv}{dz} \sin \alpha \right) - u \cos \alpha + (v - h) \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

A (4.1) egyenletrendszer harmadik egyenletét z szerint differenciálva és az így nyert egyenletben $\frac{d^2 u}{dz^2}$ és $\frac{d^2 v}{dz^2}$ értékét az első két egyenletből nyerhető kifejezésekkel helyettesítve, azt kapjuk, hogy :

$$C \frac{d^2 \beta}{dz^2} = \left[\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \right]^2 \left[-\frac{B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha}{B_1 B_2} \beta + \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2} \frac{\sin 2\alpha}{2} \right].$$

Tehát β meghatározására a következő differenciálegyenlet adódik :

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \frac{d^2 \beta}{dz^2} + \gamma \left[l - \frac{z}{\left(\frac{l}{2} \right)} \right]^2 \beta &= \delta \left[l - \frac{z}{\left(\frac{l}{2} \right)} \right]^2 \\ \gamma &= \left(\frac{l}{2} \right)^4 \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \\ \delta &= \left(\frac{l}{2} \right)^4 \frac{P^2}{4B_1 B_2 C} (B_1 - B_2) \frac{\sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Bevezetve a $w = l - \frac{z}{\left(\frac{l}{2} \right)}$ új változót, az (5.1) egyenlet

$$(6.1) \quad \frac{d^2 \beta}{dw^2} + \gamma w^2 \beta = \delta w^2$$

⁸ A másodrendű kicsiny tagoktól eltekintve, továbbá a $h \frac{du}{dz}$ ill. $h \frac{dv}{dz}$ értékeket az $\frac{l}{2} - z$ értékhez képest elhanyagolva.

alakban írható⁹. Ennek a közönséges, lineáris, változó együtthatós, másodrendű, inhomogén differenciálegyenletnek általános megoldása :¹⁰

$$\beta(w) = \frac{\delta}{\gamma} + A \left(1 - \frac{\delta}{3 \cdot 4} w^4 + \frac{\gamma^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} w^8 - + \dots \right) + \\ + B \left(w - \frac{\gamma}{4 \cdot 5} w^5 + \frac{\gamma^2}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} w^9 - + \dots \right).$$

Mint hogy a $z = \frac{l}{2}$ azaz $w = 0$ helyen $\beta = 0$ (a β szög értelmezéséből következőleg) tehát A-ra azt nyerjük, hogy :

$$A = -\frac{\delta}{\gamma}.$$

Mint hogy továbbá a $z = 0$ azaz $w = 1$ helyen : $\frac{d\beta}{dw} = 0$ (ugyanis, ha a P erő a rúd szimmetriasíkjában hat, akkor $[M(z) \cdot \mathbf{t}]_{z=0} = 0$), tehát B-re az adódik, hogy :

$$B = \frac{\delta}{\gamma} \frac{-\frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma^2}{3 \cdot 4 \cdot 7} - + \dots}{1 - \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma^2}{4 \cdot 5 \cdot 8} - + \dots}$$

A további tárgyalás során szorítkozzunk arra az esetre, amidőn γ -nak magasabb hatványai az elsőhöz képest elhanyagolhatók. Ez esetben :

$$B = -\frac{\delta}{3} \frac{1 - \frac{\gamma}{4 \cdot 7}}{1 - \frac{\gamma}{4}} = -\frac{\delta}{3} \left(1 + \frac{3}{14} \gamma \right)$$

és így (a γ egynél magasabbfokú hatványait elhanyagolva) nyerjük, hogy :

$$\beta(w) = \frac{\delta}{3} \left[-w + \frac{w^4}{4} + \frac{\gamma}{4} \left(-\frac{6}{7} w + \frac{w^5}{5} - \frac{w^8}{56} \right) \right].$$

⁹ Amennyiben — pl. a gerenda két végének befalazásával — biztosítjuk, hogy az α szög azonosan zérus legyen, a (6.1) egyenletből a Timoshenko által levezetett egyenletre jutunk. Lásd *S. Timoshenko* idézett munkáját, 243. o., (d) jelű egyenlet.

¹⁰ A fenti (6.1) differenciálegyenlet megoldása Bessel-függvények alkalmazásával is történhetik. Lásd : *Jahnke—Emde : Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig, 1952. Teubner-kiadás, 150. o.

A $\beta(w)$ függvény birtokában meghatározhatók az u és v elmozdulások, mint w függvényei. Ugyanis — a (4.1) egyenletrendszer első két egyenletéből — adódik, hogy :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{B_1} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) (\beta \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{B_2} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) (-\beta \sin \alpha + \cos \alpha),$$

ebből, bevezetve a $w = 1 - \frac{z}{(l/2)}$ új független változót, nyerjük, hogy :

$$(8.1) \quad \frac{d^2u}{dw^2} = \frac{1}{B_1} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^3 (w\beta \cos \alpha + w \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2v}{dw^2} = \frac{1}{B_2} \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^3 (-w\beta \sin \alpha + w \cos \alpha).$$

A (8.1) egyenletrendszerből $[\beta(w)$ fenti képletét behelyettesítve és kétszer integrálva] adódik, hogy :

$$u(w) = \frac{1}{B_1} \varepsilon \left[\Phi(w) \cos \alpha + \frac{w^3}{6} \sin \alpha + C_1 w + C_2 \right]$$

$$v(w) = \frac{1}{B_2} \varepsilon \left[-\Phi(w) \sin \alpha + \frac{w^3}{6} \cos \alpha + C_3 w + C_4 \right],$$

ahol :

$$\varepsilon = \frac{Pl^3}{16}$$

és

$$\Phi(w) = \int_0^w \left[\int_0^w w\beta(w) dw \right] dw =$$

$$= \frac{\delta}{3} \left[-\frac{w^4}{3 \cdot 4} + \frac{w^7}{4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{\gamma}{4} \left(-\frac{6w^4}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{w^8}{5 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{w^{11}}{56 \cdot 10 \cdot 11} \right) \right]$$

Mint hogy a $z = \frac{l}{2}$ azaz $w = 0$ helyen $u = 0$ és $v = 0$, tehát :

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Minthogy továbbá a $z = 0$ azaz $w = 1$ helyen $\frac{du}{dw} = \frac{dv}{dw} = 0$, tehát :

$$C_1 = -\Phi'(1) \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$C_2 = +\Phi'(1) \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

és így u -ra és v -re azt nyerjük, hogy :

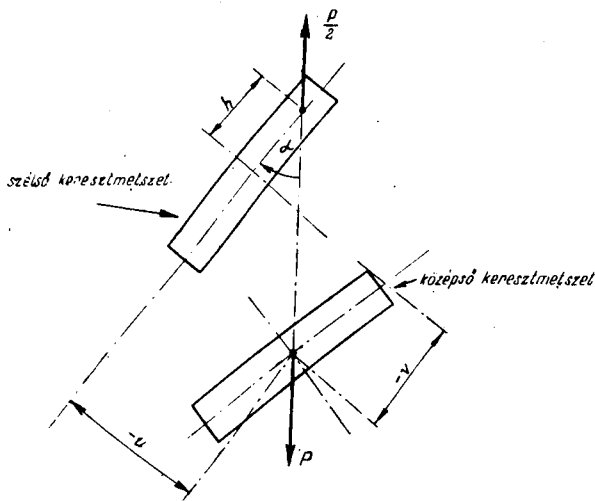
$$u(w) = \frac{\varepsilon}{B_1} \left\{ [\Phi(w) - \Phi'(1) \cdot w] \cos \alpha + \left[\frac{w^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot w \right] \sin \alpha \right\}$$

$$v(w) = \frac{\varepsilon}{B_2} \left\{ -[\Phi(w) - \Phi'(1) \cdot w] \sin \alpha + \left[\frac{w^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot w \right] \cos \alpha \right\}$$

A $\Phi(w)$ fenti kifejezéséből adódik, hogy :

$$\Phi'(1) = -\frac{\delta}{3} \left(\frac{7}{24} + \frac{29}{448} \gamma \right).$$

A $\beta(w)$, $u(w)$ és $v(w)$ függvények ismeretében felírhatjuk az α szög és a felfüggesztési pontnak a súlyponttól mért h távolsága közt egyensúly



4. ábra

esetén fennálló összefüggést. Abból a követelményből, hogy a két felfüggesztési ponton át fektetett forgástengely körüli nyomaték az elfordulást megengedő

felfüggesztés esetén a gerenda egyensúlyi helyzetében szükségképpen nullával egyenlő, nyerjük (a 4. sz. ábra figyelembevételével) hogy ¹¹:

$$\frac{-u(1)}{-v(1) + h} = \operatorname{tg} \alpha$$

tehát, egyensúly esetén :

$$\frac{\frac{\varepsilon}{B_1} \left\{ [\Phi(1) - \Phi'(1)] \cos \alpha + \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| \sin \alpha \right\}}{\frac{\varepsilon}{B_2} \left\{ -[\Phi(1) - \Phi'(1)] \sin \alpha + \left| \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right| \cos \alpha \right\} - h} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Minthogy :

$$\Phi(1) = -\frac{\delta}{3} \left| \frac{13}{168} + \frac{419}{24640} \gamma \right|,$$

tehát egyensúly esetén az α szög és h között a következő összefüggés adódik :

$$\frac{\frac{1}{B_1} \frac{Pl^3}{16} \left\{ \frac{\frac{3}{14} + \frac{21}{440} \gamma}{3} \cdot \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1B_2C} (B_1 - B_2) \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \right\}}{\frac{\frac{1}{B_2} \frac{Pl^3}{16} \left\{ \frac{\frac{3}{14} + \frac{21}{440} \gamma}{3} \cdot \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1B_2B} (B_1 - B_2) \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos \alpha \right\} - h} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

A kapott egyenlet magában foglalja mind a triviális $\alpha = 0$, mind az esetleg létező nem-triviális egyensúlyi helyzetet. Ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk a triviális egyensúlyi helyzetnek megfelelő $\sin \alpha$ tényezővel, akkor megkapjuk azt az egyenletet, mely *valós gyök esetén* a nem-triviális stabilis egyensúlyi helyzetet szolgáltatja. Ha most már a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontja feletti h magasságának azon *minimális* értékét keressük, amely mellett a kibillenés lehetősége ki van zárva, vagyis a gerenda csak függőleges lehajlást szenved, akkor tehát az $\alpha = 0$, azaz $\cos \alpha = 1$, és ennek következtében valamennyi keresztmetszetre : $\beta = 0$, akkor a $\sin \alpha$ -val végigosztott fenti egyenletben α helyébe nullát, azaz $\cos \alpha$ helyébe egyet helyettesítve és az egyenletet h -ra megoldva, nyerjük, hogy :

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left(1 + \left| \frac{3}{14} - \frac{21}{440} \gamma_0 \right| \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1 C} \right)$$

¹¹ Figyelembeveendő, hogy az u -t és v -t szolgáltató képletek a lehajlásokra — a koordinátatengelyek irányítása következtében — negatív értéket adnak.

ahol γ_0 jelenti a γ -ból $\alpha = 0$ helyettesítéssel nyert kifejezést :

$$\gamma_0 = \frac{l^4}{16} \cdot \frac{P^2}{4B_1B_2C} B_2 = \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1C}.$$

Innen a szegletes zárójelben lévő második tagnak elhanyagolásával

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1B_2} \left(1 + \frac{3}{14} \cdot \frac{l^4}{16} \frac{P^2}{4B_1C} \right).$$

Azon esetben, ha a C csavarószilárdság »végtelen nagy«-nak tekinthető, írhatjuk, hogy :

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48} \frac{B_2 - B_1}{B_1B_2} = \frac{Pl^3}{48B_1} \left(1 - \frac{B_1}{B_2} \right).$$

Végül, ha a $\frac{B_1}{B_2}$ érték az egységhez képest elhanyagolható és egyszersmind a C csavarószilárdság is »végtelen nagy«-nak tekinthető, a h_{\min} -ra a következő — elemi mechanikai úton is megkapható — egyszerű képletet nyerjük :

$$h_{\min} = \frac{Pl^3}{48B}.$$

II.

(A hosszegységenként p nagyságú egyenletesen megoszló erővel terhelt gerenda vizsgálata.)

Amennyiben a gerendát p nagyságú (hosszegységre vonatkoztatott) egyenletesen megoszló erő terheli, akkor a gerenda bármely helyén :

$$\mathbf{M}(z) = \int_z^{\frac{l}{2}} [\mathbf{r}(\zeta) - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{P}(\zeta) d\zeta + [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}(z)] \times \mathbf{Q},$$

ahol :

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{n}_{10} u(z) + \mathbf{n}_{20} v(z) + \mathbf{t}_0 z; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{n}_{20} h + \mathbf{t}_0 \frac{l}{2},$$

továbbá

$$\mathbf{P}(z) = -(\mathbf{n}_{10} p \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} p \cos \alpha)$$

és

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}_{10} p \frac{l}{2} \sin \alpha + \mathbf{n}_{20} p \frac{l}{2} \cos \alpha,$$

tehát :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z) = & -p \int_z^{\frac{l}{2}} \{ \mathbf{t}_0 [(u(\xi) - u(z)) \cos \alpha - (v(\xi) - v(z)) \sin \alpha] + \\ & + n_{20} (\xi - z) \sin \alpha + n_{10} (\xi - z) \cos \alpha \} d\xi + \\ & + p \frac{1}{2} \left(-n_{10} \left(\frac{l}{2} - z \right) \cos \alpha + n_{20} \left(\frac{l}{2} - z \right) \sin \alpha - \right. \\ & \left. - \mathbf{t}_0 [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] \right\}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{M}(z)$ így nyert kifejezését a (4) egyenletrendszerbe helyettesítve nyerjük, hogy :

$$\begin{aligned} B_2 \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{p}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] (\cos \beta - \alpha \sin \alpha) \\ B_1 \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{p}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] (\sin \alpha + \beta \cos \alpha) \\ (4.2) \quad C \frac{d\beta}{dz} &= p \left(-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] \left[\frac{du(z)}{dz} \cos \alpha - \frac{dv(z)}{dz} \sin \alpha \right] - \right. \\ &\quad \left. - z [u(z) \cos \alpha + (h - v(z)) \sin \alpha] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \int_{l/2}^z u(\xi) d\xi - \sin \alpha \int_{l/2}^z (h - v(\xi)) d\xi \right). \end{aligned}$$

A (4.2) egyenletrendszer harmadik egyenletét z szerint differenciálva és az így nyert egyenletben $\frac{d^2 u}{dz^2}$ és $\frac{d^2 v}{dz^2}$ értékét az első két egyenletből nyerhető kifejezésekkel helyettesítve, azt kapjuk, hogy :

$$C \frac{d^2 \beta}{dz^2} = \left(\frac{p}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - z^2 \right] \right)^2 \left(-\frac{B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha}{B_1 B_2} + \frac{B_1 - B_2}{B_1 B_2} \frac{\sin 2 \alpha}{2} \right).$$

Tehát ez esetben a β meghatározására a következő differenciálegyenlet adódik¹² :

$$\begin{aligned} (5.2) \quad \left(\frac{l}{2} \right)^2 \frac{d^2 \beta}{dz^2} + \gamma \left[1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2} \right)^2} \right]^2 \beta &= \delta \left[1 - \frac{z^2}{\left(\frac{l}{2} \right)^2} \right]^2 \\ \gamma &= \left(\frac{l}{2} \right)^6 \frac{p^2}{4 B_1 B_2 C} (B_1 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \\ \delta &= \left(\frac{l}{2} \right)^6 \frac{p^2}{4 B_1 B_2 C} (B_1 - B_2) \frac{\sin 2 \alpha}{2}. \end{aligned}$$

¹² Amennyiben az α szög azonosan zérus, a (6.2) egyenletből a Csonka P. idézett munkájában levezetett (8) jelű egyenletet kapjuk.

Bevezetve a $\zeta = \frac{z}{(l/2)}$ új változót, a következő közönséges, lineáris, változó együtthatós, másodrendű, inhomogén differenciálegyenletet nyerjük ;

$$(6.2) \quad \frac{d^2\beta}{d\zeta^2} + \gamma (1 - \zeta^2)^2 \beta = \delta (1 - \zeta^2)^2.$$

E differenciálegyenlet általános megoldása nyilván

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{\gamma} + A (1 + C_2 \zeta^2 + C_4 \zeta^4 + \dots) + B (\zeta + C_3 \zeta^3 + C_5 \zeta^5 + \dots)$$

alakú. Tekintettel a gerenda deformációjának szimmetrikus voltára, ez esetben $B = 0$, továbbá, minthogy a $z = \frac{l}{2}$ azaz $\zeta = 1$ helyen (a β szög definíciójából következőleg) $\beta = 0$, tehát :

$$A = -\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 + C_2 + C_4 + \dots}$$

és így :

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{\gamma} \left(1 - \frac{1 + C_2 \zeta^2 + C_4 \zeta^4 + \dots}{1 + C_2 + C_4 + \dots} \right)$$

A c_2, c_4, c_6, \dots együtthatók a homogén egyenletből, a »határozatlan együtthatók módszeré«-vel nyerhetők :

$$C_2 = -\frac{\gamma}{2!}$$

$$C_4 = \frac{4\gamma + \gamma^2}{4!}$$

$$C_6 = -\frac{24\gamma + 10\gamma^2 + \gamma^3}{6!}$$

$$C_8 = \frac{624\gamma^2 + 40\gamma^3 + \gamma^4}{8!}$$

.....

A megoldást szolgáltató hatványsor c_{2n} együtthatóinak bonyolultságára való tekintettel szorítkozzunk arra az esetre, amikor γ -nak egynél magasabb hatványai az elsőhöz képest elhanyagolhatók. Ily módon :

$$\beta(\zeta) = \frac{\delta}{30} (1 - \zeta^2) (11 - 4\zeta^2 + \zeta^4) = \frac{\delta}{30} (11 - 15\zeta^4 + 5\zeta^3 - \zeta^6).$$

A (4.2) egyenletrendszerből $-\beta$ fenti értékét behelyettesítve és kétszer integrálva — azt nyerjük, hogy :

$$u(\zeta) = \frac{1}{B_1} \eta \left[\psi(\zeta) \cos \alpha + \left(\frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4} \right) \sin \alpha + C_1 \zeta + C_2 \right]$$

$$v(\zeta) = \frac{1}{B_2} \eta \left[-\psi(\zeta) \sin \alpha + \left(\frac{\zeta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\zeta^4}{3 \cdot 4} \right) \cos \alpha + C_3 \zeta + C_4 \right],$$

ahol :

$$\eta = \frac{pl^4}{32},$$

továbbá :

$$\psi(\zeta) = \int_0^\zeta \left[\int_0^\zeta \zeta \beta(\zeta) d\zeta \right] d\zeta =$$

$$= \frac{\delta}{30} \left(\frac{11}{1 \cdot 2} \zeta^2 - \frac{26}{3 \cdot 4} \zeta^4 + \frac{20}{5 \cdot 6} \zeta^6 - \frac{6}{7 \cdot 8} \zeta^8 + \frac{1}{9 \cdot 10} \zeta^{10} \right).$$

Mint hogy $u(\zeta)$ és $v(\zeta)$ szükségképpen páros függvények, $C_1 = C_3 = 0$; továbbá, mivel a $\zeta = 1$ (azaz : $z = \pm \frac{l}{2}$ helyen $u = v = 0$, tehát :

$$C_2 = - \left[\psi(1) \cdot \cos \alpha + \frac{5}{12} \sin \alpha \right]$$

$$C_4 = - \left[-\psi(1) \cdot \sin \alpha + \frac{5}{12} \cos \alpha \right].$$

A $\psi(\xi)$ fenti kifejezéséből :

$$\psi(1) = \frac{\delta}{30} \cdot \frac{4919}{1260}.$$

Mivel a tartó csak akkor lehet egyensúlyban, ha a felfüggesztési pontokon átfektetett forgástengely körüli forgatónyomatékok összege az egész tartóra nullával egyenlő, tehát egyensúly esetén :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[pu \cos \alpha - p(v-h) \sin \alpha \right] dz = 0.$$

Az így nyert egyenletet h -ra megoldva nyerjük, hogy :

$$h = \frac{\sin \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} v(z) dz - \cos \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u(z) dz}{l \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\left(\frac{l}{2}\right) \sin \alpha \int_{-1}^{+1} v(\zeta) d\zeta - \left(\frac{l}{2}\right) \cos \alpha \int_{-1}^{+1} u(\zeta) d\zeta}{2 \left(\frac{l}{2}\right) \sin \alpha}.$$

Az integrálásokat elvégezve, a γ magasabbfokú hatványaira vonatkozó elhanyagolással, nyerjük, hogy :

$$h = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \frac{pl^4}{32} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[\frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^2 l^6}{64} \frac{B_2 \cos \alpha + B_1 \sin^2 \alpha}{4 B_1 B_2 C} \right]}{2 \sin \alpha}.$$

Ez az egyenlet magában foglalja mind a stabilis, mind pedig a labilis egyensúlyi állapot lehetőségét. Ha az egyenlet jobboldalán álló tört számlálóját és nevezőjét elosztjuk $\sin \alpha$ -val, nyerjük a stabilis egyensúlyi állapot fennállásának feltételét :

$$h = \cos \alpha \frac{pl^4}{64} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[\frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^2 l^6}{64} \frac{B_2 \cos \alpha + B_1 \sin^2 \alpha}{4 B_1 B_2 C} \right].$$

Amennyiben a felfüggesztési pontnak a szélső keresztmetszet súlypontja feletti h magasságának azon minimális értékét (h_{\min} -ot) keressük, amely mellett az adott méretű és terhelésű gerenda csak függőleges irányú lehajlást szenved, tehát $\alpha = 0$ és ebből következőleg valamennyi keresztmetszetre $\beta = 0$, akkor a fenti egyensúlyi egyenletbe α helyébe nullát írva nyerjük, hogy :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{64} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} \left[\frac{8}{15} + 0,16 \frac{p^2 l^6}{64} \frac{1}{4 B_1 C} \right].$$

Abban az esetben, ha a gerenda C csavarószilárdsága »végtelen nagy«-nak tekinthető, írhatjuk, hogy :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{120} \frac{B_2 - B_1}{B_1 B_2} = \frac{p^2 l^6}{120 B_1} \left(1 - \frac{B_1}{B_2} \right).$$

Végül, ha a gerenda méretei olyanok, hogy a $\frac{B_1}{B_2}$ érték az egységhez képest elhanyagolható, és egyszersmind a C csavarószilárdság értéke is végtelen nagyra tekinthető, a h_{\min} -ra a következő — elemi mechanikai számítással is nyerhető — egyszerű képletet nyerjük :

$$h_{\min} = \frac{pl^4}{120B_1}.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО БОКОВОГО ИЗГИБА БАЛКИ, ПОДВЕШЕННОЙ НА ДВУХ КОНЦАХ НАД ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ ЕЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В. Ловашш-Надь

Р е з ю м е

Автор исследует устойчивость балки, подвешенной на двух концах над центром тяжести ее поперечного сечения, относительно бокового изгиба в случае, когда точки подвеса попадают на одну из осей инерции краевого сечения балки, и принудительный эффект системы подвеса не тормозит поворот краевых сечений в своих плоскостях.

Автор исследует те случаи, когда :

а) Сосредоточенная сила вертикального направления приложена к балке в центре тяжести ее среднего поперечного сечения.

б) К балке приложена равномерно распределенная, сосредоточенная сила вертикального направления.

Выведенные результаты дают минимальное значение высоты точки подвеса от центра тяжести краевого поперечного сечения, необходимое для обеспечения устойчивости балки по отношению к боковому изгибу.

UNTERSUCHUNG DER STABILITÄT EINES AN DEN ZWEI ENDEN ÜBER DEM SCHWERPUNKT DES QUERSCHNITTS AUFGEHÄNGTEN BALKENS GEGENÜBER SEITWÄRTSAUSBIEGUNGEN

V. LOVASS-NAGY

Zusammenfassung

Es wird die Stabilität eines an den zwei Enden über dem Schwerpunkt des Querschnitts aufgehängten Balkens untersucht im Falle, wenn die Aufhängepunkte in eine Hauptträgheitsachse des Querschnitts des Balkens fallen, und die Verdrehung der Querschnitte in ihrer Ebene durch keine Zwangskräfte gehindert wird.

Es werden folgende Fälle behandelt :

a) Auf den Balken wirkt in der Mitte im Schwerpunkt des Querschnitts eine senkrechte konzentrierte Kraft.

b) Auf den Balken wirkt eine gleichmässig verteilte Kraft.

Die abgeleiteten Ergebnisse ergeben den minimalen Abstand der Aufhängepunkte vom Schwerpunkt, bei dem die Stabilität des Balkens gegenüber seitwertigen Ausbiegungen gesichert ist.

ELASZTIKUSAN KAPCSOLT KORPUSZKULÁRIS RENDSZEREK KIS REZGÉSEINEK VIZSGÁLATA MATRIXSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSÁVAL

RÓZSA PÁL

Összefoglalás

Szerző azt kívánja megmutatni, hogy korpuszku-láris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálatánál milyen lényeges előnyöket biztosít a formális és numerikus számítás igényeinek megfelelően kiépített matrixszámítás alkalmazása. Egy \mathbf{A} matrix analitikus függvényének az 1. §-ban ismertetett definíciója révén értelmezni tudjuk matrixokra az $e^{\mathbf{A}t} \sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$, stb. függvényeket, melyek állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerek revolvens matrixait képezik. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ esetén a formulák automatikusan szolgáltatják \mathbf{A} matrix kanonikus felbontását, amely szimmetrikus matrix esetén azonos kvadratikus alakoknak négyzetösszegbe való transzformálásával, illetve mechanikai problémák esetén normálkoordináták bevezetésével. A 2. §-ban váltakozó tömegű tömegpontokkal bíró korpuszku-láris húrmodell szabad és gerjesztett rezgéseit, a 3. §-ban pedig egy sűrűdés nélküli hengeren köralakban elhelyezett korpuszku-láris rendszer rezgéseit tárgyaljuk. Ez példa arra az általánosabb és bonyolultabb esetre, midőn a differenciálegyenletrendszert meghatározó matrixnak kétszeres sajátértékei vannak. A 4. §-ben ismertetjük korpuszku-láris rendszerek energiájának növekedését periodikusan ismétlődő, egyenlő nagyságú impulzusok hatására.

Bevezetés

Jelen referátum olyan korpuszku-láris rendszerek rezgéseinek vizsgálatát tartalmazza, melyeknek közös tulajdonsága, hogy az egyes tömegpontok egymással tömegtelen, rugalmas fonalakkal vannak összekötve, a fonalakban »nagy« feszítőerő működik, a tömegpontok pedig »kicsiny« kitérésű transzverzális rezgést végezhetnek*. Ilyen korpuszku-láris rendszerekkel már *Lagrange* foglalkozott, de azóta is többen folytattak kutatásokat mind a mechanikai, mind pedig az ezekkel analóg elektromos és atomfizikai jelenségek vizsgálata terén. [1—7]. Ebben a dolgozatban elsősorban azt kívánom megmutatni, hogy a problémák megoldása során milyen lényeges előnyöket biztosít a formális és numerikus számítás igényeinek megfelelően kiépített matrixszámítás alkalmazása. — Egy \mathbf{A} matrix analitikus függvényének az

* »Nagy« feszítőerő alatt azt értjük, hogy a fonalak megnyúlásából származó feszültségnövekmény az előfeszültséghez képest elhanyagolható; »kicsiny« kitérés alatt pedig azt értjük, hogy a kitérések négyzete és szorzata elhanyagolható az első hatványhoz képest, valamint a hajlásszög sinusa helyett annak tangense vehető.

1. §-ban ismertetett definíciója révén értelmezni tudjuk matrixokra az $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ stb. exponenciális, ill. trigonometrikus függvényeket. Ezek segítségével lehetővé válik az állandó együtthatójú lineáris *skalár*-differenciálegyenlet kezdeti értékektől függő megoldásának értelemszerű átírása állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszerre, mint matrixegyütthatókkal bíró *vektor*-differenciálegyenletre, u. i. ennek rezolvens matrixait képezik az $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ matrixfüggvények. $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ esetén a formulák automatikusan szolgáltatják \mathbf{A} matrix kanonikus felbontását, amely szimmetrikus matrix esetén azonos kvadratikus alakoknak négyzetösszegbe való transzformálásával, illetve mechanikai problémák esetén normálkoordináták bevezetésével. A 2. §-ban ismertetett váltakozó tömegpontokkal bíró rendszer saját rezgéseinek meghatározásával *Born* és *Kármán* foglalkoztak idézett munkájukban [3]. *Brillouin* [4] ezen túlmenően részletesen elemzi, hogy a gerjesztő frekvencia változtatásával hogyan változik a gerjesztett rezgések tovaterjedésének jellege. Meghatározza a gerjesztő frekvencia azon intervallumait, melyekben a rezgések periodikusan nem terjedhetnek. Eredményeit alkalmazza elektromos négyfógluslánc problémájára. Azt a körülményt, hogy gerjesztett rezgések esetén a korpuszkuális húrmodell a folytonostól merőben eltérő viselkedést mutat, már *Routh* megemlíti könyvében [2]. A matrixszámításnak e problémakörre való alkalmazása biztosítja, hogy a megoldásokhoz ne ötletszerűen, hanem szisztematikus tárgyalás során jussunk, s lehetővé teszi, hogy a problémák tág területén egységes módszert használjunk fel. Az 1. § eredményeinek segítségével tetszőleges kezdeti feltételek mellett explicit alakban nyerjük a rendszer mozgását meghatározó egyenleteket, a matrixok kanonikus felbontása révén közvetlenül adódnak a normálrezgések, végül az így kapott eredmények alapján minden nehézség nélkül és egységes módszerrel meghatározható változó gerjesztő-frekvencia mellett a gerjesztett rezgés periodikus megoldása. A 3. § egy súrlódás nélküli hengeren köralakban elhelyezett korpuszkuális rendszer rezgéseit tárgyalja, amely példa arra az általánosabb és bonyolultabb esetre, midőn a differenciálegyenletrendszert meghatározó matrixnak kétszeres sajátértékei vannak. A 4. § korpuszkuális rendszerek energianövekedésének meghatározásával foglalkozik periodikusan ismétlődő, egyenlő nagyságú impulzusok hatására. Hasonló vizsgálatok szerepelnek *Hostinsky* idézett dolgozataiban [5–6], eredményei azonban csupán egyenlő tömegpontokkal bíró korpuszkuális rendszerre vonatkoznak. E dolgozatban egyrészt eredményeinek általánosítása szerepel váltakozó tömegpontokból álló, valamint kör mentén elhelyezett korpuszkuális rendszerre, másrészt a kapott eredmények alkalmazása két, konkrét feltételekkel meghatározott feladat megoldására (l. 4. § A) és B): a) és b) feladat). Külön ki kell emelni, hogy a *Hostinsky* dolgozatában is szereplő $\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}\right)^2$ kifejezés a Fejér-féle mag [8].

1. §. Matematikai előkészítés.

Vezessük be a következő jelöléseket: legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy négyzetes matrix ($i = 1, 2, \dots, n$ a sorindexet, $j = 1, 2, \dots, n$ az oszlopindexet jelöli)

és $\mathbf{E} = [\delta_{ij}]$ az egységmatrix, akkor az \mathbf{A} matrixhoz tartozó karakterisztikus polinom $D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ lesz. Többszörös karakterisztikus gyökök esetén $\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\vartheta(\lambda)}$ jelölje a redukált karakterisztikus polinomot (vagy minimálpolinomot), ahol $\vartheta(\lambda)$ az \mathbf{A} matrix $(n - 1)$ -edrendű minorainak legnagyobb közös osztója. Az adjungált matrixot következőképpen definiáljuk: $\text{adj } \mathbf{A} = [\text{adj } a_{ij}] = [A_{ji}]$, ahol A_{ji} a matrixnak a_{ji} eleméhez tartozó előjeles minorát jelenti.

A továbbiakban csak olyan matrixok fordulnak elő, melyeknek a karakterisztikus polinomja, vagy legalább a minimálpolinomja csupa egyszeres gyökkel bír. Ez akkor következik be, ha $\text{adj}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ osztható a diszkriminánsal. Ilyen tulajdonsággal bírnak elsősorban a jelen dolgozatban előforduló szimmetrikus matrixok, valamint a Hermite-téle matrixok és egész általánosan az ú. n. normál matrixok.

Szükség lesz még a karakterisztikus, ill. a minimálpolinom gyökhelyein interpoláló Lagrange-féle alappolinomokra:

$$L_k(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{D'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad \text{ill.} \quad L_k(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}$$

ahol

$$D(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k) \quad \text{ill.} \quad D(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

$$\text{és} \quad \Delta(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)$$

$$\left(\sum_{k=1}^s \alpha_k = n \right).$$

Definiálni kívánjuk $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvényt olyan $f(\lambda)$ analitikus függvényre, melynek konvergenciaköre \mathbf{A} matrix sajátértékeit tartalmazza. (\mathbf{A} általános matrix egyszeres sajátértékekkel, vagy Hermite-féle, többszörös sajátértékekkel.) Interpoláljuk $f(\lambda)$ függvényt Lagrange-féle interpolációs polinommal a $D(\lambda)$ ill. $\Delta(\lambda)$ gyökhelyein, ekkor fennáll a következő összefüggés:

$$f(\lambda) - \sum_k f(\lambda_k) \cdot L_k(\lambda) = \begin{cases} D(\lambda) \cdot f^*(\lambda) \\ \Delta(\lambda) \cdot f^*(\lambda). \end{cases}$$

Mivel Cayley tétele értelmében minden matrix kielégíti a karakterisztikus egyenletét (többszörös sajátértékek esetén a redukált karakterisztikus egyenletét), vagyis $D(\mathbf{A})$ ill. $\Delta(\mathbf{A}) = 0$, továbbá a feltételezett konvergencia-

tulajdonság értelmében $f^*(\mathbf{A})$ matrix hatványsora konvergens, tehát λ helyére \mathbf{A} matrixot írva

$$(1) \quad f(\mathbf{A}) = \sum_k f(\lambda_k) \cdot L_k(\mathbf{A})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{ill. } k = 1, 2, \dots, s$$

Ily módon $f(\mathbf{A})$ matrixfüggvény hatványsorát polinomná redukáltuk.

Kimutatható, hogy az itt fellépő $L_k(\mathbf{A})$ matrixok rangszáma megegyezik λ_k karakterisztikus gyök multiplicitásával; legyen ez α , ekkor $L_k(\mathbf{A})$ felbontható egy α oszlopból álló n soros, és egy α sorból álló n oszlopos matrix szorzatára. Bebizonyítható, hogy ezen matrixok oszlopai, ill. sorai által jellemzett vektorok szimmetrikus matrix esetén ortonormált rendszert alkotnak, vagyis (elhagyva a k indexet):

$$(2) \quad L(\mathbf{A}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\alpha] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_\alpha^* \end{bmatrix}$$

ahol \mathbf{u}^* sorvektor az \mathbf{u}_i oszlopvektor transzponáltját jelenti és $\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ (általános matrix esetén az oszlop ill. sorvektorok reciprok vektorrendszert alkotnak) [9–10].

$L_k(\mathbf{A})$ matrixpolinomokat számítástechnikai okokból előnyös kifejezni az adjungált matrix segítségével:

$$(3) \quad L_k(\mathbf{A}) = -\frac{1}{A'(\lambda_k)} \left| \frac{adj(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})}{(D, D')} \right|_{\lambda=\lambda_k}$$

ahol (D, D') a karakterisztikus polinom diszkriminánsa.

2. §. Váltakozó tömegű tömegpontokkal bíró korpuszkuláris húrmodell szabad és gerjesztett rezgései

A) *Szabad rezgések.* Tekintsünk egy L hosszúságú tömeg nélküli homogén fonalat, amelyet $2n + 1$ egyenlő részre osztunk, és a belső osztópontokra felváltva m , ill. M nagyságú tömegpontokat erősítünk. A fonal két végét úgy rögzítjük, hogy abban F feszítőerő ébredjen. Vizsgáljuk a tömegpontok transzverzális rezgéseit.

A j -ik tömegpontnak kicsiny transzverzális kitérése legyen y_j . Feltesszük, hogy a rendszer a rezgések folyamán állandóan egy rögzített síkban marad.

Az egyes tömegpontokra felírva a mozgásegyenleteket, a következő állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszert nyerjük :

$$m\ddot{y}_1 + \frac{F(2n+1)}{L} (2y_1 - y_2) = 0$$

$$m\ddot{y}_{2k-1} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2k-2} + 2y_{2k-1} - y_{2k}) = 0$$

$$M\ddot{y}_{2k} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2k-1} + 2y_{2k} - y_{2k+1}) = 0$$

$$M\ddot{y}_{2n} + \frac{F(2n+1)}{L} (-y_{2n-1} + 2y_{2n}) = 0.$$

Bevezetve

$$(4) \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & & \\ & & m & \\ & & & \ddots \\ & & & & M \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

jelöléseket, differenciálegyenletrendszerünket egyetlen vektoregyenletbe foglalhatjuk :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{A}\mathbf{y} = 0.$$

Szorozzuk meg egyenletünket balról $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ -nel és vegyük tekintetbe, hogy $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}$, akkor

$$\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \ddot{\mathbf{y}} = \frac{F(2n+1)}{L} (\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}) (\mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}) = 0.$$

Vezessük be az

$$(5) \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{m} y_1 \\ \sqrt{M} y_2 \\ \sqrt{m} y_3 \\ \vdots \\ \sqrt{M} y_{2n} \end{bmatrix}$$

és

$$(6) \quad \mathbf{V} = \frac{F(2n+1)}{L} \left(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \begin{bmatrix} 2\alpha & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \frac{2}{\alpha} & -1 & & \\ 0 & -1 & 2\alpha & & \\ & & & & -1 \\ & & & & \frac{2}{\sigma} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, ahol $\frac{1}{T^2} = \frac{F}{\sqrt{Mm}(2n+1)L}$ és $\alpha = \sqrt{\frac{M}{m}}$.

Ezáltal vektordifferenciálegyenletünk az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$(7) \quad \ddot{\eta} + \mathbf{V}\eta = 0$$

ahol \mathbf{V} szimmetrikus matrix. Ez a transzformáció azért előnyös, mert az eredeti \mathbf{y} vektorra felírt differenciálegyenlet matrixa: $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ nem szimmetrikus.

(7) megoldása $\eta(0) = \eta_0$ és $\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0$ kezdeti feltételek mellett:

$$(8) \quad \eta = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) \cdot \eta_0 + \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dot{\eta}_0.$$

\mathbf{V} matrix fenti függvényeinek meghatározásához (1) alapján először a karakterisztikus egyenlet gyökeit, majd ezen gyökhelyeken interpoláló matrixpolinomokat kell kiszámítani. A számításainkhoz szükséges $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{E}$ matrix felbontható olyan három matrix szorzatára, melyek közül az első és a harmadik egymással megegyező diagonálmatrix (0-tól különböző elemeket csak a főátlóban tartalmaz), a középső pedig $\mathbf{V} - \lambda\mathbf{E}$ matrixhoz hasonló szerkezetű, de főátlójában lévő elemei egyenlők. A tényezőkre bontásnak az az előnye, hogy az így keletkező középső tényező determinánsa a legegyszerűbb szerkezetű kontinuuáns, melynek explicit kifejtése közismert. (Számítástechnikai előnyök

biztosítása végett λ helyett a továbbiakban $\frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda$ fog szerepelni.)

$$(9) \quad \mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \mathbf{E} = \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}$$

ahol

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\frac{2\alpha - \lambda}{\frac{2}{\alpha} - \lambda}} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{\alpha} - \lambda}{2\alpha - \lambda}} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \sqrt[4]{\frac{\frac{2}{\alpha} - \lambda}{2\alpha - \lambda}} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{W} = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \times \begin{bmatrix} \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda \right)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda \right)} & -1 & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda \right)} \end{bmatrix}$$

$$(10) \quad \sqrt{(2\alpha - \lambda) \left(\frac{2}{\alpha} - \lambda \right)} = 2 \cos \Theta$$

transzformációval a karakterisztikus egyenlet :

$$D_{2n}(\lambda) = \det \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \mathbf{E} \right) = \det \mathbf{Q} \cdot \det \mathbf{W}(\Theta) \cdot \det \mathbf{Q} = \det \mathbf{W}(\Theta)$$

(mivel $\det \mathbf{Q} = 1$).

Teljes indukció segítségével meggyőződhetünk a következő összefüggés helyességéről :

$$(11) \quad \det \mathbf{W}(\Theta) = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \cdot \frac{\sin(2n+1)\Theta}{\sin \Theta}.$$

$D_{2n}(\lambda) = \det \mathbf{W}(\Theta) = 0$ egyenlet megoldása (11) felhasználásával $\Theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), végül (10)-ből

$$\lambda_{+k} = 2q + 2 \sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} =$$

$$= \left(\sqrt{q + \sin \frac{k\pi}{2n+1}} + \sqrt{q - \sin \frac{k\pi}{2n+1}} \right)^2$$

és

$$(12) \quad \lambda_{-k} = 2q - 2 \sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} =$$

$$= \left(\sqrt{q + \sin \frac{k\pi}{2n+1}} - \sqrt{q - \sin \frac{k\pi}{2n+1}} \right)^2$$

ahol q a kétféle tömeg aritmetikai és geometriai közepének hányadosát jelenti:

$$q = \frac{\frac{M+m}{2}}{\sqrt{Mm}}.$$

Teljesség kedvéért meg kell jegyezni, hogy amennyiben a korpuszkuláris rendszer nem páros, hanem páratlan rezgő tömegpontból áll, tehát az előbbi esettel szemben nem $2n$, hanem csak $2n-1$ egyenletből álló differenciál-egyenletrendszert kapunk, akkor a karakterisztikus egyenlet a következő alakot ölti:

$$(13) \quad (2z - \lambda) \frac{\sin 2n\Theta}{\sin \Theta} = 0$$

innen

$$\Theta_k = \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

(10) alapján $2n-2$ darab sajátérték számítható, a 0 indexű sajátérték (13)-ból: $\lambda_0 = 2\alpha$.

A karakterisztikus egyenlet gyökhelyein interpoláló matrixpolinom

kiszámításához (3) alapján szükségünk van $\text{adj} \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_k \mathbf{E} \right)$ kifejezésére. (9) összefüggés alapján

$$\text{adj} \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_{+k} \mathbf{E} \right) = [\text{adj } \mathbf{Q} \cdot \text{adj } \mathbf{W} \cdot \text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda=\lambda_{+k}}$$

(10) helyettesítés felhasználásával

$$[\text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda=\lambda_{+k}} =$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}{\cos \Theta_k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\cos \Theta_k}{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}} \\ & & \sqrt{\frac{\cos \Theta_k}{\sqrt{q^2-1} - \sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta_k}}} \end{bmatrix}$$

továbbá

$$\text{adj } \mathbf{W} = [W_{ji}] = \begin{cases} \frac{\sin j \Theta}{\sin \Theta} \cdot \frac{\sin (n-i) \Theta}{\sin \Theta} & \text{ha } j \leq i \\ \frac{\sin i \Theta}{\sin \Theta} \cdot \frac{\sin (n-j) \Theta}{\sin \Theta} & \text{ha } j \geq i \end{cases}$$

$$[\text{adj } \mathbf{W}]_{\lambda=\lambda_{+k}} = \begin{bmatrix} \sin \frac{ik\pi}{2n+1} \cdot \sin \frac{jk\pi}{2n+1} \\ (-1)^{k+1} \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \end{bmatrix}$$

A (3)-ban szereplő $\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})}$ konstans faktor, mely a normálást szolgálja, a következő :

$$\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})} = (-1)^k \cdot \frac{2}{2n+1} \frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

A keresett matrixpolinom tehát

$$\begin{aligned}
 L_{+k}(\mathbf{V}) &= -\frac{1}{D'_{2n}(\lambda_{+k})} \text{adj} \left(\mathbf{V} - \frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda_{+k} \mathbf{E} \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \sqrt{\frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{-\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} [\text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda_{+k}} \cdot \\
 &\quad \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix} \left[\sin \frac{k\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right] \cdot [\text{adj } \mathbf{Q}]_{\lambda_{+k}} \cdot \\
 &\quad \cdot \sqrt{\frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{-\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \begin{bmatrix} \Omega^+ & & & \\ & \Omega^- & & \\ & & \Omega^+ & \\ & & & \ddots \\ & & & & \Omega^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\sin \frac{k\pi}{2n+1}, \dots, \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right] \begin{bmatrix} \Omega^+ & & & \\ & \Omega^- & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Omega^- \end{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{2n+1}}
 \end{aligned}$$

ahol

$$(14) \quad \Omega^+ = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}} \quad \text{és} \quad \Omega^- = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}}}$$

λ_{-k} helyettesítésével hasonló eredményre jutunk, csupán Ω^+ és Ω^- szerepe cserélődik meg. $L_{+k}(\mathbf{V})$ és $L_{-k}(\mathbf{V})$ fenti kifejezéseivel egy-egy normálrezgés

$$(15) \quad \begin{aligned} \eta_{+k}(t; \eta_0 \dot{\eta}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right) \cdot L_{+k}(\mathbf{V}) \eta_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}}} L_{+k}(\mathbf{V}) \cdot \dot{\eta}_0 \\ \eta_{-k}(t; \eta_0 \dot{\eta}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right) \cdot L_{-k}(\mathbf{V}) \eta_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}}} L_{-k}(\mathbf{V}) \cdot \dot{\eta}_0. \end{aligned}$$

Az egyes tömegpontok kitérését \mathbf{y} vektor komponensei szolgáltatják, melyet (5) alapján $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\eta}$ transzformációval számíthatunk. Szorozzuk meg tehát (15) egyenleteket balról $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ -nel és vegyük tekintetbe, hogy $\eta_0 = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \eta_0$ (és ugyanígy $\dot{\eta}_0$), ekkor nyerjük:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{+k}(t; \mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{y}}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right) \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{y}_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{+k}}} \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \dot{\mathbf{y}}_0 \\ \mathbf{y}_{-k}(t; \mathbf{y}_0 \dot{\mathbf{y}}_0) &= \cos\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right) \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \mathbf{y}_0 + \\ &+ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}} t\right)}{\frac{2n+1}{T} \sqrt{\lambda_{-k}}} \left[\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \right] \dot{\mathbf{y}}_0 \end{aligned}$$

(λ_{+k} és λ_{-k} értékét (12) adja).

Az itt szereplő matrixok

$$\mathbf{M}^{-2} L_{+k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \Omega^{+} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^{-} \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^{-} \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left[\sqrt{m} \Omega^{+} \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \sqrt{M} \Omega^{-} \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \dots, \sqrt{M} \Omega^{-} \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right]$$

és

$$\mathbf{M}^{-2} L_{-k}(\mathbf{V}) \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \Omega^{-} \sin \frac{k\pi}{2n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^{+} \sin \frac{2k\pi}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \Omega^{+} \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \left[\sqrt{m} \Omega^{-} \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \sqrt{M} \Omega^{+} \sin \frac{2k\pi}{2n+1}, \dots, \sqrt{M} \Omega^{+} \sin \frac{2nk\pi}{2n+1} \right].$$

A teljes megoldás pedig

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{y}_{+k} + \mathbf{y}_{-k}).$$

Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy páratlan számú rezgő tömegpont esetén a számítások teljesen analóg eredményre vezetnek, de a kész formulák csak $2n - 2$ normálrezgést szolgáltatnak. A 0 indexű normálrezgés, amely $\lambda_0 = 2\alpha$ sajátértékhez tartozik, — a részletes számítások mellőzésével —

$$\eta_0 = \frac{2}{2n} \cos\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}] \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{0,2n-1} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{2}{2n} \frac{\sin\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right)}{\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix} [1 \ 0 \ -1 \ \dots \ (-1)^{n-1}] \begin{bmatrix} \dot{y}_{01} \\ \dot{y}_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{y}_{0,2n-1} \end{bmatrix}$$

vagyis

$$y_0 = \left| \cos\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right) \frac{y_{01} - y_{03} + \dots + (-1)^{n-1} y_{0,2n-1}}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} t\right)}{\frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha}} \frac{\dot{y}_{01} - \dot{y}_{03} + \dots + (-1)^{n-1} \dot{y}_{0,2n-1}}{n} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

B) Gerjesztett rezgések. Tekintsük az *A)* alatt tárgyalt korpuszkuláris rendszert és vizsgáljuk azt az esetet, midőn a fonal egyik — pl. a baloldali — végpontjára $g \sin \omega t$ transzverzális rezgést kényszerítünk. Felírva a mozgásegyenleteket az egyes tömegpontokra, az első kivételével ugyanazokat az egyenleteket nyerjük, mint szabad rezgések esetében. Az első tömegpontra egyenletünk a következő alakot kapja :

$$m\ddot{y}_1 + \frac{F(2n+1)}{L}(-g \sin \omega t + 2y_1 - y_2) = 0.$$

Felhasználva (4) jelöléseket, differenciálegyenletrendszerünket egyetlen vektoregyenletbe foglalhatjuk :

$$M\ddot{\mathbf{y}} + \frac{F(2n+1)}{L}\mathbf{A}\mathbf{y} = \frac{F(2n+1)}{L}\mathbf{g} \sin \omega t$$

$$\text{ahol } \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

A már ismerttetett átalakítás után (5) és (6) felhasználásával

$$(16) \quad \ddot{\eta} + \mathbf{V}\eta = \mathbf{G}\gamma \sin \omega t$$

ahol

$$\mathbf{G} = \frac{F(2n+1)}{L} \mathbf{M}^{-1} = \frac{(2n+1)^2}{T^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

és

$$\gamma = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}.$$

Ezen inhomogén lineáris vektordifferenciálegyenlet egy partikuláris megoldását a következő alakban keressük:

$$(17) \quad \eta = \Gamma \sin \omega t.$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe, Γ -ra a következő összefüggést nyerjük:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})\Gamma = \mathbf{G}\gamma.$$

Tegyük fel, hogy ω^2 nem egyenlő \mathbf{V} matrix sajátértékével — vagyis a rezonancia esetét kizárjuk — ekkor létezik $(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1}$, tehát

$$(18) \quad \Gamma = (\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1} \mathbf{G}\gamma.$$

(9) összefüggés alapján $\left(\frac{(2n+1)^2}{T^2} \lambda \text{ helyett } \omega^2\text{-et írva}\right)$:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}$$

tehát a megoldás:

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}\gamma \sin \omega t = \mathbf{jg} \sin \omega t$$

Az így nyert eredmény részletes elemzése a mellékelt táblázatban látható.

A táblázatból kitűnik, hogy bizonyos gerjesztő frekvenciáknál a rezgésekben minőségi változás következik be. Ezek a határfrekvenciák: ω_1, ω_2 és ω_3 , melyek között a következő egyszerű összefüggés áll fenn: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_3^2$.

Láthatjuk, hogy ha $0 < \omega < \omega_1$

$$\text{és } \omega_2 < \omega < \omega_3$$

a tömegpontok rezgéseinek amplitúdói periodikus eloszlást mutatnak, míg abban az esetben, amikor

$$\omega_1 < \omega < \omega_2$$

és

$$\omega_3 < \omega,$$

az amplitúdók eloszlását hiperbolikus függvények határozzák meg.

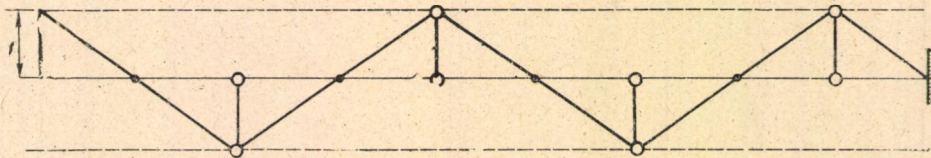
Ha végtelen hosszú, illetve gyakorlatilag végtelen hosszúnak tekinthető húrt tételezünk fel, vagyis $n \gg 1$, és olyan gerjesztő frekvenciákat vizsgálunk, amelyek a II. ill. IV. intervallum belsejébe esnek, akkor a rezgő tömegpontok amplitúdói a húr mentén exponenciálisan csökkennek. Nevezzük a továbbiakban (ω_1, ω_2) intervallumot az exponenciálisan csökkenő amplitúdók »alsó frekvenciasáv«-jának, (ω_3, ∞) intervallumot pedig »felső frekvenciasáv«-nak. Változtassuk most a korpuszskulumból tömegét úgy, hogy mind a nagy, mind a kis tömegpont tömege a kettő harmonikus közepéhez, vagyis μ -höz konvergáljon, így egyenlő tömegpontokból álló korpuszskuláris rendszerhez jutunk.

Ekkor az alsó frekvenciasáv eltűnik, ω_1 és ω_2 is $\omega_0 = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{\mu}}$ határfrekvenciához tart, ω_3 pedig változatlan marad. Ez az eset az irodalomban Routh-féle jelenség néven ismeretes, tehát az általunk vizsgált jelenség ennek általánosításaként fogható fel. Ha M tömeget állandónak tartjuk, m -et pedig csökkentjük, akkor a felső frekvenciasáv tűnik el, az alsó frekvenciasáv pedig oly módon válik végtelenné, hogy ω_1 helyben marad és ω_2 végtelenhez tart.

Tanulságos megnézni, milyen rezgésképet kapunk azon határfrekvenciák esetén, melyek elválasztják egymástól a periodikus eloszlást mutató és az exponenciálisan csökkenő amplitúdók frekvenciasávját.

$\omega = \omega_1$ esetén

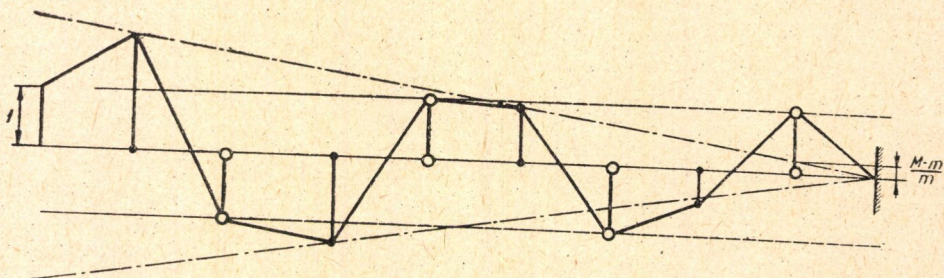
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



1. ábra

$\omega = \omega_2$ esetén

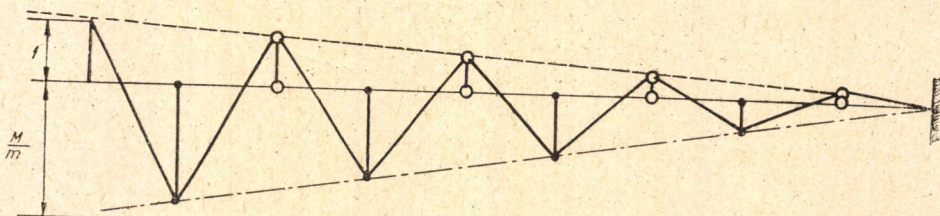
$$y = \begin{bmatrix} 2n \frac{M-m}{m} \\ -1 \\ -(2n-2) \frac{M-m}{m} \\ +1 \\ \vdots \\ (-1)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



2. ábra

$\omega = \omega_3$ esetén

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{M}{m} \frac{2n}{2n+1} \\ \frac{2n-1}{2n+1} \\ -\frac{M}{m} \frac{2n-2}{2n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



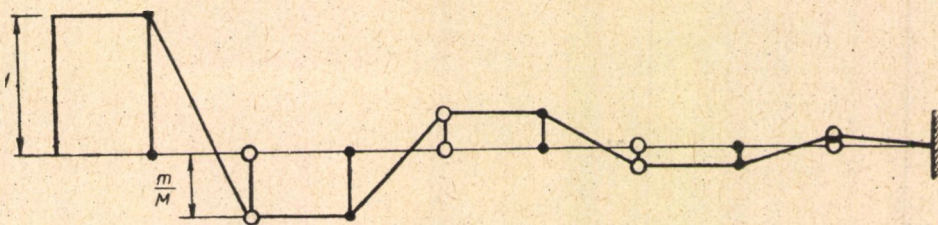
3. ábra

Érdemes külön foglalkozni az $\omega = \omega_0$ frekvenciával, amelyhez igen érdekes rezgéskép tartozik. Ha feltesszük, hogy $n \gg 1$, akkor

$$\frac{\operatorname{sh}(2n+2-2k)\Theta}{\operatorname{ch}(2n+1)\Theta} \approx e^{-(2k-1)\Theta} \quad \text{és} \quad \frac{\operatorname{ch}(2n+1-2k)\Theta}{\operatorname{ch}(2n+1)\Theta} \approx e^{-2k\Theta}.$$

és mivel $\Theta = \operatorname{arch} q$, tehát

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{m}{M} \\ -\frac{m}{M} \\ +\left(\frac{m}{M}\right)^2 \\ \vdots \\ (-1)^n \left(\frac{m}{M}\right)^n \end{bmatrix} g \sin \omega t$$



4. ábra

Eddigi vizsgálatainknál arra az esetre szorítkoztunk, midőn párosszámú tömegpont végzett rezgést. Hasonló számításokkal az előbbivel analóg eredményre jutunk páratlan számú rezgő tömegpont esetén is, tehát megtaláljuk a kétféle rezgésképet, melyek felváltva követik egymást a gerjesztő frekvencia monoton változtatása mellett. Mégis ki kell térni annak az esetnek vizsgálatára, midőn

$$\omega = \omega_2 = \frac{2n}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} = \frac{2n}{T} \sqrt{2\alpha} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2n F}{L} \cdot \frac{1}{m}}$$

Ez esetben ugyanis a gerjesztő frekvencia megegyezik a rendszer egy saját frekvenciájával, tehát rezonanciajelenség lép fel; $\det(\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) = 0$, az eddig követett megoldási módszer nem alkalmazható. (16) egy partikuláris megoldását most

$$\eta = \mathbf{a} \sin \omega_2 t + \mathbf{b} t \cos \omega_2 t$$

alakban keressük. Kétszer deriválva és visszahelyettesítve az egyenletbe, \mathbf{a} -ra és \mathbf{b} -re a következő egyenleteket kapjuk:

$$(19) \quad (\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) \mathbf{b} = 0$$

$$(20) \quad (\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}) \mathbf{a} - 2\omega_2 \mathbf{b} = \mathbf{G}\gamma.$$

(19)-ből következik, hogy \mathbf{b} vektor a \mathbf{V} matrixnak ω_2^2 sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Mivel $\mathbf{V} - \omega_2^2 \mathbf{E}$ matrix rangja $2n - 2$, több lineárisan független megoldási vektor nincs.

$$\mathbf{b} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -(-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

b értékét (20)-ból oly módon határozzuk meg, hogy a (20) inhomogén lineáris egyenletrendszer ellentmondásmentes legyen; ez bekövetkezik akkor, ha

$$b = -\frac{1}{4n} \gamma_1 \omega_2, \quad \text{ahol} \quad \gamma_1 = \sqrt{m} g.$$

\mathbf{a} vektort a (20) inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} z + \frac{n-1}{n} \cdot n \cdot 2\sqrt{q^2-1} \\ -\frac{n-1}{n} \\ -z - \frac{n-2}{n} (n-1) \cdot 2\sqrt{q^2-1} \\ + \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ -(-1)^{n-1} \cdot z \end{bmatrix} \gamma_1 \alpha.$$

A megoldás tehát $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\eta}$ segítségével

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z + \frac{n-1}{n} \cdot n \frac{M-m}{m} \\ -\frac{n-1}{n} \\ -z - \frac{n-2}{n} (n-1) \frac{M-m}{m} + \frac{n-2}{n} \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \\ -(-1)^{n-1} z \end{bmatrix} g \sin \omega_2 t - \begin{bmatrix} \frac{1}{4n} \\ 0 \\ -\frac{1}{4n} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{n-1}}{4n} \end{bmatrix} g \omega_2 t \cos \omega_2 t.$$

Ez az eredmény mutatja azt, hogy a partikuláris megoldásoknak egy paramétértől — z -től — függő végtelen sokasága létezik, melyek mindegyikének megfelelő rezgés a fent leírt típusba tartozik.

3. §. Kör mentén ekvidisztánsan elosztott és elasztikusan kapcsolt tömegpontrendszer szabad és kényszerített rezgései

A) Szabad rezgések. Tekintsünk egy tömegtelen, elasztikus fonálra egyenletes közökben felfűzött, összesen M tömegű n darab tömegpontot és ezt a korpuszkuláris rendszert helyezzük egy r sugarú, súrlódás nélküli körhengerre, melyen az transzverzális rezgéseket végezhet. Az egyes tömegpontokra vonatkozó mozgásegyenleteket egyetlen vektor-differenciál-egyenletként írjuk fel:

$$(21) \quad \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{Z}\mathbf{y} = 0.$$

Mivel egyik tömegpont sincs rögzítve és $y_k = y_{n+k}$, \mathbf{Z} ciklikus matrix:

$$\mathbf{Z} = \frac{n^2}{T^{*2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ahol

$$(22) \quad \frac{1}{T^{*2}} = \frac{F}{M \cdot 2r\pi}$$

és F a fonálban működő feszítőerő.

$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ és $\dot{\mathbf{y}}(0) = \dot{\mathbf{y}}_0$ kezdeti feltételek mellett (21) megoldását ugyanúgy nyerjük, mint (7) egyenletét. Először tehát meg kell határoznunk \mathbf{Z} matrix saját értékeit. $2 - \lambda = 2 \cos \Theta$ transzformációval

$$\det \left[\mathbf{Z} - \frac{n^2}{T^{*2}} \lambda \mathbf{E} \right] = D_n(\Theta) = 2 \cos n\Theta - 2 = 0$$

innen

$$\Theta_k = \frac{2k\pi}{n}$$

és

$$\lambda_k = \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \right)^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Legyen $n = 2l - 1$. A karakterisztikus egyenletnek $l - 1$ gyöke kétszeres gyök, tehát $L_k(\mathbf{Z})_{(k=1, 2, \dots, l-1)}$ rangja 2, vagyis előállítható egy kétszlopos és egy kétsoros matrix szorzataként.

(3) és (2) összefüggések felhasználásával — mellőzve a részletes számításokat —

$$L_k(\mathbf{Z}) = - \frac{1}{\Delta'_n(\lambda_k)} \left[\frac{\text{adj} \left(\mathbf{Z} - \frac{n^2}{T^{*2}} \lambda \mathbf{E} \right)}{(D, D')} \right]_{\lambda=\lambda_k} = \left[\frac{2}{n} \cos \frac{j-i}{n} 2k\pi \right]_{\substack{i=1, 2, \dots, n \\ j=1, 2, \dots, n}} =$$

$$= [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix}$$

ahol

$$(23) \quad u_{ik} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos(i-1) \frac{2k\pi}{n}$$

$$v_{ik} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin(i-1) \frac{2k\pi}{n}$$

$$i = 1, 2, \dots, 2l-1$$

$$k = 1, 2, \dots, l-1$$

$k = 0$ esetén a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke van: $\lambda_0 = 0$, ezzel

$$L_0(\mathbf{Z}) = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \quad \text{ahol} \quad u_{i0} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ezek alapján (21) megoldása

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \mathbf{y}_0 + \sum_{k=1}^{l-1} \cos \left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t \right) [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 +$$

$$+ \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* \dot{\mathbf{y}}_0 t + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin \left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t \right)}{\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0.$$

Párosszámú tömegpont esetén, vagyis ha $n = 2l$, fenti eredményünkhöz

még egy normálrezgés járul. Ebben az esetben $\lambda_l = 4$, a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke, a hozzátartozó normálrezgés pedig :

$$(24) \quad \mathbf{y}_l(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = \cos\left(\frac{2n}{T^*}t\right) \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^* \mathbf{y}_0 + \frac{\sin\left(\frac{2n}{T^*}t\right)}{\frac{2n}{T^*}} \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^* \dot{\mathbf{y}}_0$$

ahol

$$(25) \quad u_{il} = \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{n}}$$

(24) és (25) behelyettesítésével a megoldás $n = 2l$ esetén :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0) = & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{0i} + t \dot{y}_{0i}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{l-1} \cos\left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t\right) [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 + \\ & + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin\left(\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n} t\right)}{\frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_0 + \frac{1}{n} \left\{ (y_{01} - y_{02} + \dots - y_{0n}) \cos \frac{2n}{T^*} t + \right. \\ & \left. + (\dot{y}_{01} - \dot{y}_{02} + \dots - \dot{y}_{0n}) \frac{\sin \frac{2n}{T^*} t}{\frac{2n}{T^*}} \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

B) Gerjesztett rezgések: Tekintsük azt az esetet, midőn az n -edik tömegpontra $g \sin \omega t$ transzverzális rezgést kényszerítünk. Tekintettel arra, hogy jelen esetben $y_0 = y_n$, az $n - 1$ tömegpontra felírt mozgásegyenleteinket az alábbi vektor-differenciálegyenletbe foglalhatjuk :

$$\ddot{\mathbf{y}} + \frac{n^2}{T^{*2}} \mathbf{A} \mathbf{y} = \frac{n^2}{T^{*2}} \mathbf{g} \sin \omega t$$

ahol \mathbf{A} matrixot (4), T^* kifejezését (22) szolgáltatja, valamint

A megoldást (17) és (18) alapján

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{A} - \frac{T^{*2} \omega^2}{n^2} \mathbf{E} \right)^{-1} \mathbf{g} \sin \omega t$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}.$$

kifejezés szolgáltatja.

A gerjesztő frekvencia változtatásával fellépő eseteket a következő oldalon levő táblázat szemlélteti.

A gerjesztő frekvencia
változási intervalluma : $\omega < \frac{2n}{T^*}, \quad \omega = \frac{2n}{T^*}, \quad \omega > \frac{2n}{T^*}.$

Transzformáció ω -ra : $2 - \frac{T^{*2}\omega^2}{n^2} = 2 \cos \Theta,$

$$2 - \frac{T^{*2}\omega^2}{n^2} = 2 \cos i\Theta$$

Θ paraméter változási
intervalluma : $0 < \Theta < \pi,$

$$0 < \Theta$$

$$y_k = (-1)^k g \sin \omega t$$

$$y_k = (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{ch} \frac{n}{2} \Theta} g \sin \omega t \quad \text{ha } n \text{ páros}$$

A megoldási vektor
komponensei : $y_k = \frac{\cos \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\cos \frac{n}{2} \Theta} g \sin \omega t$

$$y_k = (-1)^k \left(1 - \frac{2k}{n} \right) g \sin \omega t \quad y_k = (-1)^k \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{sh} \frac{n}{2} \Theta} g \sin \omega t \quad \text{ha } n \text{ páratlan}$$

A gerjesztett rezgés
tovaterjedésének
karaktere :

periodikus

lineáris

exponenciálisan csökkenő

Ha $n \gg 1$, akkor mivel

$$\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{ch} \frac{n}{2} \Theta} = \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{n}{2} - k \right) \Theta}{\operatorname{sh} \frac{n}{2} \Theta} \approx e^{-k\Theta}$$

$\omega = \frac{2n}{T^*}$ gerjesztő frekvencia esetén a k -adik tömegpont mozgását

$$y_k = (-1)^k e^{-k\Theta} g \sin \omega t$$

kifejezés adja.

Említésre méltó, hogy mind a tárgyalás menete, mind pedig a nyert eredmények tökéletesen megegyeznek azon feladatával, ahol egy, a 2. pontban tárgyalt korpuszkuális rendszerhez hasonló, de egyenlő tömegpontokból álló rendszert veszünk és annak mindkét végére egyidejűleg $g \sin \omega t$ rezgést kényszerítünk.

4. §. Korpuszkuális rendszerek energiájának növekedése periodikusan ismétlődő egyenlő nagyságú impulzusok hatására.

A) Váltakozó tömegpontokból álló rendszer

Tekintsünk egy — a 2. §-ban tárgyalt — váltakozó tömegpontokból álló korpuszkuális rendszert. A rendszer mozgását meghatározó vektordifferenciálegyenletet (7), a kezdeti értékektől függő megoldást (8) szolgáltatja. (7)-ből kiolvasható a kinetikus és a potenciális energia kifejezése; jelöljük \mathcal{T} -vel az előbbit, \mathcal{U} -vel az utóbbit, akkor

$$2 \mathcal{T} = \dot{\eta}^* \dot{\eta} \quad \text{és} \quad 2 \mathcal{U} = \eta^* V \eta$$

Feladatunk a következő: $t = t_1$ időpontig legyen a rendszer nyugalomban, t_1 időpontban minden egyes tömegpontnak adjunk tetszőleges — nem szükségképpen egyenlő — $P_i^{(1)}$ kezdősebességet. A tömegpontok mozgását $t > t_1$ időpontban

$$\eta(t_1) = 0$$

és

$$\dot{\eta}(t_1) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{H}^{(1)}$$

kezdeti feltételek mellett (15) alapján

$$\eta_1[t; \eta(t_1), \dot{\eta}(t_1)] = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sin \nu_{\pm k} (t - t_1)}{\nu_{\pm k}} [\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] + \frac{\sin \nu_{\pm k} (t - t_1)}{\nu_{\pm k}} [\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] \right\} \mathbf{H}^{(1)}$$

szolgáltatja, ahol

$$\nu_{\pm k} = \frac{2n+1}{T} \nu_{\pm k}$$

és

$$[\mathbf{u}_{\pm k} \mathbf{u}_{\pm k}^*] = L_{\pm k}(\mathbf{V}).$$

Ha további $t_2, t_3 \dots t_p$ időpontokban újabb $\mathbf{P}^{(2)}, \mathbf{P}^{(3)} \dots \mathbf{P}^{(p)}$ impulzussorozatot adunk a tömegpontoknak, $t > t_p$ időpontban a rendszer mozgását az egyes $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_p$ megoldások szuperpozíciójaként nyerjük:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \left\{ \frac{\sin \nu_{+k}(t-t_j)}{\nu_{+k}} [\mathbf{u}_{+k} \mathbf{u}_{+k}^*] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \nu_{-k}(t-t_j)}{\nu_{-k}} [\mathbf{u}_{-k} \mathbf{u}_{-k}^*] \right\} \Pi(j).$$

Határozzuk meg a rendszer összes energiáját abban az esetben, ha

a) $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként periodikusan ismételve $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)} = \dots = \mathbf{P}$ nagyságú, összesen $2p$ impulzust közlünk a tömegpontrendszerrel;

b) ugyancsak $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként egyenlő, összesen $2p$ impulzust közlünk, de mindig csak egyetlen tömegponttal, mégpedig t_1 időpontban az elsővel, t_2 időpontban a másodikkal és így tovább; vagyis

$$P_{ij}^{(j)} = P \cdot \delta_{ij} \quad \text{és} \quad 2p \leq 2n.$$

Vizsgáljuk először az a) esetet.

Felhasználva a matrixok szorzásának asszociativitását,

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \frac{\sin \nu_{+k}(t-t_j)}{\nu_{+k}} \mathbf{u}_{+k} + \right. \\ \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \frac{\sin \nu_{-k}(t-t_j)}{\nu_{-k}} \mathbf{u}_{-k} \right\} \\ \dot{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k}(t-t_j) \mathbf{u}_{+k} + \right. \\ \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi) \sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{-k}(t-t_j) \mathbf{u}_{-k} \right\}.$$

A rendszer kinetikus energiája (mivel $\mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$):

$$2\mathcal{E} = \dot{\eta}^* \dot{\eta} = \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 \right\}.$$

A rendszer potenciális energiája — felhasználva

$$\mathbf{V} = [\mathbf{u}_{-n} \dots \mathbf{u}_{-1} \mathbf{u}_{+1} \dots \mathbf{u}_{+n}] \begin{bmatrix} \nu_{-n}^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \nu_{-1}^2 & & \\ & & & \nu_{+1}^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \nu_{+n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{-n}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{-1}^* \\ \mathbf{u}_{+1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{+n}^* \end{bmatrix}$$

összefüggést, amely $f(\lambda) = \lambda$ esetnek felel meg (1) kifejezésében, —

$$2\mathcal{O} = \eta^* \mathbf{V} \eta = \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{+k} (t-t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi)^2 \left[\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{-k} (t-t_j) \right]^2 \right\}.$$

Az összes energia

$$E = \mathcal{O} + \mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 \left[\left(\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k} (t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{+k} (t-t_j) \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + (\mathbf{u}_{-k}^* \Pi)^2 \left[\left(\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{-k} (t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{-k} (t-t_j) \right)^2 \right] \right\}$$

Végezzük el az alábbi átalakítást

$$\left[\left(\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k} (t-t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{+k} (t-t_j) \right)^2 \right] = \\ = \left| \sum_{j=1}^{2p} e^{i\nu_{+k}(t-t_j)} \right|^2 = \left| \sum_{j=1}^{2p} e^{-i\nu_{+k}\tau_j} \right|^2$$

mivel $|e^{i\nu_{+k}t}|^2 = 1$ és $t_j = j\tau$.

Ha $z = e^{-i\nu_k\tau}$ jelölést használjuk, akkor

$$\left| \sum_{j=1}^{2p} z^j \right|^2 = \left| \frac{1 - z^{2p}}{1 - z} \right|^2 = \left| z^{p+\frac{1}{2}} \right|^2 \cdot \left| \frac{z^{-p} - z^p}{z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}} \right|^2$$

miatt

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^{2p} \cos \nu_{+k} (t - t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{2p} \sin \nu_{+k} (t - t_j) \right)^2 = \\ (27) \quad & = \left(\frac{\sin \frac{2p}{2} \nu_{+k}\tau}{\sin \frac{1}{2} \nu_{+k}\tau} \right)^2 = F_{2p}(\delta_{+k}) \end{aligned}$$

ahol $\delta_{+k} = \nu_{+k}\tau$.

Formuláinkba itt belépő $F_{2p}(\delta_{+k})$ kifejezés — amely *Hostinsky* dolgozatában is szerepel — a Fejér-féle mag [5, 6, 8].

Ezzel a rendszer összes energiája $2p$ számú periodikusan ismétlődő egyenlő impulzus után

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ F_{2p}(\delta_{+k}) (\mathbf{u}_{+k}^* \Pi)^2 + F_{2p}(\delta_{-k}) (\mathbf{u}_{-k} \Pi)^2 \}.$$

Ha csak a $2i-1$ -ik, ill. $2i$ -ik tömegponttal közlünk impulzusokat, akkor mivel (14)-ből

$$u_{2i-1, k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{(2i-1)k\tau}{2n+1}$$

$$u_{2i, k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{(2i)k\tau}{2n+1}$$

$$H_{2i-1} = \sqrt{m} P$$

$$u_{2i+1, k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{2ik\tau}{2n+1}$$

$$u_{2i+2, k} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \Omega \sin \frac{2ik\tau}{2n+1}$$

$$H_{2i} = \sqrt{M} P$$

a rendszer energiája (Ω^+ és Ω^- kifejezések behelyettesítése után):

$$E(2i-1) = \frac{mP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \{F_{2p}(\delta_{+k}) + F_{2p}(\delta_{-k}) + \\ + [F_{2p}(\delta_{+k}) - F_{2p}(\delta_{-k})] \left| \sqrt{\frac{q^2-1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \right\} \sin^2 \frac{(2i-1)k\pi}{2n+1}$$

ill.

$$E(2i) = \frac{MP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \{F_{2p}(\delta_{+k}) + F_{2p}(\delta_{-k}) - \\ - [F_{2p}(\delta_{+k}) - F_{2p}(\delta_{-k})] \left| \sqrt{\frac{q^2-1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \right\} \sin^2 \frac{2ik\pi}{2n+1}.$$

Egyenlő tömegpontok esetén, ha a tömeget m -el jelöljük és az i -edik tömegponttal p impulzust közlünk, a rendszer energiája $t > t_p$ időpontban:

$$E = \frac{mP^2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} F_p(\delta_k) \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1}$$

ahol

$$\frac{mP^2}{2n+1} F_p(\delta_k) \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1} = \frac{mP^2}{2n+1} \left(\frac{\sin \frac{p}{2} \nu_{k\tau}}{\sin \frac{1}{2} \nu_{k\tau}} \right)^2 \sin^2 \frac{ik\pi}{2n+1} \\ \left(\nu_k = \frac{2n+1}{T} \cdot 2 \sin \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

a k indexű normálrezgés energiáját adja.

Térjünk rá a b) esetre.

A rendszer energiája $2p$ impulzus után ($2p \leq 2n$)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_k^* H^{(j)}) \sin \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \right. \\ + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{+k}^* H^{(j)}) \cos \nu_{+k}(t-t_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{-k}^* H^{(j)}) \sin \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 + \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{u}_{-k}^* H^{(j)}) \cos \nu_{-k}(t-t_j) \right]^2 \right\}$$

(28) behelyettesítésével az összegezést külön végezzük el a $j = 2i - 1$ és a $j = 2i$ indexű impulzusokra; a trigonometrikus kifejezések szorzatának összeggő alakítása után és (27) felhasználásával, ha bevezetjük a következı jelöléseket:

$$\beta = \frac{k\pi}{2n+1}; \quad \delta_{\pm k} = \nu_{\pm k}\tau$$

$$R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) = \frac{1}{2} [F_p(2\beta + 2\delta_{\pm k}) + F_p(2\beta - 2\delta_{\pm k})]$$

$$S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) = \sqrt{F_p(2\beta + 2\delta_{\pm k}) \cdot F_p(2\beta - 2\delta_{\pm k})}$$

$$R(2p, \beta, \delta_{\pm k}) = \frac{1}{2} [F_{2p}(\beta + \delta_{\pm k}) + F_{2p}(\beta - \delta_{\pm k})]$$

$$S(2p, \beta, \delta_{\pm k}) = \sqrt{F_{2p}(\beta + \delta_{\pm k}) \cdot F_{2p}(\beta - \delta_{\pm k})}$$

továbbá

$$X_{\pm k} = R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) - S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) \cdot \cos 2p\beta$$

$$Y_{\pm k} = R(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) - S(p, 2\beta, 2\delta_{\pm k}) \cdot \cos (2p + 2)\beta$$

$$Z_{\pm k} = R(2p, \beta, \delta_{\pm k}) - S(2p, \beta, \delta_{\pm k}) \cdot \cos (2p + 1)\beta$$

végül Ω^+ és Ω^- kifejezések behelyettesítésével a rendszer energiája:

$$E = \frac{P^2}{2(2n+1)} \sum_{k=1}^n [m(X_{+k} + X_{-k}) + M(Y_{+k} + Y_{-k}) + \\ + [m(X_{+k} - X_{-k}) - M(Y_{+k} - Y_{-k})] \left| \sqrt{\frac{q^2 - 1}{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} + \right. \\ \left. + \sqrt{Mm} [Z_{+k} + Z_{-k} - (X_{+k} + X_{-k} + Y_{+k} + Y_{-k})] \frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sqrt{q^2 - \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}} \right|]$$

Egyenlő tömegpontok esetén, ha a tömeget m -el jelöljük, $2p$ impulzus után $t > t_{2p}$ időpontban a rendszer energiája

$$E = \frac{mP^2}{2(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} Z_k$$

ahol

$$\frac{mP^2}{2(2n+1)} Z_k = \frac{mP^2}{2(2n+1)} \left\{ \frac{1}{2} [F_{2p}(\beta + \delta_k) + F_{2p}(\beta - \delta_k)] + \right. \\ \left. + \sqrt{F_{2p}(\beta + \delta_k) \cdot F_{2p}(\beta - \delta_k)} \cdot \cos (2p + 1) \frac{k\pi}{2n+1} \right\}$$

a k indexű normálrezgés energiáját adja.

B) Kör mentén egyenletesen elosztott, egyenlő tömegpontokból álló rendszer

Tekintsünk egy — a 3. §-ban tárgyalt — súrlódás nélküli hengerre helyezett, $2l$ egyenlő tömegpontból álló korpuszkuláris rendszert. Határozzuk meg ezen rendszer összes energiáját az $A)$ alatt ismertetett feltételek mellett. Tehát, ha t_1, t_2, \dots, t_p időpontokban $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(p)}$ impulzus-sorozatot adunk a tömegpontoknak, a rendszer mozgását — (21) vektordifferenciál-egyenletnek, a kezdeti értékektől függő (26) megoldása alapján —

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{j=1}^p \left\{ [\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^*] (t - t_j) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\sin \varphi_k (t - t_j)}{\varphi_k} [\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^* \\ \mathbf{v}_k^* \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \varphi_l (t - t_j)}{\varphi_l} [\mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^*] \right\} \mathbf{P}^{(j)}$$

kifejezés határozza meg, ahol

$$(29) \quad \varphi_k = \frac{n}{T^*} 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

Térjünk rá az $A)$ alatt részletezett két feladatra.

a) τ időközönként összesen p egyenlő nagyságú \mathbf{P} impulzust közlünk a tömegpontrendszerrel. $t > t_p$ időpontban a rendszer kinetikus energiája:

$$2 \mathcal{T} = \frac{M}{n} \dot{\mathbf{y}}^* \dot{\mathbf{y}} = \frac{M}{n} \left\{ (\mathbf{u}_0^* \mathbf{P})^2 p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_k (t - t_j) \right)^2 + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_l (t - t_j) \right)^2 \right\}$$

a rendszer potenciális energiája

$$2 \mathcal{V} = \mathbf{y}^* \mathbf{Z} \mathbf{y} = \frac{M}{n} \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_k (t - t_j) \right)^2 + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_l (t - t_j) \right)^2 \right\}$$

tehát az összes energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left\{ (\mathbf{u}_0^* \mathbf{P})^2 p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left[\left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_k (t - t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_k (t - t_j) \right)^2 \right] + (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P})^2 \left[\left(\sum_{j=1}^p \cos \varphi_l (t - t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^p \sin \varphi_l (t - t_j) \right)^2 \right] \right\}$$

vagy (24), (25) és (27) behelyettesítésével

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^2 \frac{1}{n} p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [(\mathbf{u}_k^* \mathbf{P})^2 + (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P})^2] \left(\frac{\sin \frac{p}{2} \varphi_k \tau}{\sin \frac{1}{2} \varphi_k \tau} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(P_1 - P_2 + \dots - P_n)^2}{n} \left(\frac{\sin \frac{n}{2} \varphi_l \tau}{\sin \frac{1}{2} \varphi_l \tau} \right)^2 \right\}.$$

Ha csak az egyik tömegponttal közlünk P impulzusokat, akkor (23) felhasználásával

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \frac{P^2}{n} \left\{ p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} 2F_p(\varphi_k \tau) + F_p(\varphi_l \tau) \right\}.$$

b) $t_j - t_{j-1} = \tau$ időközönként egyenlő, összesen p impulzust közlünk, mégpedig t_1 időpontban az első tömegponttal, t_2 időpontban a másodikkal és így tovább. $t > t_p$ időpontban a rendszer energiája:

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \left(\left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_0 \mathbf{P}^{(j)}) \right]^2 + \sum_{k=1}^{l-1} \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_k^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_k (t - t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_k \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_k (t - t_j) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{v}_k^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_k (t - t_j) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{v}_k \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_k (t - t_j) \right]^2 \right) + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_l^* \mathbf{P}^{(j)}) \sin \varphi_l (t - t_j) \right]^2 + \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^p (\mathbf{u}_l \mathbf{P}^{(j)}) \cos \varphi_l (t - t_j) \right]^2 \right)$$

(23), (24) és (25) behelyettesítésével

$$E = \frac{1}{2} \frac{M}{n} \frac{P^2}{n} \left(p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} \left[\left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi_k \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} + \varphi_k \tau \right)} \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi_k \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi_k \tau \right)} \right|^2 \right] + \left[\left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\tau + \frac{2n}{T} \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{2n}{T} \tau \right)} \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \frac{\sin \frac{p}{2} \left(\tau - \frac{2n}{T} \tau \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{2n}{T} \tau \right)} \right|^2 \right] \right)$$

A gerjesztő frekvencia növelése során fellépő különböző eseteket az alábbi táblázat szemlélteti:

Intervallum jele	I.		II.			III.		IV.	
ω következő kifejezése	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta}}$		$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}$		$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta}}$		$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 + sh^2 \Theta}}$	
mely a $\sqrt{\left(2a - \frac{T^2 \omega^2}{(2n+1)^2}\right)\left(\frac{2}{a} - \frac{T^2 \omega^2}{(2n+1)^2}\right)} =$	$2 \cos \Theta$		$2 \sin i \Theta$			$2 \cos \Theta$		$2 \cos i \Theta$	helyettesítéssel keletkezett
ω -nak	$0 < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}}$	$\omega_1 = \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{M}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q - 2\sqrt{q^2 - 1}} < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q} < \omega < \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}}$	$\omega_2 = \frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{L} \cdot \frac{1}{m}}$	$\frac{2n+1}{T} \sqrt{2q + 2\sqrt{q^2 - 1}} < \omega < \frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q}$	$\omega_3 = \frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q} = \sqrt{\frac{2(2n+1)F}{2} \cdot \frac{2}{\mu}}$	$\frac{2n+1}{T} 2\sqrt{q} < \omega$	intervallumát futja be
miközben Θ parameter	$0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$		$0 < \Theta < \text{arch } q$	$\text{arch } q > \Theta > 0$		$\frac{\pi}{2} > \Theta > 0$		$0 < \Theta$	intervallumot fut be.
A megoldási vektor : $y = jg \sin \omega t$ komponensei	$j_{2k-1} = a \frac{\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta} - \sqrt{q^2 - 1}}{\cos \Theta} \frac{\sin (2n+2-2k) \Theta}{\sin (2n+1) \Theta}$ $j_{2k} = \frac{\sin (2n+1-2k) \Theta}{\sin (2n+1) \Theta}$	0 $(-1)^k$	$(-1)^{k-1} a \frac{\sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}{sh \Theta} \frac{sh (2n+2-2k) \Theta}{ch (2n+1) \Theta}$ $(-1)^k \frac{ch (2n+1-2k) \Theta}{ch (2n+1) \Theta}$	$(-1)^{k-1} a \frac{\sqrt{q^2 - 1} + \sqrt{q^2 - ch^2 \Theta}}{sh \Theta} \frac{sh (2n+2-2k) \Theta}{ch (2n+1) \Theta}$ $(-1)^k \frac{ch (2n+1-2k) \Theta}{ch (2n+1) \Theta}$	$(-1)^{k-1} (2n+2-2k) \frac{M-m}{m}$ $(-1)^k$	$-a \frac{\sqrt{q^2 - \sin^2 \Theta} + \sqrt{q^2 - 1}}{\cos \Theta} \frac{\sin (2n+2-2k) \Theta}{\sin (2n+1) \Theta}$ $\frac{\sin (2n+1-2k) \Theta}{\sin (2n+1) \Theta}$	$-\frac{M}{m} \frac{2n+2-2k}{2n+1}$ $\frac{2n+1-2k}{2n+1}$	$-a \frac{\sqrt{q^2 - sh^2 \Theta} + \sqrt{q^2 - 1}}{ch \Theta} \frac{sh (2n+2-2k) \Theta}{sh (2n+1) \Theta}$ $\frac{sh (2n+1-2k) \Theta}{sh (2n+1) \Theta}$	
A gerjesztett rezgés tovaterjedésének karaktere :	periodikus	lineáris	exponenciálisan csökkenő		lineáris	periodikus	lineáris	exponenciálisan csökkenő	

$$a = \sqrt{\frac{M}{m}} ; \quad q = \frac{\frac{M+m}{2}}{\sqrt{Mm}} ; \quad \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{M} + \frac{1}{m}}{2} ;$$



legyen $\zeta_k = \frac{2k\pi}{n}$ és $\psi_k = \varphi_k \tau$, akkor (27) felhasználásával az összes energia:

$$E = \frac{1}{2} M \frac{P^2}{n^2} \left\{ p^2 + \sum_{k=1}^{l-1} [F_p(\zeta_k + \psi_k) + F_p(\zeta_k - \psi_k)] + F_p(\zeta_l + \psi_l) \right\}$$

és φ_k értékét (29) adja meg.

IRODALOM

- [1] *Lagrange*: Sur les oscillations très petites d'un système quelconque des corps. Oeuvres de L. tome XI. 2^e Partie, Section VI. § 3.
- [2] *Routh*: The advanced part of a treatise on the dynamics of rigid bodies.
- [3] *Born—Kármán*: Über Schwingungen in Raumgittern. Physikalische Zeitschrift. 1912. No. 8.
- [4] *Brillouin*: Wave propagation in periodic structures. Mc Graw-Hill Book Co. 1946.
- [5] *Hostinsky*: Influence des chocs transversaux sur le mouvement vibratoire d'une corde. Bulletin international de l'Acad. tchèque des Sciences 1944. No. 24.
- [6] *Hostinsky*: Sur le spectre acoustique de la corde de Lagrange. Publications de la fac. sciences de l'Univ. Masaryk. Brno 1948. No. 297.
- [7] *T. A. Hoffmann*: Some investigations in the field of the theory of solids. Acta Physica Ac. Sci. Hungarica 1951.
- [8] *Fejér*: Untersuchungen über die Fourierschen Reihen. Math. Ann. Bd. 58. S. 51. 1903.
- [9] *Egerváry*: »Matrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról« (M. T. A. III. oszt. Közleményei).
- [10] *Egerváry*: »On a property of the projector matrices and its application to the reduction of matrix-function«. (Acta Sci. Math. Szeged).

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛАСТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

П. Рожа

Резюме

Автор желает показать, какие существенные преимущества имеет при изучении малых колебаний корпускулярных систем применение матричного исчисления построенного согласно требованиям формального и нумерического расчёта. Определение аналитической функции $f(\mathbf{A})$ матрицы \mathbf{A} , рассмотренной в § 1., позволяет определить для матриц функции $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$, и т. п. образующие резольвентные матрицы систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Если $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, формулы автоматически дают каноническое разложение матрицы \mathbf{A} . Это разложение в случае симметрической матрицы соответствует преобразованию квадратичных форм в сумму квадратов; в случае же механических проблем соответствует введению нормальных координат. В § 2. рассматриваются свободные и вынужденные колебания корпускулярной струны, которая состоит из материальных точек с переменной массой. В § 3. описываются колебания корпускулярной системы, расположенной по окружности на совершенно гладком цилиндре. Указанная здесь проблема служит примером для более общего и сложного случая, когда матрица, определяющая систему дифференциальных уравнений, имеет двойные собственные значения. В § 4. рассматривается рост энергии корпускулярных систем под действием равных по величине, периодически повторяющихся импульсов.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER KLEINE SCHWINGUNGEN ELASTISCH GEKOPPELTER KORPUSKULARSYSTEME UNTER HERANZIEHUNG DES MATRIZENKALKÜLS

P. RÓZSA

Zusammenfassung

Es soll der Nachweis dessen erbracht werden, dass bei der Untersuchung der kleinen Schwingungen der Korpuskularsysteme die Anwendung des den Ansprüchen des formalen und numerischen Rechnens entsprechend ausgebauten Matrizenkalküls wesentliche Vorteile sichert. Die Definition der analytischen Funktion $f(\mathbf{A})$ der im 1. Abschnitt besprochenen Matrix \mathbf{A} ermöglicht ihrerseits die Definition der Funktionen $e^{\mathbf{A}t}$, $\sin \mathbf{A}t$, $\cos \mathbf{A}t$ u. s. w., welche die resolventen Matrizen von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bilden. Im Falle $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ liefern die Formeln automatisch die kanonische Zerlegung der Matrix \mathbf{A} , die im Falle einer symmetrischen Matrix mit der Transformation einer quadratischen Form in eine Quadratsumme, und im Falle mechanischer Probleme mit der Einführung von Normalkoordinaten identisch ist. Im 2. Abschnitt werden freie und erzwungene Schwingungen eines korpuskularen Saitenmodells behandelt. Die Saite besteht aus Massenpunkten zweierlei verschiedener Massen, die abwechselnd nacheinander folgen. Der 3. Abschnitt behandelt die freien und erzwungenen Schwingungen eines auf einen reibungslosen Zylinder gesetzten Massenpunktsystems, dessen Punkte längs eines Kreises äquidistant verteilt sind. Dies ist ein Beispiel für den allgemeineren und verwickelteren Fall, in welchem die Eigenwerte der die Differentialgleichung bestimmenden Matrix zweifach sind. Im 4. Abschnitt wird das Anwachsen der Energie korpuskularer Systeme unter Einfluss periodisch wiederkehrender Impulse gleicher Grösse besprochen.

KÉMIAI REAKCIÓK TÁRGYALÁSA A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK ELMÉLETE SEGÍTSÉGÉVEL

RÉNYI ALFRÉD

Összefoglalás

A dolgozat bizonyos egyszerű kémiai reakciók időbeli lefolyását mint sztochasztikus folyamatot tárgyalja. Ez a tárgyalásmód nemcsak az átlagokra vonatkozó törvények az ismertnél valamivel szabatosabb alakjának levezetését, hanem az átlag körüli véletlen ingadozások nagyságrendjének megbecsülését is lehetővé teszi.

Az 1. § a bimolekuláris reakciókkal foglalkozik abban az esetben, amikor a reakció csak az egyik irányban megy végbe; a 2. §-ban figyelembe vesszük azt az esetet is, amikor a létrejött molekulák szétbomolhatnak, míg a 3. § az ionizáció és rekombináció problémájával foglalkozik. A 4. §-ban visszatérünk a 2. §-ban tárgyalt probléma tüzetesebb vizsgálatára, míg a függelék annak szabatos matematikai bizonyítását tartalmazza, hogy a 2. §-ban, ill. 3. §-ban tárgyalt kémiai problémáknál egyensúlyi állapot alakul ki.

Bevezetés

Ebben a dolgozatban a kémiai reakciók néhány legegyszerűbb típusát tárgyaljuk a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével. Ez a tárgyalásmód bonyolultabb esetekben is alkalmazható. Azonban már a bimolekuláris reakciók egyszerű esetében is megmutatkoznak a korszerű valószínűségi számítási módszerrel való tárgyalás előnyei. Ez a tárgyalásmód a kémiában szokásos — többé-kevésbé heurisztikus — módszerrel szemben azzal az előnnyel bír, hogy matematikailag teljesen szabatos, és így megmutatja, hogy milyen feltevések szükségesek az ismert eredmények (pl. a kinetikus tömeghatástörvény) levezetéséhez, megmutatja, hogy ezek az eredmények csak közelítőleg érvényesek, és egyben megadja az (átlagokra vonatkozó) pontos összefüggéseket is. Abban is többet nyújt ez a módszer, mint a szokásos tárgyalásmód, hogy számot ad nemcsak az átlagokról, hanem az átlag körüli véletlen ingadozások nagyságáról is. A tárgyalás eredménye, amint ez várható volt — az, hogy ezek a véletlen ingadozások a gyakorlatban előforduló koncentrációk mellett elhanyagolhatóan kicsinyek, és közönséges észlelési módszerrel nem észlelhetők. Előfordulhatnak azonban olyan esetek, amikor kis mennyiségű anyagok között végbemenő reakcióról van szó és így az említett véletlen ingadozások számottevővé válnak és mérésük a mérés technika mai fejlettségi fokán lehetségesnek látszik. (Pl. rádióaktív izotópok segítségével.)

Azonban még ha el is tekintünk olyan esetektől, amikor az említett ingadozások számottevővé válnak, úgy hisszük, nem érdektelen az a tény sem,

hogy az említett ingadozások gyakorlatilag elhanyagolható voltát matematikailag szabatosan ki lehet mutatni.

Ezúton is megköszönöm Schay Géza akadémikusnak, hogy a dolgozatot volt szíves átnézni és néhány megjegyzését velem közölni; megjegyzéseit a dolgozat végleges megfogalmazásánál felhasználtam.

1. §. Bimolekuláris reakciók tárgyalása

Az **A** és **B** anyagok legyenek egy folyadékban (pl. vízben) oldva. Tegyük fel, hogy ha az **A** anyag egy molekulája a **B** anyag egy molekulájával »találkozik« (elég közel kerülnek egymáshoz), akkor bizonyos valószínűséggel egy **C** molekulává egyesülnek. Feltesszük, hogy a létrejött **C** molekulák nem alakulnak vissza **A** ill. **B** molekulákká; utóbbi lehetőséggel a 2. §-ban foglalkozunk. Tegyük fel, hogy $t = 0$ időpontban az oldatban A számú **A** molekula és B számú **B** molekula van jelen. Jelentse γ_t a t időpontig keletkezett **C** molekulák számát; γ_t t minden pozitív értékére véletlentől függő mennyiség, valószínűségi változó és így a γ_t változók összessége ($0 \leq t < \infty$) egy sztochasztikus folyamatot alkot. Ha α_t ill. β_t jelenti a t időpontban még meglévő **A** ill. **B** molekulák számát, úgy nyilvánvalóan

$$(1) \quad \alpha_t = A - \gamma_t \quad \text{és} \quad \beta_t = B - \gamma_t.$$

Legyen $C = \min(A, B)$ és jelentse $W_n(t)$ annak a valószínűségét, hogy $\gamma_t = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, C$) akkor, ha feltesszük, hogy Δt idő alatt egy tetszőleges még meglévő A molekula egy tetszőleges, még meglévő B molekulával $\lambda \Delta t + o(\Delta t)^*$ valószínűséggel egyesül, akkor — bevezetve a

$$(2) \quad h_n = (A - n)(B - n)$$

jelölést

$$(3) \quad W_n(t + \Delta t) = W_n(t) (1 - \lambda h_n \Delta t) + W_{n-1}(t) \lambda h_{n-1} \Delta t + o(\Delta t),$$

ha $n = 0, 1, 2, \dots, C$ [$W_{-1}(t)$ legyen azonos zérus], ugyanis az, hogy $t + \Delta t$ időpontig n számú **C** molekula jött létre vagy úgy lehetséges, hogy t időpontig n számú **C** molekula jött létre és a t és $t + \Delta t$ időpontok között újabb **C** molekula nem keletkezett (ennek valószínűségét adja meg (3) jobboldalán az első tag), vagy úgy, hogy t időpontig $(n - 1)$ számú **C** molekula keletkezett és t és $t + \Delta t$ időpontok között egy további **C** molekula keletkezett (ennek valószínűségét adja meg (3) jobboldalán a második tag), vagy úgy, hogy t és $t + \Delta t$ időpontok között két — vagy még több — **C** molekula keletkezett, aminek a valószínűsége $o(\Delta t)$ nagyságrendű.

(3) mindkét oldalából $W_n(t)$ -t kivonva, Δt -vel osztva és elvégezve a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet, kapjuk, hogy

$$(4) \quad W'_n(t) = \lambda [W_{n-1}(t) h_{n-1} - W_n(t) h_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots, C)$$

* $o(\Delta t)$ olyan mennyiséget jelent, amely Δt -vel osztva 0-hoz konvergál, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

A (4) differenciálegyenletrendszerből a $W_n(t)$ függvények szukcesszíve explicit alakban is meghatározhatók; e célból képezzük a $W_n(t)$ függvények Laplace-transzformáltjait.

Legyen

$$(5) \quad V_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} W_n(t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots, C)$$

akkor (4)-ből

$$(6) \quad V_n(s) = \frac{\lambda V_{n-1}(s) h_{n-1}}{s + \lambda h_n} \quad (n = 1, 2, \dots, C).$$

Mivel (4)-ből

$$W'_0(t) = -\lambda W_0(t) AB \quad \text{és} \quad W_0(0) = 1$$

tehát

$$W_0(t) = e^{-\lambda AB t}$$

és így

$$(7) \quad V_0(s) = \frac{1}{s + \lambda AB},$$

tehát (6)-ból következik, hogy

$$(8) \quad V_n(s) = \frac{\lambda^n \prod_{k=1}^n h_{k-1}}{\prod_{k=0}^n (s + \lambda h_k)} \quad (n=0, 1, 2, \dots, C).$$

A $V_n(s)$ függvényt könnyen parciális törtekre bonthatjuk:

$$(9) \quad V_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{nk}}{s + \lambda h_k},$$

ahol

$$(10) \quad C_{nk} = \frac{h_0 h_1 \dots h_{n-1}}{(h_0 - h_k)(h_1 - h_k) \dots (h_{k-1} - h_k)(h_{k+1} - h_k) \dots (h_n - h_k)},$$

tehát

$$(11) \quad V_n(s) = h_0 h_1 \dots h_{n-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(s + \lambda h_k) \prod_{\substack{j \neq k \\ 0 \leq j \leq n}} (h_j - h_k)}$$

és így elvégezve a visszatranszformálást, kapjuk, hogy

$$(12) \quad W_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda h_k t} \left(\prod_{j=0}^{n-1} h_j \right) \left(\prod_{\substack{j \neq k \\ 0 \leq j \leq n}} \frac{1}{h_j - h_k} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, C).$$

A következőképpen nyerhetünk egy közelítő képletet $W_n(t)$ -re: ha n és t értékét rögzítjük, $A \rightarrow \infty$ és $B \rightarrow \infty$, ugyanakkor pedig $\lambda \rightarrow 0$ úgy, hogy $AB\lambda \rightarrow \mu$, akkor, amint azt egyszerű számolással beláthatjuk, $W_n(t)$ konvergál a

$$(13) \quad W_n^*(t) = \frac{(ut)^n e^{-\mu t}}{n!}$$

határértékhez. Így tehát λ , t és n kicsiny értékeire $W_n(t)$ jól közelíthető $W_n^*(t)$ -vel, ha abba μ helyett az $AB\lambda$ értéket helyettesíthetjük, vagyis

$$W_n(t) \approx \frac{(AB\lambda t)^n e^{-\lambda AB t}}{n!},$$

vagyis kicsiny n , λ és t és nagy A és B értékekre a $\{W_n(t)\}$ eloszlás a (13) Poisson-eloszlással közelíthető, ahol $\mu = AB\lambda$.

Gyakorlati szempontból a t időpontig létrejött C molekulák *várható számának* ismeretére van szükség, vagyis a

$$(14) \quad C(t) = \sum_{n=0}^C n W_n(t)$$

függvény meghatározására.

A (4) egyenletet n -nel beszorozva és n szerint összegezve kapjuk, hogy

$$C'(t) = \sum_{n=0}^C n W_n'(t) = \lambda \sum_{n=0}^C n [W_{n-1}(t) h_{n-1} - W_n(t) h_n].$$

A jobboldalon álló összeget átrendezve adódik (figyelembe véve, hogy $h_C = 0$), hogy

$$C'(t) = \lambda \sum_{n=0}^C W_n(t) h_n.$$

Mivel $h_n = (A - n)(B - n)$ következik, hogy

$$\begin{aligned} C'(t) &= \lambda \sum_{n=0}^C W_n(t) [AB - (A + B)n + n^2] = \\ &= \lambda \left[AB - (A + B)C(t) + \sum_{n=0}^C n^2 W_n(t) \right]. \end{aligned}$$

Mivel azonban

$$\sum_{n=0}^C n^2 W_n(t) = \left(\sum_{n=0}^C n W_n(t) \right)^2 + \sum_{n=0}^C [n - C(t)]^2 W_n(t),$$

tehát következik, hogy

$$C'(t) = \lambda [A - C(t)][B - C(t)] + \lambda S^2(t),$$

ahol

$$S^2(t) = \sum_{k=0}^C [k - C(t)]^2 W_k(t)$$

tehát azt kaptuk, hogy $C(t)$ a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$(15) \quad C'(t) = \lambda [A - C(t)][B - C(t)] + \lambda S^2(t),$$

tehát

$$(16) \quad C'(t) = \lambda [M(\alpha_t) M(\beta_t) + D^2(\gamma_t)].$$

ahol $M(\alpha_t)$ illetve $M(\beta_t)$ jelöli az **A** ill. **B** anyagból t időpontban még meglévő molekulák várható számát és $D^2(\gamma_t) = S^2(t)$ a t időpontig létrejött **C** molekulák számának a szórásnégyzetét. A (16) egyenlet a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$(17) \quad C'(t) = \lambda M(\alpha_t \beta_t)$$

ahol $M(\alpha_t \beta_t)$ az $\alpha_t \beta_t$ szorzat várható értékét jelenti; ugyanis

$$M(\alpha_t \beta_t) = M[(A - \gamma_t)(B - \gamma_t)] = AB - (A + B)M(\gamma_t) + M(\gamma_t^2)$$

és

$$M(\gamma_t^2) = M^2(\gamma_t) + D^2(\gamma_t)$$

tehát

$$M(\alpha_t \beta_t) = AB - (A + B)M(\gamma_t) + M^2(\gamma_t) + D^2(\gamma_t) = M(\alpha_t)M(\beta_t) + D^2(\gamma_t).$$

Mivel $D^2(\gamma_t)$ elég kicsiny $M(\alpha_t)M(\beta_t)$ -hez képest, első közelítésben *elhanyagolhatjuk* és így nyerjük (15)-ből a

$$(18) \quad C'(t) = \lambda (A - C(t))(B - C(t))$$

egyenletet.

Ez az úgynevezett kinetikus tömeghatás-törvény. *A kinetikus tömeghatás-törvény tehát csak közelítőleg érvényes.* Ugyanis a kinetikus tömeghatás-törvény szerint

$$C'(t) = \lambda (A - C(t))(B - C(t)) = \lambda M(\alpha_t)M(\beta_t)$$

kellene hogy legyen, azonban valójában

$$C'(t) = \lambda M(\alpha_t \beta_t)$$

és mivel α_t és β_t nem függetlenek (sőt egyik a másiknak lineáris függvénye), tehát

$$M(\alpha_t \beta_t) \neq M(\alpha_t)M(\beta_t)$$

A (18) egyenlet, mint ismeretes, explicit alakban egyszerűen megoldható, mégpedig

$$(19) \quad C(t) = \frac{e^{-A\lambda t} - e^{-B\lambda t}}{\frac{1}{A}e^{-A\lambda t} - \frac{1}{B}e^{-B\lambda t}}.$$

Ha $t \rightarrow \infty$, úgy $C(t) \rightarrow C = \min(A, B)$.

Ha t igen kicsiny, úgy $C(t) \approx AB\lambda t$

A $D^2(\gamma_t)$ korrekciós tag nagyságrendjéről képet kapunk abból a megjegyzésből, hogy γ_t közelítőleg Poisson-eloszlású, ha A és B igen nagyok. Ennélfogva $D^2(\gamma_t)$ és $M(\gamma_t)$ nagyságrendje megegyezik. Ebből már nyilvánvaló, hogy $D^2(\gamma_t)$ elhanyagolhatóan kicsiny a (15) egyenlet jobb oldalának első tagjához képest, kivéve, ha $M(\alpha_t)$ vagy $M(\beta_t)$ már igen kicsiny, vagyis amikor a folyamat már befejezéshez közeledik.

Külön figyelmet érdemel az az eset, amikor az egyik pl. a **B** anyag mennyisége a másikhoz képest igen nagy. Ezt az esetet úgy kaphatjuk meg, hogy a (4) egyenletrendszerben elvégezzük a $B \rightarrow \infty$ és $\lambda \rightarrow 0$ egyidejű határátmeneteket, feltéve, hogy $B\lambda = A$ állandó. Ez esetben a

$$(3^*) \quad W'_n(t) = \Lambda(W_{n-1}(t)(A - n + 1) - W_n(t)(A - n)) \quad (n = 0, 1, \dots, A)$$

egyenletrendszerre jutunk, amelynek megoldása

$$(12^*) \quad W_n(t) = \binom{A}{n} e^{-\Lambda(A-n)t} (1 - e^{-\Lambda t})^n$$

vagyis $A(1 - e^{-\Lambda t})$ várható értékű A -adrendű binomiális eloszlás. Ebben a speciális esetben

$$(14^*) \quad C(t) = A(1 - e^{-\Lambda t})$$

és így $C(t)$ eleget tesz a

$$(15^*) \quad C'(t) = \Lambda(A - C(t))$$

differentiálegyenletnek. Ebben az esetben tehát nincs semmi eltérés a szokásos tárgyalásmód és a fenti szabatos tárgyalásmód között, legalább is ami a várható értéket illeti: a korrekciós tag ebben az esetben nem lép fel, a folyamat exponenciális törvény szerint megy végbe.*

2. §. Egyensúlyi állapotra vezető bimolekuláris reakciók

A gyakorlatban számos bimolekuláris reakciónál figyelembe kell venni, hogy minden létrejött **C** molekula Δt idő alatt $\mu\Delta t + o(\Delta t)$ valószínűséggel újból szétbomolhat **A** ill. **B**-molekulákra. Az ilyen reakcióknál nem fogy el

* Ugyanúgy, mint a rádióaktív bomlásnál. A különbség oka abban rejlik, hogy a (15*) egyenlet *lineáris*, ellentétben a (15) egyenlettel, amely $C(t)$ -re nézve *nem lineáris*.

sem az **A** sem a **B** anyag, hanem egy egyensúlyi állapot alakul ki. Ez esetben a (3) egyenlet a következőképpen módosul :

$$(3b) \quad W_n(t + \Delta t) = W_n(t) (1 - \lambda h_n \Delta t) (1 - \mu \Delta t) + W_{n-1}(t) \lambda h_{n-1} \Delta t + \\ + W_{n+1}(t) \mu (n + 1) \Delta t + o(\Delta t)$$

és így

$$(4b) \quad W'_n(t) = \lambda (h_{n-1} W_{n-1}(t) - h_n W_n(t)) + \mu [(n + 1) W_{n+1}(t) - n W_n(t)] .$$

Ez a differenciálegyenletrendszer is hasonló módon oldható meg, mint a (4) egyenletrendszer. A

$$V_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} W_n(t) dt$$

Laplace-transzformáltakra a

$$V_{n+1}(s) = V_n(s) \frac{[s + (\lambda h_n + \mu n)]}{\mu (n + 1)} - V_{n-1}(s) \frac{\lambda h_{n-1}}{\mu (n + 1)} \\ (n = 0, 1, 2, \dots, C - 1)$$

rekurziós formulát nyerjük ; ebből a $V_n(s)$ függvények szukcesszíve kifejezhetők $V_0(s)$ -sel, és mivel

$$\sum_{n=0}^C W_n(t) \equiv 1 \quad \text{tehát} \quad \sum_{n=0}^C V_n(s) \equiv \frac{1}{s} \quad \text{és így a}$$

$V_n(s)$ függvények meghatározhatók. A $C(t) = M(\gamma_t)$ középértékre ebben az esetben a

$$(15b) \quad C'(t) = \lambda (A - C(t)) (B - C(t)) - \mu C(t) + \lambda S^2(t)$$

differenciálegyenlet áll fenn ; $S^2(t)$ -t elhanyagolva az ismert

$$(16b) \quad C'(t) = \lambda (A - C(t)) (B - C(t)) - \mu C(t)$$

egyenletre jutunk ; (16b) tehát szintén csak közelítőleg érvényes. A (16b) egyenlet megoldása, mint ismeretes

$$(18b) \quad C(t) = \frac{e^{-A^* \lambda t} - e^{-B^* \lambda t}}{\frac{1}{A^*} e^{-A^* \lambda t} - \frac{1}{B^*} e^{-B^* \lambda t}},$$

ahol A^* és B^* az

$$(19) \quad (A - X)(B - X) - \frac{\mu}{\lambda} X = 0$$

egyenlet gyökei ($A^* < B^*$).

Nilvánvaló, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = A^*$.

Jelentsék A_∞ , B_∞ és C_∞ az egyensúlyi állapotban az **A**, **B** és **C** anyagokból jelenlévő mennyiségeket. Akkor tehát

$$A_\infty = A - A^*, \quad B_\infty = B - A^* \quad \text{és} \quad C_\infty = A^*$$

és így (19) szerint

$$\frac{A_\infty B_\infty}{C_\infty} = \frac{(A - A^*)(B - A^*)}{A^*} = \frac{\mu}{\lambda}$$

független a kezdeti koncentrációktól (A -tól és B -től). Ez az úgynevezett tömeghatás-törvény. Abban az esetben, ha B igen nagy A -hoz képest, úgy elvégezve a $B \rightarrow \infty$ és $\lambda \rightarrow 0$ ($B\lambda = \Lambda$ állandó) határátmenetet (4.b) helyett a

$$(4b^*) \quad W'_n(t) = \Lambda ((A - n + 1) W_{n-1}(t) - (A - n) W_n(t)) + \\ + \mu ((n + 1) W_{n+1}(t) - n W_n(t))$$

differenciálegyenletrendszerre jutunk. Ebből

$$C'(t) = \sum_{n=0}^A n W'_n(t) = \Lambda \sum_{n=0}^A (A - n) W_n(t) - \mu \sum_{n=0}^A n W_n(t)$$

és így nyerjük a

$$(15b^*) \quad C'(t) = \Lambda (A - C(t)) - \mu C(t)$$

egyenletet. Az $S^2(t)$ korrekciós tag tehát ebben az esetben sem lép fel.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} S^2(t) = D^2$ létezik és pozitív. Ennélfogva C_∞ valójában a

$$\lambda (A - C_\infty) (B - C_\infty) - \mu C_\infty + \lambda D^2_\infty = 0$$

egyenletnek tesz eleget és így

$$\frac{A_\infty B_\infty}{C_\infty} = \frac{\mu}{\lambda} - \frac{D^2_\infty}{C_\infty}.$$

Ennélfogva a tömeghatás-törvény is valójában csak közelítőleg érvényes. A $\frac{D_\infty^2}{C_\infty}$ tag általában azonban elhanyagolhatóan kicsiny. Így pl. a 3. § eredményeiből következik (az $A = B$ speciális esetre nézve), hogy a $\frac{D_\infty^2}{C_\infty}$ korrekciós tag $\frac{1}{\sqrt{A}}$ nagyságrendű.

3. §. Az ionizáció és rekombináció problémája

Az előző §-ban tárgyalt probléma $A = B$ speciális esetével matematikailag megegyező módon tárgyalható egy másik kémiai probléma, az *ionizáció és rekombináció problémája*.* Ha egy $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ anyag minden molekulája valamilyen külső hatás (pl. sugárzás) hatására Δt idő alatt $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ valószínűséggel ionjaira bomlik, és bármely szabad pozitív ion bármely szabad negatív ionnal Δt idő alatt $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ valószínűséggel molekulává rekombinálódik, és $W_n(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban n számú \mathbf{C} -molekula legyen jelen, úgy $W_n(t)$ -re a (4.b) egyenlet áll fenn $A = C$ és $B = C$ mellett, ahol C jelenti a $t = 0$ időpontban jelenlévő \mathbf{C} molekulák számát és feltesszük, hogy a $t = 0$ időpontban még egy molekula sem ionizálódott. $C(t)$ -vel jelölve a t időpontban jelenlévő molekulák várható számát, $C(t)$ -re közelítőleg a (16.b) egyenlet érvényes ($A = C$ és $B = C$ mellett), vagyis

$$(20) \quad C'(t) = \lambda (C - C(t))^2 - \mu C(t).$$

Megjegyzendő, hogy ebben a problémában célszerűbb a t időpontban jelenlévő pozitív (ill. negatív) ionok számát vizsgálni. Ha $P_n(t)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban n pozitív (és n negatív) ion van jelen, és C jelenti a $t = 0$ időpontban jelenlévő molekulák számát, úgy feltéve, hogy a $t = 0$ időpontban egyetlen ion sem volt

$$P_n(t) = W_{C-n}(t)$$

és így (4.b)-ből

$$(4c) \quad P'_n(t) = \mu [(C - n + 1) P_{n-1}(t) - (C - n) P_n(t)] + \\ + \lambda [(n + 1)^2 P_{n+1}(t) - n^2 P_n(t)] \\ (n = 0, 1, 2, \dots, C)$$

és $A(t)$ -vel jelölve a pozitív ionok számának várható értékét a t időpontban, $A(t) = C - C(t)$, ennél fogva

$$(15c) \quad A'(t) = \mu (C - A(t)) - \lambda A^2(t) - \lambda S^2(t)$$

* L. pl. Jaeger: Introduction to applied mathematics. Megjegyezzük, hogy hasonlóan tárgyalható egy kétatomos molekulákból álló gáz (pl. Cl_2 gáz) atomjaira való fotodisszociációja ill. rekombinációja. Az eltérés csupán abban áll, hogy ez esetben, ha t időpontban a molekulák száma $C(t)$, úgy a $2(C(0) - C(t))$ atom közül bármely kettő molekulává rekombinálódhat.

Vizsgáljuk meg közelebbről a (4.c) egyenletrendszert. Ki lehet mutatni,* hogy a (4.c) differenciálegyenletrendszernek eleget tevő $\{P_n(t)\}$ valószínűség-eloszlás egy határeloszlás felé konvergál (mégpedig exponenciálisan), tehát

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, A),$$

továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0.$$

A $\{P_n\}$ határeloszlás tehát meghatározható a (4.c) egyenletrendszerből, ha abban $P_n(t)$ helyett P_n -et $P'_n(t)$ helyett pedig 0-t írunk. Ennélfogva

$$(21) \quad \mu((C-n+1)P_{n-1} - (C-n)P_n) + \lambda[(n+1)^2P_{n+1} - n^2P_n] = 0 \\ (n = 0, 1, 2, \dots, C).$$

A (21) egyenleteket $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re összegezve következik, hogy

$$(22) \quad \lambda k^2 P_k = \mu(A-k+1)P_{k-1}.$$

Ennélfogva

$$(23) \quad P_k = \left(\begin{array}{c} C \\ k \end{array} \right) \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k \frac{P_0}{k!},$$

ahol

$$(24) \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^C \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k \left(\begin{array}{c} C \\ k \end{array} \right) \frac{1}{k!}}.$$

(23)-ból és (24)-ből következik

$$(25) \quad P(z) = \sum_{k=0}^C P_k z^k = \frac{L_C\left(-\frac{\mu z}{\lambda}\right)}{L_C\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)},$$

ahol $L_C(x)$ a C -edik *Laguerre-féle polinom*, tehát

$$(26) \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ugyanis a szorzat ismételt differenciálására vonatkozó *Leibnitz-féle szabály* szerint

$$(27) \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} \binom{n}{k}.$$

* Ennek közvetlen bizonyítását lásd a függelékben.

Vizsgáljuk most meg az $A(t)$ függvény határértékét. Mivel

$$(28) \quad A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \sum_{k=0}^c k P_k = P'(1)$$

tehát

$$(29) \quad A = \frac{-\frac{\mu}{\lambda} L'_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{L_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

Mivel a Laguerre-polinomokra fennáll a következő rekurzív összefüggés*:

$$(30) \quad x L'_n(x) = n (L_n(x) - L_{n-1}(x))$$

tehát

$$(31) \quad A = C \left(1 - \frac{L_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{L_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)} \right)$$

és így, mivel $O. Perron$ kimutatta**, hogy

$$L_n(-x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} + 2\sqrt{nx}}{\sqrt{\pi} (nx)^{1/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \text{ ha } x < 0$$

tehát

$$(32) \quad A = \sqrt{\frac{\mu \bar{C}}{\lambda}} + O(1),$$

vagyis egy elhanyagolható tagtól eltekintve ugyanarra az eredményre jutunk, mintha az

$$(33) \quad A'(t) = \mu C - \lambda A^2(t)$$

* (30) legegyszerűbben (27) alapján látható be.

** Lásd: *I. G. Szegő*, Orthogonal polynomials (8, 22, 3) tétel 193. o.

egyenlet megoldásának határértékét vizsgáljuk, ha $t \rightarrow \infty$, amint ez szokásos*.

Eljárásunk amellett, hogy a hiba megbecslését is tartalmazza, megadja az ezen határérték körüli ingadozás nagyságrendjét is. Ugyanis a $\{P_n\}$ eloszlás szórásnégyzete, amint azt egyszerű számolással beláthatjuk:

$$(34) \quad D^2 = \sum_{n=0}^C (n-A)^2 P_n = \frac{C\mu L_{C-1} \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}{\lambda L_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)} - C^2 \left(1 - \frac{L_{C-1} \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}{L_C \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)}\right)^2$$

és így a már említett aszimptotikus képlet szerint

$$(35) \quad D \approx \sqrt[4]{\frac{C\mu}{\lambda}} = \sqrt[4]{A}.$$

Ebből következik, hogy D a gyakorlatban valóban elhanyagolhatóan kicsiny A -hoz képest.

4. §. *A stacionér eloszlás meghatározása az egyensúlyi állapotra vezető bimolekuláris reakcióknál*

A 3. §-ban az $A = B$ speciális estre alkalmazott tárgyalás az általános esetben is keresztülvihető. Ugyanúgy belátható, hogy létezik egy stacionér határeloszlás, tehát

$$(36) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W_n(t) = W_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, C)$$

és

$$(37) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W'_n(t) = 0.$$

A $\{W_n\}$ határeloszlásra (36) és (37) segítségével (4.b)-ből a következő képleteket nyerjük:

$$(38) \quad \mu((n+1)W_{n+1} - nW_n) = \lambda(h_n W_n - h_{n-1} W_{n-1}).$$

Összeadva a (38) egyenletet $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$ -re, kapjuk, hogy

$$(39) \quad W_k = \frac{\lambda h_{k-1} W_{k-1}}{\mu k}$$

és így, hogy

$$(40) \quad W_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{A}{k} \binom{B}{k} k! W_0.$$

* L. pl. Jaeger idézett munkáját.

ahol

$$(41) \quad W_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^c \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \binom{A}{k} \binom{B}{k} k!}.$$

Bevezetve az

$$(42) \quad L_{A,B}(x) = \frac{1}{A! B!} \sum_{k=0}^c x^k \binom{A}{k} \binom{B}{k} k! (-1)^k$$

jelölést, azt kapjuk, hogy

$$W(z) = \sum_{k=0}^c W_k z^k = \frac{L_{A,B}\left(-\frac{z\lambda}{u}\right)}{L_{A,B}\left(-\frac{\lambda}{u}\right)}.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy az $L_{A,B}(x)$ polinomok generátorfüggvénye

$$F(x, y, z) = \sum_{A=0}^{\infty} \sum_{B=0}^{\infty} L_{A,B}(x) y^A z^B = e^{y+z-xyz}.$$

Az $L_{A,B}(x)$ polinomok az általánosított Laguerre-féle polinomokkal állnak kapcsolatban. Mint ismeretes, ha $\alpha > -1$ az

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{e^x}{x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

α -adrendű Laguerre-polinomok a $(0, \infty)$ intervallumban az $x^\alpha e^{-x}$ súlyfüggvényre nézve teljes ortogonális rendszert alkotnak. Mármint a fent bevezetett $L_{A,B}(x)$ polinomok a Laguerre-polinomokkal a következőképpen függnek össze: ha $B > A$, akkor

$$L_{A,B}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^A}{B! x^A} L_A^{(B-A)}(x).$$

Mivel $L_{B,A}(x) = L_{A,B}(x)$, ilyen módon az összes $L_{A,B}(x)$ függvények kifejezhetők a Laguerre-polinomok segítségével. Speciálisan, ha $k = 0$, úgy

$$x^A L_{A,A}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^A}{A!} L_A(x).$$

tehát $L_{A,A}(x)$ egy konstans faktortól eltekintve az A -edik Laguerre-polinom reciprok polinomja.

Az $L_n^{(k)}(x)$ polinomok, ha k nem-negatív egész szám, az $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$ közösleges Laguerre-polinomokkal a következőképpen fejezhetők ki:

$$L_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{d^k L_{n+k}(x)}{dx^k}.$$

Ennélfogva

$$L_{A,B}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(-1)^B}{B! x^A} \frac{d^{(B-A)} L_B(x)}{dx^{(B-A)}}.$$

Megjegyzendő, hogy az $L_{A,B}(x)$ polinomok ugyanúgy, mint a Laguerre-polinomok speciális konfluens hypergeometria függvények, mégpedig ha $A < B$, úgy

$$x^A L_{A,B}\left(\frac{1}{x}\right) = A! (B-A)! G(-A, B-A+1, -x)$$

ahol a konfluens hypergeometria sor definíciója szerint

$$G(\alpha, \beta, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)} \frac{u^n}{n!}.$$

A $\{W_n\}$ határeloszlás közelebbi vizsgálatához szükséges volna az $L_{A,B}(x)$ polinomok aszimptotikus viselkedésének megvizsgálása. Ezzel egy következő dolgozat fog foglalkozni.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy ha az egyik pl. a **B** anyag mennyisége rendkívül nagy az **A** anyag mennyiségéhez képest, akkor a tárgyalás rendkívül egyszerűsödik, ugyanis ez esetben a (40) formulában elvégezve a $B \rightarrow \infty$ és $\lambda \rightarrow 0$ ($B\lambda = \Lambda$ állandó) határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$(40^*) \quad W_k = \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k \binom{A}{k} W_0 \quad (k = 1, 2, \dots, A)$$

és

$$(41^*) \quad W_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^A \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k \binom{A}{k}}$$

vagyis, hogy

$$(40^{**}) \quad W_k = \binom{A}{k} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\Lambda + \mu}\right)^{A-k},$$

tehát ez esetben a stacionér határeloszlás binomiális eloszlás $\frac{A\Lambda}{\Lambda + \mu}$ várható

értékkel és $\frac{\sqrt{A\Lambda\mu}}{\Lambda + \mu}$ szórással.

5. §. Függelék

Ebben a függelékben annak közvetlen bizonyítását közöljük, hogy létezik a $\{W_n\}$ határeloszlás. A (4.b) egyenletrendszer a következőképpen írható matrixalakba:

$$W'(t) = \mathbf{A}(t) W(t)$$

ahol $W(t)$ a $(W_0(t), W_1(t), \dots, W_C(t), (C+1)$ -dimenziós vektort, $\mathbf{A}(t)$ viszont az

$$\mathbf{A}(t) = \begin{vmatrix} -\lambda AB & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda AB - [\lambda(A-1)(B-1) + \mu] & 2\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda(A-1)(B-1) & -[\lambda(A-2)(B-2) + 2\mu] & 3\mu & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu C \end{vmatrix}$$

matrixot jelöli. $\mathbf{A}(t)$ ú. n. Jacobi-féle matrix, amelynek csak a főátlójában és az azzal szomszédos két átlóban vannak nem-zérus elemei. Egy Jacobi-féle matrix normális, ha a fődiagonálisban negatív elemek állnak és a többi elem pozitív. Ilyen módon $\mathbf{A}(t)$ normális. Ismeretes azonban, hogy egy normális Jacobi-matrix sajátértékei egyszeresek és valósak.*

Ha még kimutatjuk, hogy $\mathbf{A}(t)$ -nek sajátértéke a $\zeta_0 = 0$, a többi sajátérték $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_C$ pedig negatív, abból már állításunk következik. Ugyanis

$$W(t) = e^{\mathbf{A}(t)} W(0) = \sum_{k=0}^C e^{\zeta_k t} V_k,$$

ahol V_k állandó vektor; és így ha $\zeta_0 = 0$ és $\zeta_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots, C$) úgy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = V_0$$

és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W'(t) = 0.$$

Az, hogy $\zeta_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots, C$ és $\zeta_0 = 0$, egyszerűen abból következik, hogy az $\mathbf{A}(t)$ matrix minden oszlopában az elemek összege 0, továbbá a diagonálisban levő elemek negatívak, a többi nem-eltűnő elem viszont pozitív. Ugyanis, ha az (a_{ik}) -matrix oszlopösszegei 0-val egyenlők, akkor ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, úgy

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = \varrho x_k$$

és így $\varrho = 0$ sajátérték, másrészt ha $\varrho \neq 0$ az (a_{ik}) matrix egy valós sajátértéke, úgy léteznek olyan x_1, x_2, \dots, x_n számok, hogy $\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = \varrho x_k$ és

* Lásd Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Оцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950, 850. 1. tétel.

így ha $a_{kk} < 0$ és $a_{ik} \geq 0$ ha $i \neq k$, úgy

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} x_i = (|a_{kk}| + \varrho) x_k.$$

Ha most $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \alpha > 0$, úgy mivel $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} = |a_{kk}|$, tehát $\alpha |a_{kk}| \geq (|a_{kk}| + \varrho) \alpha$, ami csak úgy lehetséges, ha $\varrho < 0$.

Az a tény, hogy a $\lim_{t \rightarrow \infty} W_n(t) = W_n$ határértékek léteznek, vagyis, hogy a $\{\gamma_t\}$ folyamat *ergodikus*, általános tételekből is következik.* Mivel azonban a tárgyalt esetben a bizonyítás igen egyszerű, érdemesnek láttuk ennek a ténynek a direkt bizonyítását is közölni.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. Реньи

Резюме

Работа занимается некоторыми простыми типами химических реакций, при помощи теории стохастических процессов. Способ изложения употребляем и в более сложных случаях. На простом случае бимолекулярных реакций показаны преимущества применения современных методов теории вероятностей. По сравнению с более или менее эвристическим методом, обычным в химии, этот способ изложения имеет то преимущество, что он вполне точен математически, так что он показывает, каковы предположения, требуемые для вывода известных результатов (например кинетического закона действующих масс). Дальше показывается, что эти результаты приближительны и даются точные соотношения для средних значений. Дальше этот метод отличается от обычного тем, что он дает не только средние значения, но также порядок случайных флуктуаций около среднего значения. Как это можно было ожидать, исследование дает следующий результат: при концентрациях, с которыми приходится иметь дело на практике, этими случайными флуктуациями можно пренебрегать, и при обычных методах наблюдения они незаметны. Имеются однако случаи, когда реакция происходит между малыми количествами вещества, здесь упомянутые случайные флуктуации будут значительными. Измерение их оказывается возможным при помощи современной измерительной техники, например, применяя радиоактивные изотопы. По мнению автора интересен еще тот факт, что практическая пренебрегаемость упомянутых флуктуаций может быть доказана точным математическим путем.

§ 1 посвящен бимолекулярным реакциям, протекающими только в одном направлении. § 2 рассматривает случай, в котором формировавшиеся молекулы могут и разложиться. § 3 занимается с проблемой ионизации и рекомбинации. В § 4 автор возвращается к более подробному исследованию проблемы второго §-а. Приложение содержит точное математическое доказательство того, что при химических проблемах, исследованных в §§ 2 и 3 устанавливается состояние равновесия.

В § 1 исследуется следующая проблема:

Вещества **A** и **B** растворены в некоторой жидкости. Предположим, что если любая молекула вещества **A** встречается с некоторой молекулой вещества **B**, то они с некоторой вероятностью соединяются и образуется молекула **C**. Молекулы **C** не распадаются на молекулы **A** и **B**. Пусть в моменте $t = 0$ в растворе находятся A соотв B , молекулы типа **A** соотв **B**. Пусть γ_t означает количество молекул **C**, образовав-

* Lásd J. L. Doob, Stochastic processes, Wiley, New-York, 1953. 236.

шихся до момента t ; для всех положительных величин t γ_t есть случайная величина и совокупность величин γ_t ($0 \leq t < \infty$) представляет стохастический процесс. Если α_t и β_t - количество молекул типа **A** и **B**, в момент t , то очевидно $\alpha_t = A - \gamma_t$ и $\beta_t = B - \gamma_t$. Пусть $C = \min(A, B)$ и $w_n(t)$ - вероятность события $\gamma = n$ ($n = 0, 1, \dots, C$) и предположим что за время Δt произвольная молекула **A** соединяется с некоторой молекулой **B** с вероятностью $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$; тогда, вводя обозначение $h_n = (A - n)(B - n)$ получается система дифференциальных уравнений

$$(4) \quad W'_n(t) = \lambda [W_{n-1}(t) h_{n-1} - W_n(t) h_n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots, C),$$

из которой функции $W_n(t)$ могут быть определены шаг за шагом в явной форме.

Для практики достаточно знать среднюю величину количества молекул C , возникших до момента t , т. е. определить функции

$$(14) \quad C(t) = \sum_{k=0}^C n \cdot W_n(t)$$

Из уравнения (4) мы получаем, что $C(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(15) \quad C'(t) = \lambda (A - C(t)) (B - C(t)) + \lambda S^2(t)$$

т. е.

$$(16) \quad C'(t) = \lambda [M(\alpha_t) M(\beta_t) + D^2(\gamma_t)],$$

($M(\alpha_t)$ и $M(\beta_t)$ обозначают среднее количество молекул веществ **A** и **B**, в момент t , а $D^2(\gamma_t) = S^2(t)$ обозначает дисперсию количества молекул **C** возникших до момента t). Уравнение (16) может быть записано и в более простой форме (17) $C'(t) = \lambda \cdot M(\alpha_t \beta_t)$ где $M(\alpha_t \beta_t)$ обозначает среднюю величину произведения $\alpha \beta_t$. Так как $D^2(\gamma_t)$ мало по сравнению с $M(\alpha_t) \cdot M(\beta_t)$, то в первом приближении можно им пренебречь, и получается уравнение

$$(18) \quad C'(t) = \lambda (A - C(t)) (B - C(t)).$$

Это — кинетический закон действующих масс. Следовательно он имеет только приближенную силу

Бимолекулярные реакции, приводящие к равновесию, могут быть исследованы аналогично. Другая химическая проблема, проблема ионизации и рекомбинации, может быть исследована математически точно так же, как некоторый частный случай упомянутой проблемы. В том случае случайные флуктуации имеют предельное распределение, производящая функция которого может быть выражена полиномами Лагерра.

Определение стационарного предельного распределения флуктуаций возможно и при реакциях, приводящих к равновесию.

BETRACHTUNG CHEMISCHER REAKTIONEN MIT HILFE DER THEORIE DER STOCHASTISCHEN PROZESSE

VON A. RÉNYI

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt einige einfache Typen von chemischen Reaktionen mit Hilfe der Theorie der stochastischen Prozesse. Obwohl diese Behandlungsweise auch in verwickelteren Fällen angewandt werden kann, offenbaren sich die Vorzüge der zeitgemässen wahrscheinlichkeitstheoretischen Behandlung schon im einfachen Falle der bimolekulären Reaktionen. Gegenüber der in der Chemie üblichen, mehr oder

weniger heuristischen Methoden besitzt diese Behandlungsweise den Vorzug, dass sie mathematisch vollkommen exakt ist, somit zeigt, welche Voraussetzungen nötig sind, um bekannte Ergebnisse (z. B. das kinetische Massenwirkungsgesetz) ableiten zu können. Sie zeigt ausserdem, dass diese Ergebnisse nur näherungsweise gültig sind. Gleichzeitig gibt sie die auf die Mittelwerte bezüglichen genauen Zusammenhänge an. Sie bietet auch darin mehr als die übliche Behandlungsweise, dass sie nicht nur über die Mittelwerte, sondern auch über die Grösse der zufälligen Schwankungen unterrichtet. Das Ergebnis ist — wie dies zu erwarten war —, dass diese Schwankungen bei den in der Praxis vorkommenden Konzentrationen zu vernachlässigend klein sind und mit gewöhnlichen Beobachtungsmethoden nicht wahrgenommen werden können. Es können aber auch Fälle vorkommen, in denen es sich um Reaktionen zwischen sehr kleinen Mengen handelt, wodurch die erwähnten zufälligen Schwankungen wesentlich werden. Ihre Messung scheint auf der heutigen Stufe der Messtechnik möglich zu sein (z. B. mittelst radioaktiver Isotope). Der Verfasser ist der Meinung, die Tatsache ist auch nicht ohne Interesse, dass die Zulässigkeit des Vernachlässigens dieser Schwankungen mathematisch exakt nachgewiesen werden kann.

§ 1. behandelt jene Fälle der bimolekularen Reaktionen, in denen die Reaktion nur in einer Richtung vor sich geht; im § 2. wird auch der Fall berücksichtigt, in dem die entstandenen Molekeln zerfallen können, während sich der § 3. mit dem Problem der Ionisation und Rekombination beschäftigt. § 4. kehrt zur genaueren Untersuchung des im § 2. behandelten Problems zurück. Der Anhang enthält den genauen mathematischen Nachweis dessen, dass bei den in den §§ 2 und 3 behandelten Problemen ein Gleichgewichtszustand entsteht.

Das im § 1. behandelte Problem ist folgendes:

Die Stoffe **A** und **B** seien in einer Flüssigkeit gelöst. Es wird angenommen, dass, wenn eine Molekel des Stoffes **A** eine Molekel des Stoffes **B** begegnet, so vereinigen sich beide mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einer Molekel **C**. Man nehme ferner an, dass sich die **C**-Molekeln nicht wieder in **A**-bzw. **B**-Molekeln zurückentwickeln. Des weiteren seien in der Lösung im Zeitpunkt $t = 0$ eine Anzahl A von **A**-Molekeln und eine Anzahl B von **B**-Molekeln zugegen. Schliesslich bezeichne γ_t die Anzahl der **C**-Molekeln, die bis zum Zeitpunkt t entstanden sind. γ_t ist für jeden positiven Wert von t eine vom Zufall abhängige Grösse, eine *Zufallsveränderliche*. Somit bildet die Gesamtheit der Zufallsveränderlichen γ_t ($0 \leq t < \infty$) einen stochastischen Prozess. Bezeichnet α_t bzw. β_t die Anzahl der im Zeitpunkt t noch vorhandenen **A**- bzw. **B**-Molekeln, so ist offenbar $\alpha_t = A - \gamma_t$ und $\beta_t = B - \gamma_t$.

Es sei $C = \min(A, B)$ und es bezeichne $W_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit dessen, dass $\gamma_t = n$ ($n = 1, 2, \dots, C$) ist. Wenn wir nun annehmen, dass sich in der Zeit Δt eine beliebige **A** Molekel mit einer beliebigen, noch vorhandenen **B** Molekel mit der Wahrscheinlichkeit $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ vereinigt, dann gilt nach Einführung von,

$$(2) \quad h_n = (A - n)(B - n)$$

das Differentialgleichungssystem

$$(4) \quad W'_n(t) = \lambda [W_{n-1}(t) h_{n-1} - W_n(t) h_n] \quad (n = 0, 1, \dots, C),$$

woraus sich die Funktionen $W_n(t)$ sukzessive auch in expliziter Form bestimmen lassen.

Vom praktischen Standpunkt aus ist die Kenntnis der Erwartungswert der bis zum Zeitpunkt t entstandenen **C**-Molekeln, somit die Bestimmung der Funktion

$$(14) \quad C(t) = \sum_{n=0}^C n W_n(t)$$

erforderlich.

Aus der Gleichung (3) erhalten wir, dass $C(t)$ folgender Differentialgleichung genügt:

$$(15) \quad C'(t) = \lambda(A - C(t))(B - C(t)) + \lambda S^2(t),$$

somit ist

$$(16) \quad C'(t) = \lambda[M(a_t) M(\beta_t) + D^2(\gamma_t)],$$

wo $M(a_t)$ bzw. $M(\beta_t)$ die mittlere Anzahl der im Zeitpunkt t noch vorhandenen **A**- bzw. **B**-Molekeln, und $D^2(\gamma_t) = S^2(t)$ das Streuungsquadrat der bis zum Zeitpunkt t entstandenen **C**-Molekeln bezeichnet.

Die Gleichung (16) kann folgendermassen vereinfacht werden :

$$(17) \quad C'(t) = M(a_t \beta_t)$$

wobei $M(a_t \beta_t)$ den Mittelwert des Produkts $a_t \beta_t$ bedeutet.

Da $D^2(\gamma_t)$ gegenüber $M(a_t) M(\beta_t)$ ziemlich klein ist, kann es in erster Annäherung vernachlässigt werden, wodurch man die Gleichung

$$(18) \quad C'(t) = \lambda(A - C(t)) (B - C(t))$$

erhält.

Das ist das sogenannte kinetische Massenwirkungsgesetz, das *also nur näherungsweise gültig ist*.

Die zum Gleichgewichtszustand führenden bimolekularen Reaktionen können auf ähnliche Weise behandelt werden; analog kann auch ein anderes chemisches Problem, das Problem der Ionisation und Rekombination erledigt werden. Die zufälligen Schwankungen verschwinden beim Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ nicht, sondern besitzen eine Grenzverteilung; die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten kann durch Laguerresche Polynome ausgedrückt werden.

Die Bestimmung der stationären Grenzverteilung der Schwankungen kann auch bei den zum Gleichgewicht führenden bimolekulären Reaktionen durchgeführt werden.

HOSSZÚ LÁNCMOLEKULÁK BOMLÁSI FOLYAMATÁNAK VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSA

PRÉKOPA ANDRÁS

Összefoglalás

R. Simha egy dolgozatában a hosszú láncmolekulák bomlási folyamatára vonatkozólag felállított egy differenciálegyenletrendszert, melyben az ismeretlen függvények a különböző hosszúságú láncmolekulák számának időbeli változását adják meg. Ennek az egyenletrendszernek a felállítását *R. Simha* nem indokolja.

Az 1. § célja, hogy a *Simha*-féle egyenleteket statisztikus úton igazolja és általánosítsa.

A 2. § a bomlási folyamat azon speciális esetével foglalkozik, amikor valamennyi kötés egyenrangú. A különböző hosszúságú láncmolekulák számának szórása és egymás közötti korrelációs együtthatója is ki van számítva.

A 3. § az átlagos molekulatömeg várható értékének a kiszámításával foglalkozik. A szerző precíz úton levezet egy formulát és megbecsüli az eltérést a mások által korábban nem precíz úton kapott formulától.

A kémiai reakció-kinetikában egy igen fontos fejezetet alkot a hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának a vizsgálata. A vizsgálatok általában arra az esetre vonatkoznak, amikor a vegyület minden egyes molekulája bizonyos számú azonos egységből épül fel olymódon, hogy ezek az egységek egymás mellé kapcsolva láncot alkotnak. Ha az ilyen láncmolekulákból álló polimert hidrolizáljuk, vagy általában olyan hatásnak vetjük alá, mely a láncokban szereplő kötések megtagadja és felbontja, akkor egy időbeli véletlen folyamat jön létre, melyben a hosszabb láncmolekulák véletlenszerűen rövidebb láncmolekulákra bomlanak fel.

A bomlási folyamattal kapcsolatban felmerülő két legfontosabb probléma a következő: ha a hidrolízis a $t = 0$ időpontban kezdődött, mennyi a t időpontban a polimerben található egységből álló molekulák számának a várható értéke; mennyi a t időpontban a vegyület molekuláinak az átlagos tömege. Ez a cikk ezen problémák tárgyalásával foglalkozik.

R. Simha egy publikációjában [2] felállít egy differenciálegyenletrendszert amelyben az ismeretlen függvények: $N(n, t)$, $N(n-1, t)$, ..., $N(2, t)$, ahol $N(k, t)$ jelenti a k -merek számát a t időpontban.*

* $N(1, t)$ kiszámítható a $\sum_{k=1}^n kN(k, t) = N$ azonosságból, amely azt fejezi ki, hogy a folyamat alatt az összes egységek száma nem változik.

Ennek az egyenletrendszernek az érvényessége azonban nincs megindokolva. Az 1. § célja, hogy kimutassa, hogy a lineáris láncok bomlási folyamatának a legáltalánosabb esetében, ha $N(k, t)$ -vel ($k = 2, 3, \dots, n$) jelöljük a k -merek számának várható értékét a t időpontban, az $N(k, t)$ ($k = 2, 3, \dots, N$) függvényekre a Simha-féle differenciálegyenletekhez hasonló egyenletek állnak fenn, amelyek speciális esetben megegyeznek a Simha által közöltekkel.

A 2. § azzal a speciális esettel foglalkozik, amelyben minden kötés egyenrangú, függetlenül attól, hogy milyen hosszú láncmolekulában és ott is milyen helyen található.

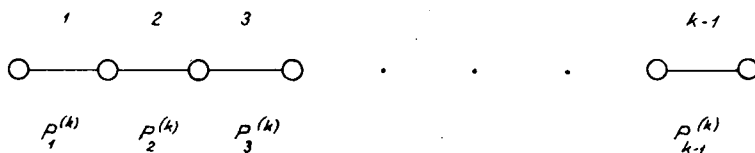
Ezen § (7) és (14) képletét *E. W. Montroll* és *R. Simha* egy közös publikációjukban már levezették. Az itt tárgyalt speciális esettel kapcsolatban azonban a különböző hosszúságú láncmolekulák számának várható értékén kívül még más mennyiségeket is megvizsgálunk, amelyek az előbbi szerzőknél nem szerepeltek.

A 3. § a t időpontban jelenlévő molekulák átlagos tömege valószínűség-számítási értelemben vett várható értékének a kiszámításával foglalkozik. Itt nincs feltéve, hogy a molekulák lineáris láncot alkotnak, hanem egy kevésbé korlátozó feltételnek eleget tevő molekulatípusra vannak elvégezve a számítások. Lineáris láncmolekulák esetére *R. Simha* [2] közöl egy értéket, melynek a bizonyításánál azonban elköveti azt a hibát, hogy egy ξ valószínűségi változó reciprok értékének a várható értékét a várható érték reciprokával azonosítja. A Simha által kapott eredmény azonban gyakran jól megközelíti a pontos számítások által kapott eredményt. A két érték közötti eltérés nagyságrendjének megbecsülésével ez a § részletesen foglalkozik.

1. §

A differenciálegyenletrendszer levezetése

Jelöljük a $t = 0$ időpontban jelenlévő k -merek számát $N(k, 0)$ -val ($k = 1, 2, \dots, n$); n a polimerben előforduló leghosszabb lánc egységeinek a számát jelenti. $N(k, t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) pedig jelentse a k -merek számának várható értékét a t időpontban. Számozzuk meg minden egyes láncmolekula kötéseit és jelöljük annak a valószínűségét, hogy egy k egységből álló lánc- i -edik kötése a $(0, t)$ idő alatt elbomlik $P_i^{(k)}(t)$ -vel, vagy csak röviden $P_i^{(k)}$ -val.



1. ábra

A láncmolekulák bomlására vonatkozólag ebben a §-ban csak annyit teszünk fel, hogy az egyes kötések bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe.

Annak a valószínűsége, hogy egy k -mer i -edik kötése a $(t, t + \Delta t)$ idő alatt elbomoljék, az előbbieket szerint $P_i^{(k)}(t + \Delta t) - P_i^{(k)}(t)$, tehát ennek

alapján az a feltételes valószínűség, hogy egy k -mer i -edik kötése a $(t, t + \Delta t)$ idő alatt elbomoljék, feltéve, hogy a $(0, t)$ időben még nem bomlott el a következő :

$$(1) \quad \frac{P_i^{(k)}(t + \Delta t) - P_i^{(k)}(t)}{1 - P_i^{(k)}(t)}.$$

Ha bevezetjük a következő jelölést :*

$$(2) \quad \frac{dP_i^{(k)}(t)}{dt} (1 - P_i^{(k)}(t)) = \gamma_i^{(k)}(t),$$

akkor (1) a következő alakba írható :

$$(3) \quad \frac{P_i^{(k)}(t + \Delta t) - P_i^{(k)}(t)}{1 - P_i^{(k)}(t)} = \gamma_i^{(k)}(t) + o(\Delta t)$$

ahol $o(\Delta t)$ olyan mennyiséget jelöl, melyre $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$.

Jelöljük $\zeta(k, t)$ -vel ($k = 1, 2, \dots, n$) a k -merek számát a t időpontban, $\zeta(k, t)$ valószínűségi változó, tehát olyan mennyiség, amelynek értéke a véletlentől függ. $\zeta(k, t)$ várható értéke $N(k, t)$, vagyis

$$(4) \quad M(\zeta(k, t)) = N(k, t), (k = 1, 2, \dots, n).$$

Legyen továbbá $P(a_k, t)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban a_k számú k -mer és $P(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, t)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban a_k k -mer, a_{k+1} $k+1$ -mer, \dots , a_n n -mer van jelen :

$$(5) \quad \begin{cases} P(\zeta(k, t) = a_k) = P(a_k, t), \\ P(\zeta(k, t) = a_k, \dots, \zeta(n, t) = a_n) = P(a_1, \dots, a_n, t). \end{cases}$$

Az az esemény, hogy a $t + \Delta t$ időpontban a_k számú k -mer van jelen, az alább felsorolt esetekben következhet be.

A t időpontban a_k k -mer és bizonyos számú $k+1$ -mer, \dots , n -mer van és a Δt idő alatt egy k -mer sem bomlik el, továbbá a hosszabb láncok közül sem bomlik el egy sem olyan helyen, hogy ezáltal újabb k -mer keletkezik. Ennek a valószínűsége ($\gamma_i^{(k)}(t)$ helyett röviden $\gamma_i^{(k)}$ -t írva) :

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [1 - a_k(\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) \Delta t - \\ - a_{k+1}(\gamma_1^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+1)}) \Delta t - \dots - a_n(\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)}) \Delta t] + o(\Delta t) \end{cases}$$

A t időpontban $a_k + 1$ k -mer van és ezek közül pontosan egy a Δt idő alatt elbomlik. Ennek a valószínűsége :

$$(7) \quad P(a_k + 1, t) (a_k + 1) (\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) \Delta t + o(\Delta t).$$

* $P_i^{(k)}(t)$ -ről felteszem, hogy differenciálható.

A t időpontban $a_k - 1$ k -mer és bizonyos számú $k + 1$ -mer, ..., n -mer van és a legalább $k + 1$ egységet tartalmazó láncok közül valamelyikből a Δt idő alatt keletkezik pontosan egy k -mer. Ennek a valószínűsége :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [a_{k+1} (\gamma_1^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+1)}) + \dots + \\ + a_{2k-1} (\gamma_{k-1}^{(2k-1)} + \gamma_k^{(2k-1)}) + a_{2k+1} (\gamma_{k+1}^{(2k+1)} + \gamma_k^{(2k+1)}) + \dots + \\ + a_n (\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)})] \Delta t + o(\Delta t) \end{array} \right.$$

A t időpontban $a_k - 2$ k -mer és bizonyos számú $k + 1$ -mer, ..., n -mer van, és a jelenlévő $2k$ -merek egyike a Δt idő alatt kettéhasad és két k -mer keletkezik. Ennek a valószínűsége :

$$(9) \quad \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 2, a_{k+1}, \dots, a_n) a_{2k} \gamma_k^{(2k)} \Delta t + o(\Delta t).$$

Végül az az eset is lehetséges, hogy a t időpontban $a_k + 1$ -nél több, vagy $a_k - 2$ -nél kevesebb k -mer van és a Δt idő alatt annyi megfelelő helyen lévő kötés bomlik el, amennyi szükséges ahhoz, hogy a $t + \Delta t$ időpontban már a_k k -mer legyen. Ehhez azonban az szükséges, hogy a Δt idő alatt legalább két kötés bomljék fel. Mivel mindegyik kötés Δt idő alatti elbomlásának a valószínűsége valamilyen i, k értékekhez tartozó (3) kifejezés és feltevés szerint az egyes kötések bomlásai egymástól függetlenek, tehát ennek az utolsó esetnek a valószínűsége legalább két (3) alakú kifejezés szorzata, vagyis $o(\Delta t)$.

Az előbbieket alapján

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(a_k, t + \Delta t) = \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [1 - \\ - a_k (\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) \Delta t - a_{k+1} (\gamma_k^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+2)}) \Delta t - \dots - \\ - a_n (\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)}) \Delta t] + \\ + P(a_k + 1, t) (a_k + 1) (\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) \Delta t + \\ + \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [a_{k+1} (\gamma_1^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+1)}) + \\ + \dots + a_{2k-1} (\gamma_{k-1}^{(2k-1)} + \gamma_k^{(2k-1)}) + a_{2k+1} (\gamma_{k+1}^{(2k+1)} + \gamma_k^{(2k+1)}) + \\ + \dots + a_n (\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)})] \Delta t + \\ + \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 2, a_{k+1}, \dots, a_n) a_{2k} \gamma_k^{(2k)} \Delta t + o(\Delta t) \end{array} \right.$$

Mivel

$$\sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, t) = P(a_k, t),$$

ezért ha ezt a tagot a másik oldalra átvisszük és elvégezzük a $\Delta t \rightarrow 0$ határmenetet, akkor a következő azonosságot kapjuk :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dP(a_k, t)}{dt} = & - \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [a_k (\gamma_1^{(k)} + \\ & + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) + a_{k+1} (\gamma_1^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+1)}) + \dots + \\ & + a_n (\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)})] + \\ & + P(a_k + 1, t) (a_k + 1) (\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) + \\ & + \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_n, t) [a_{k+1} (\gamma_1^{(k+1)} + \gamma_k^{(k+1)}) + \dots + \\ & + a_{2k-1} (\gamma_{k-1}^{(2k-1)} + \gamma_k^{(2k-1)}) + a_{2k+1} (\gamma_{k+1}^{(2k+1)} + \gamma_k^{(2k+1)}) + \dots + \\ & + a_n (\gamma_{n-k}^{(n)} + \gamma_k^{(n)})] + \sum_{a_{k+1}, \dots, a_n} P(a_k - 2, a_{k+1}, \dots, a_n, t) a_{2k} \gamma_k^{(2k)}. \end{aligned} \right.$$

Szorozzuk be (11) mindkét oldalát a_k -val és összegezzünk a_k -ra vonatkozólag, akkor a baloldalon $\frac{dN(k, t)}{dt}$ -t kapunk ; a jobboldalon figyelembe véve, hogy $a_k (a_k + 1) = (a_k + 1)^2 - (a_k + 1)$, az első sor első tagja és a második sor együtt $-(\gamma_1^{(k)} + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}) N(k, t)$ -t adnak és hasonló megfontolással belátható, hogy ha az első sor többi tagjait a többi sorok megfelelő tagjaival összefoglaljuk, akkor a következő differenciálegyenlet-rendszert kapjuk :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN(k, t)}{dt} = & - (\gamma_1^{(k)}(t) + \dots + \gamma_{k-1}^{(k)}(t)) N(k, t) + \\ & + (\gamma_1^{(k+1)}(t) + \gamma_k^{(k+1)}(t)) N(k+1, t) + \dots + \\ & + (\gamma_{n-k}^{(n)}(t) + \gamma_k^{(n)}(t)) N(n, t), \quad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

Abban az esetben, ha $\gamma_i^{(k)}(t)$ nem függ az időtől, vagyis ha $\gamma_i^{(k)}(t) = \lambda_i^{(k)}$ ahol $\lambda_i^{(k)}$ állandó, a (3) összefüggés a következő alakot nyeri :

$$(13) \quad \frac{P_i^{(k)}(t + \Delta t) - P_i^{(k)}(t)}{1 - P_i^{(k)}(t)} = \lambda_i^{(k)} \Delta t + o(\Delta t),$$

vagyis ebben az esetben annak a valószínűsége, hogy a kötés a $(t, t + \Delta t)$ idő alatt elbomlik, feltéve, hogy a $(0, t)$ idő alatt még nem bomlott el, kis Δt esetén arányos ennek a kis időintervallumnak a hosszával és nem függ attól, hogy hol van elhelyezve a Δt szakasz az időtengelyen. Ha (12)-ben $\gamma_i^{(k)}(t)$ helyett mindenütt $\lambda_i^{(k)}$ -t írunk, akkor megkapjuk a Simha által közölt egyenleteket, amivel tehát ezen egyenletek fennállása statisztikusan igazolva van.

Vizsgáljuk meg most $\lambda_i^{(k)}$ szemléletes jelentését. Először (13) alapján határozzuk meg a $P_i^{(k)}(t)$ valószínűségeket. Mindkét oldalt Δt -vel osztva és elvégezve a $\Delta t \rightarrow 0$ határmenetet, azt kapjuk, hogy

$$(14) \quad \frac{dP_i^{(k)}(t)}{dt} \bigg/ (1 - P_i^{(k)}(t)) = \lambda_i^{(k)}.$$

Ezt a differenciálegyenletet a $P_i^{(k)}(0) = 0$ feltétel mellett a

$$(15) \quad P_i^{(k)}(t) = 1 - e^{-\lambda_i^{(k)} t}$$

függvény oldja meg. Ez tehát a valószínűsége annak, hogy a $(0, t)$ idő alatt egy k -mer i -edik kötése elbomoljék. Számítsuk ki most a kötések átlagos élettartamát (15) alapján

$$(16) \quad \int_0^\infty t \frac{dP_i^{(k)}(t)}{dt} dt = \lambda_i^{(k)} \int_0^\infty t e^{-\lambda_i^{(k)} t} dt = \frac{1}{\lambda_i^{(k)}}.$$

$\lambda_i^{(k)}$ szemléletes jelentése tehát az, hogy a reciprok értéke megadja akármelyik k -mer i -edik kötésének az átlagos élettartamát, ahol $N_i(k, t)$ egy eredetileg i -merből a $(0, t)$ idő alatt létrejött k -merek átlagos számát jelenti, amely a (10) összefüggésből kapható meg, ha ott k helyébe i -t írunk.

2. §

Egy speciális eset

Ebben a §-ban azt az esetet vizsgálom, amikor $\gamma_i^{(k)}(t) = \lambda(t)$, $P_i^{(k)}(t) = P(t)$ és k minden értékére.* Ez annyit jelent, hogy minden kötés egyenrangú, egyik sincs kitüntetve a másikkal szemben. Az 1. §-ban található feltevést, hogy az egyes kötések bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe, továbbra is megtartom. Ki fogom számítani $\xi(k, t)$ ($k = 1, \dots, n$) várható értékét, szórását, valamint $\xi(i, t)$ és $\xi(k, t)$ korrelációs együtthatóját. Ahelyett, hogy a (12) differenciálegyenletrendszer megoldanám, ismét direkt úton fogok eljárni. Egyrészt azért, mert az 1. § (12) differenciálegyenletei nem lesznek állandó együtthatósak és megoldásuk ezért nehézkes lenne, másrészt pedig azért, mert a két utóbbi mennyiség kiszámításához az 1. § (12) egyenletrendszerre nem is elegendő.

Ebben a §-ban a számításokat először mindig arra az esetre végzem el, amikor a $t = 0$ időpontban egyetlen n egységből álló láncmolekula van jelen, és az így kapott eredmények felhasználásával tárgyalom az általános esetet.

* $P(t)$ -t — t átlagos depolimerációs fokának is szokták nevezni, mert annak a valószínűsége, hogy egy $n - 1$ kötést tartalmazó lánc a $(0, t)$ idő alatt l helyen elszakadjon, $\binom{n-1}{l} P^l (1 - P)^{n-1-l}$ és így a $(0, t)$ idő alatt elszakadt kötések átlagos száma $(n - 1)P$. Ha ezt elosztjuk a kötések számával, megkapjuk $P(t)$ -t.

Először kiszámítom annak a valószínűségét, hogy a t időpontban a_1 monomer, ..., a_n n -mer van jelen. Ebben az esetben az el nem bomlott kötések száma :

$$(1) \quad a_2 + 2a_3 + \dots + (n-1)a_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n - \sum_{i=1}^n a_i = n - \sum_{i=1}^n a_i$$

az elbomlott kötések száma pedig

$$(2) \quad n - 1 - \left(n - \sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i - 1.$$

Általában egy adott a_1 monomer-, a_2 dimer-, ..., a_n n -merből álló állapotból a többi hasonló állapotokat úgy kapjuk meg, ha képezzük az összes láncok minden olyan lehetséges permutációit, amelyekben az egyenlő hosszúságú láncokat azonos elemeknek tekintjük. Így az összes ilyen állapotok száma

$$(3) \quad \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!}{a_1! a_2! \dots a_n!}$$

és ezért egy ilyen állapot létrejöttének a valószínűsége

$$(4) \quad P(a_1, \dots, a_n, t) = \frac{(1-P)^n}{P} \frac{(a_1 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{a_1 + \dots + a_n}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$(5) \quad \frac{(1-P)^n}{P} \sum_{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n} \frac{(a_1 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{a_1 + \dots + a_n} = 1$$

ahol az összegezés minden olyan a_1, \dots, a_n értékrendszerre van kiterjesztve, amelyre $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$. Ha $a_n = 1$, akkor $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ és így

$$(6) \quad P(0, \dots, 0, 1, t) = (1-P)^{n-1}$$

Jelöljük $N_i(k, t)$ -vel az egy i -merből a $(0, t)$ idő alatt keletkezett k -merek átlagos számát, akkor (6) alapján, mivel csak az $a_n = 1$ és $a_n = 0$ esetek lehetségesek,

$$(7) \quad N_n(n, t) = (1-P(t))^{n-1}$$

Legyen most $1 \leq k \leq n-1$. (4) alapján a k -merek számának várható értéke :

$$(8) \quad N_n(k, t) = \frac{(1-P)^n}{P} \sum_{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n} a_k \frac{(a_1 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{a_1 + \dots + a_n}$$

Nyilván elegendő az összegezést az a_1, \dots, a_n értékrendszerek közül csak azokra elvégezni, amelyekben $a_k \neq 0$. Ennek alapján

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} N_n(k, t) &= \\ &= \frac{(1-P)^n}{P} \sum_{a_1+2a_2+\dots+na_n=n} \frac{(a_1+\dots+a_n)!}{a_1! \dots (a_k-1)! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_n} = \\ &= (1-P)^{n-1} \sum_{a_1+2a_2+\dots+k(a_k-1)+\dots+na_n=n-k} (a_1+\dots+a_k-1+\dots+a_n) \\ &\quad \frac{(a_1+\dots+a_k-1+\dots+a_n)!}{a_1! \dots (a_k-1)! \dots a_n!} : \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_k-1+\dots+a_n} + \\ &+ (1-P)^{n-1} \sum_{a_1+2a_2+\dots+k(a_k-1)+\dots+na_n=n-k} \frac{(a_1+\dots+a_k-1+\dots+a_n)!}{a_1! \dots (a_k-1)! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_k-1+\dots+a_n} \end{aligned} \right.$$

Jelöljük az $a_1, \dots, a_k-1, \dots, a_n$ értékeket $b_1, \dots, b_k, \dots, b_n$ -nel. Mivel a b_1, \dots, b_n értékek nem negatívak, $b_1+2b_2+\dots+nb_n=n-k$ csak úgy állhat fenn, ha $b_1+2b_2+\dots+(n-k)b_{n-k}=n-k$ és $b_{n-k+1}=\dots=b_n=0$. Így (9) szerint a k -merek számának várható értéke:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} N_n(k, t) &= P(1-P)^{k-1} \frac{(1-P)^{n-k}}{P} \cdot \\ &\cdot \sum_{b_1+2b_2+\dots+(n-k)b_{n-k}=n-k} (b_1+\dots+b_{n-k}) \frac{(b_1+\dots+b_{n-k})!}{b_1! \dots b_{n-k}!} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{b_1+\dots+b_{n-k}} + \\ &+ P(1-P)^{k-1} \frac{(1-P)^{n-k}}{P} \sum_{b_1+2b_2+\dots+(n-k)b_{n-k}=n-k} \frac{(b_1+\dots+b_{n-k})!}{b_1! \dots b_{n-k}!} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{b_1+\dots+b_{n-k}} \end{aligned} \right.$$

(5) alapján (10) második sora $P(1-P)^{k-1}$ -gyel egyenlő, az első sora pedig a $P(1-P)^{k-1}$ szorzótól eltekintve nem más, mint egy (eredetileg) $n-k$ -merből keletkezett összes láncok átlagos száma. Ezt egyszerű meggondolással kiszámíthatjuk.

A keletkezett láncmolekulák száma mindig eggyel több, mint az elbomlott kötések száma. Ha tehát kiszámítjuk az elbomlott kötések átlagos számát és ezt az értéket megnöveljük 1-gyel, akkor megkapjuk az összes keletkezett láncmolekulák átlagos számát. Mivel egy $n-k$ -merben $n-k-1$ kötés van, tehát annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan l bomolják el a $(0, t)$ idő alatt

$$(11) \quad \binom{n-k-1}{l} P^l (1-P)^{n-k-1-l}$$

és az így elbomlott kötések átlagos száma

$$(12) \quad \sum_{l=0}^{n-k-1} l \binom{n-k-1}{l} P^l (1-P)^{n-k-1-l} = (n-k-1)P$$

Vagyis a keletkezett láncmolekulák átlagos száma

$$(13) \quad (n-k-1)P + 1$$

(10) és (13) alapján a k -merek számának a várható értéke :*

$$(14) \quad N_n(k, t) = P(1-P)^{k-1} (2 + (n-k-1)P), \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Abban az esetben, ha $\lambda(t) = \lambda$ állandó, az 1. § (15) képletéhez hasonlóan

$$(15) \quad P(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

ahol $\frac{1}{\lambda}$ megadja egy kötés átlagos élettartamát :

$$(16) \quad \int_0^{\infty} t P'(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Jelentse $N(k, t)$ a polimerben a t időpontban található összes k -merek számának a várható értékét, $N_i(k, t)$ ($k = 1, 2, \dots, i$; $i = 1, 2, \dots, n$) pedig az egy (eredetileg) i -merből a $(0, t)$ idő alatt létrejött összes k -merek számának a várható értékét, akkor (7) és (14) alapján

$$(17) \quad \begin{cases} N(k, t) = N(k, 0)(1-P)^{k-1} + \sum_{i=k+1}^n N(i, 0)P(1-P)^{i-1}(2 + (i-k-1)P) \\ N(n, t) = N(n, 0)(1-P)^{n-1} \end{cases}$$

Számítsuk ki most a k -merek számának a szórását, miközben csak egy, n egységből álló láncmolekulát tekintünk. (4) alapján ($\sigma_n(k, t)$ -vel jelölve ezt a mennyiséget) :

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_n^2(k, t) + N_n^2(k, t) = \sum_{a_1+2a_2+\dots+na_n=n} a_k^2 P(a_1, \dots, a_n, t) = \\ = \sum_{a_1+2a_2+\dots+na_n=n} a_k(a_k-1) \frac{(a_1+\dots+a_n)!}{a_1! \dots a_n!} \frac{(1-P)^n}{P} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_n} + \\ + N_n(k, t) \end{cases}$$

* Ezek a formulák megegyeznek az E. W. Montroll és R. Simha által levezetettekkel.

(18) második sorában az összegezést elegendő azon értékrendszerekre elvégezni, amelyekben $a_k \neq 0$ és $a_k \neq 1$. Legyen először $2k < n$. (18) alapján

$$\begin{aligned}
 & \sigma_n^2(k; t) + N_n^2(k, t) - N_n(k, t) = P(1-P)^{n-2}. \\
 (19) \quad & \sum_{a_1+2a_2+\dots+na_n=n} (a_1 + \dots + a_n)(a_1 + \dots + a_n - 1) \\
 & \frac{(a_1 + \dots + a_n - 2)!}{a_1! \dots (a_k - 2)! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{a_1 + \dots + a_n - 2} = \\
 & = P(1-P)^{n-2} \sum_{a_1+2a_2+\dots+k(a_k-2)+\dots+na_n=n-2k} (a_1 + \dots + a_k - 2 + \dots + a_n - 1 + 3) \\
 & (a_1 + \dots + a_k - 2 + \dots + a_n - 1 + 2) \cdot \\
 & \frac{(a_1 + \dots + a_k - 2 + \dots + a_n)!}{a_1! \dots (a_k - 2)! \dots a_n!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{a_1 + \dots + a_k - 2 + \dots + a_n}
 \end{aligned}$$

Ha (19)-ben bevezetjük az $a_1, \dots, a_k - 2, \dots, a_n$ számokra a b_1, \dots, b_n jelölést, az összegezésben nyilván csak b_1, \dots, b_{n-2k} szerepel, $b_{n-2k+1} = \dots = b_n = 0$.

Vegyük figyelembe, hogy $b_1 + \dots + b_{n-2k} - 1$ az elbomlott kötések számát adja meg az (eredetileg) $n - 2k$ egységből álló láncmolekulára vonatkozólag. Az elbomlott kötések száma pedig binomiális eloszlást követ $(n - 2k - 1)P$ átlaggal és $(n - 2k - 1)P(1 - P)$ szórásnégyzettel. Ennek alapján

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & P^2 (1-P)^{2(k-1)} \frac{(1-P)^{n-2k}}{P} \sum_{b_1+2b_2+\dots+(n-2k)b_{n-2k}=n-2k} (b_1 + \dots + \\ & + b_{n-2k-1})^2 \frac{(b_1 + \dots + b_{n-2k})!}{b_1! \dots b_{n-2k}!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{b_1 + \dots + b_{n-2k}} = \\ & = P^2 (1-P)^{2(k-1)} ((n-2k-1)P(1-P) + (n-2k-1)^2 P^2) \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & 5P^2 (1-P)^{2(k-1)} \frac{(1-P)^{n-2k}}{P} \sum_{b_1+2b_2+\dots+(n-2k)b_{n-2k}=n-2k} (b_1 + \dots + \\ & + b_{n-2k-1}) \frac{(b_1 + \dots + b_{n-2k})!}{b_1! \dots b_{n-2k}!} \left(\frac{P}{1-P} \right)^{b_1 + \dots + b_{n-2k}} = \\ & = 5P^2 (1-P)^{2k-1} (n-2k-1)P \end{aligned} \right.$$

és így

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sigma_n^2(k, t) = N_n(k, t) - N_n^2(k, t) + P^2 (1-P)^{2(k-1)} \cdot \\ & \cdot ((n-2k-1)^2 P^2 + (n-2k-1)P(6-P) + 6) \end{aligned} \right.$$

Ha $n = 2k$, akkor a szórás a következőképpen számíthatjuk ki: $\zeta_n(k, t)$ csak a 0 és 2 értékeket veheti fel,* az utóbbit $P(1 - P)^{2(k-1)}$ valószínűséggel. (14) figyelembevételével

$$(23) \quad \sigma_n^2(k, t) = 4P(1 - P)^{2(k-1)} - P^2(1 - P)^{2(k-1)}(2 + (k-1)P)^2.$$

Ha pedig $2k > n$, akkor $\zeta_n(k, t)$ csak a 0 és 1 értéket veszi fel, mégpedig az utóbbit $P(1 - P)^{k-1}(2 + (n - k - 1)P)$ valószínűséggel. Ugyanis egy n -merből egy k -mer úgy keletkezhetik (ha $k > \frac{n}{2}$), hogy vagy az első, vagy az utolsó k egység válik le egészben, vagy a lánc közepéből szakad ki egy k -mer; az utóbbi $n - k - 1$ módon lehetséges. (14) figyelembevételével

$$(24) \quad \sigma_n^2(k, t) = P(1 - P)^{k-1}(2 + (n - k - 1)P)(1 - P(1 - P)^{k-1}(2 + (n - k - 1)P)).$$

Ha eredetileg $N(n, 0)$ n -merünk van, akkor tekintve, hogy az egyes láncok bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe, a különböző láncokból származó k -merek számai egymástól független valószínűségi változók, tehát szórásnégyzeteik összeadódnak és így az összes k -merek számának a szórásnégyzetét úgy kapjuk meg, hogy a (22), (23) és a (24) kifejezéseket $N(n, 0)$ -val megszorozzuk. Ha pedig a 0 időpontban $N(l, 0)$ l -merünk van ($l = 1, \dots, n$), akkor az összes k -merek szórásnégyzetét a következő kifejezés adja

$$(25) \quad \sigma^2(k, t) = \sum_{i=k}^n N(i, 0) \sigma_i^2(k, t),$$

Most megbecsülöm a $\sigma^2(k, t) / N^2(k, t)$ hányados nagyságrendjét. Egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozom, amikor $N(l, 0) = 0$, ha $l = 1, 2, \dots, n - 1$. Legyen először $k < \frac{n}{2}$, (17), (22) és (25) alapján

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2(k, t)}{N^2(k, t)} &= \frac{N(n, 0) \sigma_n^2(k, t)}{N^2(n, 0) N_n^2(k, t)} = \\ &= \frac{P(1 - P)^{k-1}(2 + (n - k - 1)P) + P^2(1 - P)^{2(k-1)}(n - 2k - 1)^2}{N(n, 0) P^2(1 - P)^{2(k-1)}(2(n - k - 1)P)^2} + \\ &+ \frac{P^2(1 - P)^{2(k-1)}((n - 2k - 1)P((6 - P + 6 - (2 + (n - k - 1)P^2)))}{N(n, 0) P^2(1 - P)^{2(k-1)}(2(n - k - 1)P)^2} < \\ &< \frac{1}{N(n, 0) N_n(k, t)} + \frac{1}{N(n, 0)} = \frac{1}{N(k, t)} + \frac{1}{N(n, 0)} \end{aligned}$$

és így

$$(26) \quad \frac{\sigma^2(k, t)}{N^2(k, t)} < \frac{1}{N(k, t)} + \frac{1}{N(n, 0)}.$$

* $\zeta_n(k, t)$ jelöli az egy láncmolekulából keletkezett k -merek számát a t időpontban.

Ha $2k = n$, akkor (23) alapján

$$(27) \quad \frac{\sigma^2(k, t)}{N^2(k, t)} < \frac{2}{PN(n, 0)},$$

ha pedig $k > \frac{n}{2}$ akkor (24) alapján

$$(28) \quad \frac{\sigma^2(k, t)}{N^2(k, t)} < \frac{1}{N(k, t)} - \frac{1}{N(n, 0)} < \frac{1}{N(k, t)} + \frac{1}{N(n, 0)}.$$

Jelöljük $\zeta(k, t)$ -vel az összes k -merek számát a t időpontban és alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget az $N(k, t)$ körüli ingadozások megbecslésére. Eszerint

$$(29) \quad P\left(|\xi(k, t) - N(k, t)| > \frac{N(k, t)}{10^s}\right) \leq \frac{10^s \sigma^2(k, t)}{N^2(k, t)}.$$

(26), (28) és (29) alapján, továbbá, ha $2k \neq n$ és $N(k, t)/10^s = A$, akkor

$$(30) \quad P(|\xi(k, t) - N(k, t)| > A) \leq \frac{1}{A} + \frac{1}{N(n, 0)}.$$

Végül kiszámítom az i és k -merek számának a korrelációs együtthatóját $\varrho[\zeta(i, t), \zeta(k, t)]$ -t, ($i \neq k$). Felteszem, hogy $N(l, 0) = 0$ ($l = 1, \dots, n-1$). Az előbb mondottak szerint

$$(31) \quad \xi(i, t) = \sum_{r=1}^{N(n, 0)} \xi_n^{(r)}(i, t), \quad \xi(k, t) = \sum_{r=1}^{N(n, 0)} \xi_n^{(r)}(k, t),$$

ahol $\xi_n^{(r)}(i, t)$ és $\xi_n^{(r)}(k, t)$ az r -edik n -merből származott i és k -merek számát jelentik.

$\xi_n^{(l)}(i, t)$ és $\xi_n^{(r)}(k, t)$ ($l \neq r$; $i, k = 1, \dots, n$) függetlenek, tekintve, hogy a láncok bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe, ezért, mint könnyen belátható,

$$(32) \quad \varrho(\xi(i, t), \xi(k, t)) = \varrho(\xi_n^{(r)}(i, t), \xi_n^{(r)}(k, t), (r = 1, \dots, N(n, 0))).$$

A továbbiakban éppen ezért a felső indexet elhagyom és csak egyetlen láncmolekulával foglalkozom. Mivel

$$(33) \quad \varrho(\xi_n(i, t), \xi_n(k, t)) = \frac{M(\xi_n(i, t) \cdot \xi_n(k, t)) - N_n(i, t) N_n(k, t)}{\sigma_n(i, t) \sigma_n(k, t)},$$

tehát csupán $M(\xi_n(i, t) \cdot \xi_n(k, t))$ -t kell kiszámítani.

Ha $i + k > n$, akkor $M(\xi_n(i, t) \cdot \xi_n(k, t)) = 0$, tekintve, hogy ebben az esetben vagy i vagy k 0-val egyenlő. Ha $i + k = n$, akkor

$$(34) \quad M(\xi_n(i, t) \cdot \xi_n(k, t)) = P(\xi_n(i, t) = 1, \xi_n(k, t) = 1) = \begin{cases} P(1-P)^{i+k-2} \\ 2P(1-P)^{i+k-2} \end{cases}$$

aszerint, hogy $i = k$ illetve $i \neq k$.

Végül az $i + k < n$ esetben $M(\xi_n(i, t) \xi_n(k, t))$ kiszámítására a $\sigma_n^2(k, t)$ kiszámításánál használt módszer szószerint alkalmazható. Ha az ott szereplő megfontolásokat végigvisszük, akkor azt kapjuk, hogy

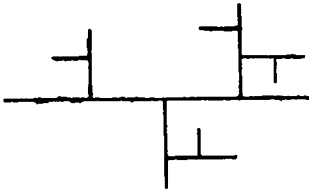
$$(35) \quad \begin{cases} M(\xi_n(i, t) \cdot \xi_n(k, t)) = P^2(1-P)^{i+k-2} [(n-i-k-1)P(1-P) + \\ + (n-i-k-1)^2 P^2 + 5(n-i-k-1)P + 6]. \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy ha $P(t) \rightarrow 1$ ha $t \rightarrow \infty$ (ami a $P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ esetben teljesül), akkor

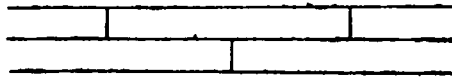
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\xi(i, t) \cdot \xi(k, t)) = 0, \quad (i \neq k; \quad i, k = 1, \dots, n).$$

4. §. Az átlagos molekulatömeg kiszámítása

Ebben a §-ban nem teszem fel, hogy a vegyületben szereplő molekulák lineárisak, hanem tetszőleges alakúak is lehetnek, csupán azt kötöm ki, hogy az elbomlás szempontjából minden egyes kötés egyenrangú és egy kötés szakadása által a molekula kettéfelé válik. A tekintendő molekulák tehát lehetnek elágazók (2. ábra), de nem lehetnek hálózatosak (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

Felteszem még, hogy az egyes kötések bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe (ebből következik, hogy az egyes molekulák is egymástól függetlenül bomlanak és hogy a bomlás szempontjából minden kötés egyenrangú, függetlenül attól, hogy milyen nagyságú és alakú molekulában és ott is milyen helyen található.)

Egyszerűség kedvéért előbb azt az esetet vizsgálom, amikor a $t = 0$ időpontban $N(n, 0)$ számú n -mer van jelen. ($N(n, 0)$ -t röviden N -nel fogom jelölni.)

Ha — mint az előbbi §-ban $\xi(k, t)$ jelenti a k -merek számát a t időpontban, akkor az átlagos molekulatömeget ugyanebben az időpontban a következő kifejezés adja meg:

$$(1) \quad \frac{\xi(1, t) + 2\xi(2, t) + \dots + n\xi(n, t)}{\xi(1, t) + \xi(2, t) + \dots + \xi(n, t)}.$$

(1) számlálója minden t időpontban nN -nel egyenlő, hiszen a bomlási folyamat közben az egységek száma nem változik, tehát (1) a következő alakba írható:

$$(2) \quad \frac{nN}{\xi(1, t) + \xi(2, t) + \dots + \xi(n, t)}$$

(2) nevezője nem más, mint a t időpontban jelenlévő összes molekulák száma. Jelöljük ezt $\xi(t)$ -vel. A feladatunk tehát $M\left(\frac{nN}{\xi(t)}\right)$ -nek a kiszámítása.*

Képzeld el a molekulákat 1-től N -ig megszámozva. Ha a k -adik molekulában a $(0, t)$ idő alatt elbomlott kötések számát a_k -val jelöljük, akkor $a_k + 1$ megadja a k -adik molekulából a $(0, t)$ idő alatt keletkezett összes molekulák számát és $a_1 + \dots + a_N + N$ pedig nem más, mint a t időpontban jelenlévő összes molekulák száma. Ki kell számítani tehát annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ idő alatt az első molekulában a_1, \dots , az N -edikben a_N kötés szakad el.

Mivel feltettem, hogy minden egyes kötés egyenrangú, tehát mindegyikre vonatkozólag ugyanannyi annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ idő alatt elbomoljék. Jelölje ezt a valószínűséget $P(t)$, ($P(0) = 0$). Annak a valószínűsége, hogy az első molekulában a_1, \dots , az N -edikben a_N kötés bomoljék el a $(0, t)$ idő alatt — az egyes kötések és az egyes molekulák egymástól függetlenül történő bomlásai következtében — a következő kifejezéssel egyenlő:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \prod_{k=1}^N \binom{n-1}{a_k} [P(t)]^{a_k} [1 - P(t)]^{n-1-a_k} = \\ & = (1-P)^{N(n-1)} \prod_{k=1}^N \binom{n-1}{a_k} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_k} = \\ & = \frac{(1-P)^{nN}}{P^N} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_N-N} \prod_{k=1}^N \binom{n-1}{a_k} \end{aligned} \right.$$

(3) alapján

$$(4) \quad M\left(\frac{nN}{\xi(t)}\right) = nN \frac{(1-P)^{nN}}{P^N} \sum_{\substack{0 \leq a_k \leq n-1 \\ 1 \leq k \leq N}} \frac{1}{a_1 + \dots + a_N + N} \left(\frac{P}{1-P}\right)^{a_1+\dots+a_N+N} \prod_{k=1}^N \binom{n-1}{a_k}$$

* Lineáris láncokra vonatkozólag R. Simha [2] úgy kívánja kiszámítani $M\left(\frac{1}{\xi(t)}\right)$ -t, hogy ezt az értéket azonosítja $\frac{1}{M(\xi(t))}$ -vel, ami nyilvánvalóan helytelen.

Mivel egyenlő a jobboldalon levő összeg. Jelöljük x -szel $\frac{P}{1-P} - t$ és differenciáljunk x szerint, akkor ha magát az összeget $f(x)$ -szel jelöljük:

$$(5) \quad f(x) = \sum_{\substack{0 \leq \gamma_k \leq n-1 \\ 1 \leq k \leq N}} \frac{1}{a_1 + \dots + a_N + N} x^{a_1 + \dots + a_N + N} \prod_{k=1}^N \binom{n-1}{a_k},$$

azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad f'(x) = x^{N-1} (1+x)^{N(n-1)}.$$

Mivel $P(0) = 0$, tehát $f(0) = 0$, mert csak így kapunk (4) által véges értéket. Ebből viszont (6) alapján következik, hogy

$$(7) \quad f(x) = \int_0^x z^{N-1} (1+z)^{N(n-1)} dz,$$

tehát

$$(8) \quad f\left(\frac{P}{1-P}\right) = \int_0^{\frac{P}{1-P}} z^{N-1} (1+z)^{N(n-1)} dz.$$

Alkalmazva a $z = \frac{Pu}{1-Pu}$ helyettesítést, (8) a következő alakot veszi fel:

$$(9) \quad f\left(\frac{P}{1-P}\right) = P^N \int_0^1 \frac{u^{N-1}}{(1-Pu)^{nN+1}} du.$$

Ismeretes,* hogy az

$$(10) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, v) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} v + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \beta (\beta+1)}{\gamma (\gamma+1) 1 \cdot 2} v^2 + \dots$$

hipergeometriai függvény előállítható a következő integrálalakban:

$$(11) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, v) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-vt)^{-\alpha} dt,$$

ha $\gamma > \beta > 0$, ahol $B(r, s)$ az Euler-féle beta-függvényt jelenti:

$$(12) \quad B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx$$

* Lásd pl. [4] 416. oldal.

(9) és (11) összehasonlításából látható, hogy $f\left(\frac{P}{1-P}\right)$ a következő alakra hozható ($\alpha = nN + 1$, $\beta = N$, $\gamma = N + 1$):

$$(13) \quad f\left(\frac{P}{1-P}\right) = \frac{P^N}{N} F(nN + 1, N, N + 1, P)$$

és így az átlagos molekulatömeg várható értéke

$$(14) \quad M\left(\frac{nN}{\xi(t)}\right) = n(1-P)^{nN} F(nN + 1, N, N + 1, P).$$

Tekintsük most az $F(nN + 1, N, N + 1, P)$ kifejezést. Egy Gauss-tól származó* rekurrens formula szerint

$$(15) \quad \begin{cases} \gamma(\gamma + 1) F(\alpha, \beta, \gamma, v) - \gamma(\gamma + 1) F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, v) + \\ + \beta(\gamma - \alpha) v F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, v) = 0 \end{cases}$$

Ha elvégezzük az $\alpha = nN$, $\beta = N$, $\gamma = N$, $v = P$ helyettesítést és figyelembe vesszük, hogy

$$(16) \quad F(nN, N, N, P) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{nN + k - 1}{k} P^k = \frac{1}{(1-P)^{nN}},$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$(17) \quad \frac{N + 1}{(1-P)^{nN}} = (N + 1 + N(n-1)P) F(nN + 1, N, N + 1, P) + \\ + N(n-1)P\delta,$$

ahol $\delta = F(nN + 1, N + 1, N + 2, P) - F(nN + 1, N, N + 1, P)$.

Szorozzuk be (17) mindkét oldalát $n(1-P)^{nN}$ -nel, akkor ha $M\left(\frac{nN}{\xi(t)}\right)$ helyett röviden csak M -et írunk, (14) figyelembevételével a következő kifejezést kapjuk:

$$(18) \quad n(N + 1) = (N + 1 + N(n-1)P) M + nN(n-1)P(1-P)^{nN}\delta.$$

Ha mindkét oldalt $N + 1 + (n-1)P$ -vel osztjuk, azt kapjuk, hogy**

$$(19) \quad M = \frac{n}{1 + (n-1)P} + \left(\frac{n(N + 1)}{N + 1 + N(n-1)P} - \frac{n}{1 + (n-1)P} \right) \\ - \frac{n(n-1)NP(1-P)^{nN}\delta}{N + 1 + N(n-1)P} = \frac{n}{1 + (n-1)P} + R_1 - R_2.$$

* Lásd pl. [4] 420. oldal.

** A Simha által végzett számítások az itt tárgyalt esetre vonatkoznak és a végeredmény megegyezik M kifejezésének első tagjával $\frac{n}{1 + (n-1)P}$ -vel. A pontos elméleti érték ettől eltér. A két érték közötti különbség: R a legfontosabb esetekben elég kicsiny.

Becsüljük meg most először δ -t, majd $R = R_1 - R_2$ -t.

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= F(nN+1, N+1, N+2, P) - F(nN+1, N, N+1, P) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{nN+k}{k} P^k \left(\frac{N+1}{N+1+k} - \frac{N}{N+k} \right) < \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \binom{nN+k}{k} \frac{k}{(N+k)^2} < \\ &< \frac{1}{nN} P \sum_{k=1}^{\infty} \binom{nN+k-2}{k-1} \left(\frac{nN+k}{N+k} \right)^2 P^{k-1} < \\ &< \frac{nP}{N(1-P)^{nN}}. \end{aligned} \right.$$

(19) és (20) alapján

$$(21) \quad |R| < R_1 + R_2 < \frac{n(n-1)P}{N+1} + \frac{n^2P}{N} < \frac{2n^2P}{N}.$$

A gyakorlatilag előforduló esetekben $n \leq 10^3$, $N \geq 10^{22}$, tehát

$$(22) \quad R < 2P \cdot 10^{-10}$$

Ha tehát M -et az

$$\frac{n}{1 + (n-1)P}$$

kifejezéssel helyettesítjük, legfeljebb $\frac{2n^2P}{N}$ hibát követünk el.

Nézzük meg, hogy R legfeljebb hányadrésze M -nek. Mivel $\frac{x}{1-x} < 2x$,
ha $x < \frac{1}{2}$, tehát ha $(R_1 + R_2) \frac{1 + (n-1)P}{n} < \frac{1}{2}$, akkor

$$(23) \quad \left| \frac{\frac{R}{\frac{n}{1 + (n-1)P} + R}}{\frac{n}{1 + (n-1)P} - R_1 - R_2} \right| < \frac{R_1 + R_2}{\frac{n}{1 + (n-1)P} - R_1 - R_2} < \\ < 2(R_1 + R_2) \frac{1 + (n-1)P}{n} < 4P \frac{n^2}{N},$$

vagyis a relatív hiba is igen kicsiny, ha n^2 kicsiny N -hez képest.

Tekintsük most a problémát általánosan, azaz tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban $N(1, 0)$ monomer, $N(2, 0)$ dimer, ..., $N(n, 0)$ n -mer van jelen. Jelen esetben annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ idő alatt (ha az ugyan-

annyi egységet tartalmazó molekula-csoporton belül az egyes molekulákat megszámozva képzeljük el) az első dimerben $a_1^{(2)}, \dots$, az utolsóban $a_{N(2,0)}^{(2)}, \dots$, az első n -merben $a_1^{(n)}, \dots$, az utolsóban $a_{N(n,0)}^{(n)}$ kötés szakad el, a következő kifejezés adja meg:

$$(24) \quad \prod_{k=2}^n \prod_{l=1}^{N(k,0)} \binom{k-1}{a_l^{(k)}} P a_l^{(k)} (1-P)^{k-1-a_l^{(k)}}$$

(24) alapján, ha $M(t)$ -vel jelöljük az átlagos molekulatömeg várható értékét a t időpontban, akkor

$$(25) \quad M(t) = \sum_{\substack{0 \leq a_i^{(j)} \leq j-1 \\ 1 \leq i \leq j \leq n \\ j \leq N(j,0)}} \frac{\sum_{r=1}^n r N(r, 0)}{\sum_{r=2}^n \sum_{s=1}^{N(r,0)} a_s^{(r)} + \sum_{r=1}^n N(r, 0)} \prod_{k=2}^n \prod_{l=1}^{N(k,0)} \binom{k-1}{a_l^{(k)}} P a_l^{(k)} (1-P)^{k-1-a_l^{(k)}}$$

Ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$$(26) \quad \sum_{r=2}^n \sum_{s=1}^{N(r,0)} a_s^{(r)} = K, \quad \sum_{k=1}^n N(k, 0) = N, \quad \sum_{k=1}^n k N(k, 0) = N',$$

akkor (25) a következő alakra hozható:

$$(27) \quad M(t) = S N' (1-P)^{N'-N} \sum_{a_l^{(j)}} \left(\frac{P}{1-P} \right)^K \frac{1}{K+N} \prod_{k=2}^n \prod_{l=1}^{N(k,0)} \binom{k-1}{a_l^{(k)}}.$$

27)-ben az összegezés ugyanazon $a_l^{(j)}$ értékekre van kiterjesztve mint (25)-ben.

Az előzőkhöz hasonlóan belátható, hogy (27) a következő alakra hozható:

$$(28) \quad \begin{cases} M(t) = N' \frac{(1-P)^{N'}}{P^N} \int_0^{\frac{P}{1-P}} z^{N-1} (1+z)^{N'-N} dz = \\ = M(0) (1-P)^{N'} F(N', N, N+1, P) \end{cases}$$

ahol $M(0)$ jelenti az átlagos molekulatömeget a 0 időpontban, N' az összes egységek számát (ez t -vel nem változik), N pedig az összes molekulák számát a 0 időpontban.

Tekintsük most ismét a (15) rekurrens összefüggést. Ha behelyettesítjük az $\alpha = N'$, $\beta = N$, $\gamma = N$, $v = P$ értékeket, akkor azt kapjuk, hogy

$$(29) \quad \frac{N(N+1)}{(1-P)^{N'}} = N(N+1)F(N'+1, N, N+1, P) + \\ + (N'-N)NP(F(N'+1, N, N+1, P) + \delta),$$

ahol

$$(30) \quad \delta = F(N'+1, N+1, N+2, P) - F(N'+1, N, N+1, P).$$

Szorozzuk meg (29) mindkét oldalát $M(0)(1-P)^{N'}/N$ -nel, akkor azt kapjuk, hogy

$$(31) \quad (N+1)M(0) = (N+1)M(t) + (N'-N)PM(t) + \\ + M(0)(N'-N)(1-P)^{N'}P\delta.$$

Innen

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} M(t) &= \frac{(N+1)M(0)}{N+1+(N'-N)P} - \frac{M(0)(N'-N)(1-P)^{N'}P\delta}{N+1+(N'-N)P} = \\ &= \frac{(N+1)M(0)}{N+1+(N'-N)P} - R. \end{aligned} \right.$$

Foglalkozunk most az R maradéktaggal. Legelőször becsüljük meg δ -t.

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= F(N'+1, N+1, N+2, P) - F(N'+1, N, N+1, P) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N'+k}{k} P^k \left(\frac{N+1}{N+1+k} - \frac{N}{N+k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N'+k}{k} P^k \frac{k}{(N+k)(N+1+k)} \end{aligned} \right.$$

Mivel $N' \geq N$, tehát

$$(34) \quad \frac{(N'+k)(N'+k-1)}{(N+k)(N+1+k)} < \left(\frac{N'+k}{N+k} \right)^2 \leq \left(\frac{N'}{N} \right)^2 = M^2(0)$$

és így

$$(35) \quad \delta < \frac{1}{N'} P M^2(0) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{N' + k - 2}{k - 1} = \frac{P M^2(0)}{N' (1 - P)^{N'}}.$$

(35) alapján

$$(36) \quad R = \frac{M(0) (N' - N) (1 - P)^{N'} P \delta}{N + 1 + (N' - N) P} < \frac{M^3(0) P^2}{(N + 1)} < \frac{n^3 P^2}{N}.$$

Végül becsüljük meg a relatív hibát, ha $M(t)$ értékét $M(t) + R$ -rel, helyettesítjük. (36) utolsó tagját használva, és figyelembe véve, hogy $N' \leq nN$, következik, hogy

$$(37) \quad \frac{R}{M(t)} = \frac{R}{\frac{(N + 1) M(0)}{N + 1 + (N' - N) P} - R} < 2R \frac{N + 1 + (N' - N) P}{(N + 1) M(0)} < \\ < \frac{2n^3 P^2}{N},$$

feltéve, hogy

$$R \frac{N + 1 + (N' - N) P}{(N + 1) M(0)} < \frac{1}{2}.$$

IRODALOM

- [1] E. W. Montroll R. Simha: Theory of depolymerization of long chain molecules (Journal of Chem. Physics, vol. 8. 1940, 721—727. o.)
- [2] R. Simha: Kinetics of degradation and size distribution of long chain polymers. (Journal of Applied Physics, vol. 12. 1941. 569—578. o.)
- [3] H. Mark R. Raff: High polymeric reactions (High polymers III. New-York 1941.)
- [4] И. М. Рыжик, И. Ц. Градштейн: Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений (Москва—Ленинград 1951).

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ ТРАКТОВКА ПРОЦЕССА РАСПАДА ДЛИННЫХ ЦЕПНЫХ МОЛЕКУЛ

А. Прекопа

Резюме

Р. Симга в одной из своих работ приводит для процесса распада длинных цепных молекул, систему дифференциальных уравнений для функции дающие изменение числа цепных молекул различной длины по времени. Правильность этой системы уравнений. Р. Симга не обосновывает.

В § 1. доказывается и обобщается уравнение Симги статистическим путем.

В § 2. рассматривается специальный случай процесса распада, где все соединения являются равноправными. Вычислены также дисперсия числа цепных молекул различной длины и коэффициент корреляции между ними.

В § 3. автор занимается вычислением среднего значения среднего количества молекул, и оценивает отклонение упомянутой формулы от приближенной формулы полученной ранее другими авторами.

STATISTICAL TREATMENT OF THE DEGRADATION PROCESS OF LONG CHAIN POLYMERS

A. PRÉKOFA

Summary

The problem of the size distribution of degradation products, generated by the splitting of long chains, has been considered by R. Simha. A system of linear differential equations was introduced, in which the unknown functions are the numbers of k -mers as functions of the time. However no proof for the validity of these equations was given.

§ 1. contains a statistical justification of the mentioned system of differential equations.

In § 2. a special case is considered in which the disintegration probabilities for all linkages are equal, independently of their position in the chain. The dispersion and the correlation coefficient of the number of k -mers are also calculated.

§ 3. is devoted to the correct calculation of the mean value of the average molecular mass. A formula is proved and compared to another, received by Simha by a not quite exact method in [2].

EGY MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSÁRÓL

GYIRES BÉLA

Összefoglalás

E dolgozat a Debreceni Fizikai-Kémiai Intézet elméleti vizsgálatai közben fellépő, a (2) és (6) feltételt kielégítő (1) differenciálegyenlet megoldásának (7) alatti Dirichlet-féle sorral való előállításával foglalkozik. A szerző kimutatja, hogy amennyiben még a (24) feltétel is teljesül, a (7) alakú megoldás nem negatív x -ekre akárhányszor differenciálható olyan valós függvényt állít elő, amely akkor és csak akkor független az x -től, ha $a_1 = 0$. Végül felülről becsüli meg a szerző azt a hibát, amelyet elkövetünk, ha a (7) sornak csupán az első két tagját tartjuk meg.

A Debreceni Egyetem Fizikai-Kémiai Intézete elvi jelentőségű vizsgálatokat folytatott a heterogén reakció-kinetika tárgykörében.¹ E vizsgálatok közben lépett fel az

$$(1) \quad y'' + ay' + by = cy^2$$

differenciálegyenlet nem negatív x -ekre való megoldásának szükségessége az

$$(2) \quad a > 0, \quad b > 0; \quad c > 0$$

feltételek, valamint ama feltétel mellett, hogy a

$$(3) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

karakterisztikus egyenletnek

$$(4) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b})$$

$$(5) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b})$$

gyökei nem valósak, azaz

$$(6) \quad a^2 < 4b.$$

A Fizikai-Kémiai Intézet felkérésére ezzel a feladattal az Alkalmazott Matematikai Intézet debreceni csoportja foglalkozott. A következőkben a kapott megoldást ismertetjük.

¹⁾ L. Imre: Neuere prinzipielle Bemerkungen zur heterogenen Reaktions-Kinetik. Kolloid Zeitschrift, Bd. 131. (1953), pp. 21–38. o.

Mivel az (1) differenciálegyenlet elemi integrációs módszerekkel általában nem oldható meg, célszerűnek mutatkozott a megoldásnak a *Dirichlet*-féle típusú

$$(7) \quad y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} e^{\nu \lambda_1 x}$$

végtesen sorral való előállítására.

A következőkben a (7)-ben szereplő α_{ν} együtthatók kiszámítására adunk egy rekurziós képletet.

A (7) alapján ugyanis

$$(8) \quad y' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \lambda_1 \alpha_{\nu} e^{\nu \lambda_1 x}, \quad y'' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu \lambda_1)^2 \alpha_{\nu} e^{\nu \lambda_1 x}$$

és ha

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0 \\ (9) \quad \beta_{2k} &= 2 (\alpha_1 \alpha_{2k-1} + \alpha_2 \alpha_{2k-2} + \dots + \alpha_{k-1} \alpha_{k+1}) + \alpha_k^2 \\ \beta_{2k+1} &= 2 (\alpha_1 \alpha_{2k} + \alpha_2 \alpha_{2k-1} + \dots + \alpha_k \alpha_{k+1}) \\ &\quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

akkor

$$(10) \quad y^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu} e^{\nu \lambda_1 x}.$$

Ha a (8)-at és (10)-et az (1)-be helyettesítjük és az így kapott kifejezés jobb- és baloldalának megfelelő együtthatóit egyenlővé tesszük egymással, akkor

$$(11) \quad \alpha_{\nu} [(\nu \lambda_1)^2 + a (\nu \lambda_1) + b] = c \beta_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Tekintettel arra, hogy λ_1 a (3) egyenletnek gyöke,

$$(\nu \lambda_1)^2 + a (\nu \lambda_1) + b = a (\nu - 1) \lambda_1 + (\nu^2 - 1) \lambda_1^2.$$

Ha $\nu = 1$, a kifejezés nulla és így (9) alapján α_1 tetszőszerinti komplex szám lehet. Mivel az

$$(12) \quad n_{\nu} = a (\nu - 1) \lambda_1 + (\nu^2 - 1) \lambda_1^2$$

akkor és csak akkor lehet nulla, ha $\nu = 1$, vagy $\lambda_1 = 0$, vagy $\lambda_1 = -\frac{a}{\nu + 1}$ és mivel a feltételek szerint λ_1 nem lehet valós szám,

$$n_{\nu} \neq 0, \quad \text{ha} \quad \nu > 1.$$

Ezért a (11)-ből

$$(13) \quad \alpha_\nu = c \frac{\beta_\nu}{n_\nu} \quad (\nu = 2, 3, \dots).$$

Ha tehát a (7) kielégíti az (1) differenciálegyenletet, együttthatóit, tetszés szerinti α_1 komplex számból kiindulva, a (13), a (9) és (12) alapján egyértelműen határozza meg. α_1 tetszésszerinti megválasztásával lényegében két valós számot választottunk szabadon, megfelelően annak, hogy az (1) másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásában két valós paraméternek kell fellépnie.

A következőkben a (9) és (13) rekurziós képletekkel meghatározott együttthatókkal rendelkező (7) jobboldalának tagonkénti k -szoros differenciálásával nyert

$$(14) \quad S_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu \lambda_1)^k \alpha_\nu e^{\nu \lambda_1 x} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

sor konvergenciájával foglalkozunk.

Mivel

$$(15) \quad |n_\nu|^2 = (\nu - 1)^2 b [(\nu + 1)^2 b - \nu a^2],$$

a (6) feltétel miatt

$$(16) \quad |n_\nu| > (\nu - 1)^2 b \quad (\nu = 2, 3, \dots)$$

és így a (13) alapján

$$(17) \quad |\sigma_\nu| < \frac{c}{b} \frac{|\beta_\nu|}{(\nu - 1)^2} \quad (\nu = 2, 3, \dots).$$

Ha a (9) figyelembevételével innen adódó

$$(18) \quad |\alpha_2| < \frac{c}{b} |\alpha_1|^2$$

egyenlőtlenséget használjuk fel, akkor (17) és (9) alapján $\nu = 3, 4, 5, 6$ és 7 esetére egymásután igazolhatjuk a

$$(19) \quad |\sigma_\nu| < \frac{2}{(\nu - 1)^2} \left(\frac{c}{b}\right)^{\nu-1} |\alpha_1|^\nu$$

egyenlőtlenségeket.

Tegyük fel, hogy (19) $\nu = 2k$ -ig igaz. Ekkor (18) felhasználásával a (9) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\beta_{2k+1}| &\leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \left\{ \frac{2}{(2k-1)^2} + \frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{4}{2^2(2k-3)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3^2(2k-4)^2} + \dots + \frac{4}{k^2(k-1)^2} \right\} \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \left\{ \frac{2}{(2k-1)^2} + \frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{k-2}{(2k-3)^2} \right\} \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \frac{k+2}{(2k-3)^2}. \end{aligned}$$

Tekintetbe véve azt, hogy ha k 2-nél nagyobb egészszám, akkor $4k^2 - 13k + 7 > 0$, következik, hogy

$$(20) \quad |\beta_{2k+1}| \leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-1} |\alpha_1|^{2k+1} \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Ha viszont (19) egyenlőtlenség érvényességét $\nu = 2k+1$ -ig tételezzük fel, akkor ugyancsak (18) és (9) alapján

$$\begin{aligned} |\beta_{2k}| &\leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \left\{ \frac{2}{(2k-2)^2} + \frac{2}{(2k-3)^2} + \frac{2}{(k-1)^4} + \frac{k-3}{(2k-4)^2} \right\} \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \frac{k+3}{(2k-4)^2}. \end{aligned}$$

Mivel $k \geq 4$ esetében $4k^2 - 17k + 13 > 0$, végül is

$$(21) \quad |\beta_{2k}| \leq 2 \left(\frac{c}{b}\right)^{2k-2} |\alpha_1|^{2k} \quad (k = 4, 5, \dots).$$

Ha a (20)-at és (21)-et a (17)-be helyettesítjük és figyelembe vesszük azt, hogy (19)-et $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ és 7 esetre már kimutattuk, a (19) kifejezés bármilyen 1-nél nagyobb ν -re is igaz. $\nu = 2$ esetben az ennél pontosabb (18) is fennáll.

Most már annak figyelembevételével, hogy a a (2) feltétel értelmében pozitív szám, a (4) alapján nem negatív x -ekre $e^{\lambda_1 x} \leq 1$ és így a (18) és (19) miatt nem negatív x -ekre

$$\begin{aligned} (22) \quad |S_k(x)| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\nu \lambda_1| |\sigma_\nu| \leq \\ &\leq |\alpha_1| b^{\frac{k}{2}} \left\{ 1 + 2^k \left(\frac{c}{b}\right) |\alpha_1| + 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(\nu+1)^k}{\nu^2} \left(\frac{c}{b}\right)^\nu |\alpha_1|^\nu \right\}. \end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy a

$$(23) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)^k}{\nu^2} z^{\nu}$$

hatványsor konvergencia-sugara 1-gyel egyenlő, a (22) jobboldala biztosan konvergens, ha a tetszősszerint választható α_1 állandó eleget tesz a

$$(24) \quad |\alpha_1| < \frac{b}{c}$$

feltételnek. Ebben az esetben a (14) sor nem negatív x -ekre egyenletesen konvergens és így a függvénysorok tagonkénti differenciálására vonatkozó tétel szerint nem negatív x -ekre

$$y^{(k)}(x) = S_k(x)$$

Ezek alapján igaz az

I. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő (7) Dirichlet-féle sor a (24) kezdőfeltétel mellett nem negatív x -ekre akárhányszor differenciálható függvényt állít elő.

Mivel a (23) függvénysor $k=0$ mellett a $z=1$ helyen is konvergens, a (7) függvénysor egyenletesen konvergens nem negatív x -ekre, ha $|\alpha_1| \leq \frac{b}{c}$ és a (22) alapján

$$|y(x)| \leq \frac{7}{3} |\alpha_1|.$$

Ez lényegében azt mondja, hogy annak az $|\alpha_1| \leq \frac{b}{c}$ feltételt kielégítő (7) Dirichlet-féle sornak, amelynek együtthatóit a (9) és (13) rekurziós formulák határozzák meg, konvergencia-abszcisszája 0-nál kisebb szám.

Hasonló eredményre jutottunk volna akkor is, ha a (7) helyett az (5) segítségével képeztünk

$$(25) \quad y^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^* e^{\nu \lambda_2 x}$$

Dirichlet-féle sor szolgált volna kiindulópontul. Természetesen ekkor a (12) helyébe az

$$a(\nu-1)\lambda_2 + (\nu^2-1)\lambda_2^2 = \bar{n}\nu,$$

ahol a fentvonással a konjugáltra való áttérés műveletét jelöltük, és ennek alapján a (13) helyébe az

$$\alpha_{\nu}^* = c \frac{\beta_{\nu}^*}{n_{\nu}}$$

lépett volna, ahol a β_v^* -kat az α_v^* -ok a (9)-hez hasonló módon határozzák meg. A tetszőszerinti állandó itt az α_1^* és ha ezt a (24)-nek megfelelően választjuk, a (25) megoldás is nem negatív x -ekre akárhányszor differenciálható függvényt ad.

Legyen most $\alpha_1^* = \bar{\alpha}_1$, akkor teljes indukcióval kimutatható, hogy minden természetes ν -re $\alpha_\nu^* = \bar{\alpha}_\nu$. De akkor (25) alapján $y^* = \bar{y}$, azaz ha a (7) alatti megoldás

$$(26) \quad y = u + iv$$

alakú, akkor az

$$(27) \quad y = u - iv$$

is megoldása az (1)-nek.

Ha a (26), illetve (27) megoldást az (1)-be helyettesítjük, a valós és képzetes részek szétválasztása után azt kapjuk, hogy az u függvénynek ki kell elégítenie az

$$(28) \quad u'' + au' + bu = c(u^2 - v^2)$$

differenciálegyenletet, viszont a v kell hogy eleget tegyen a

$$(29) \quad v'' + av' + bv = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek. A (28)-nak eleget tevő u -val és a (29)-et kielégítő v -vel képzett (26) megoldást ismét az (1)-be helyettesítve arra jutunk, hogy teljesednie kell az

$$(30) \quad 2cur = 0$$

egyenletnek.

Azokban a pontokban, amelyekben az u és első és második deriváltja eltűnik, a (28) alapján $v = 0$.

Azokban a pontokban, amelyekben $u \neq 0$, a (30) szerint kell hogy $v = 0$ legyen.

Most már v csak azokban a pontokban lehet 0-tól különböző, amelyekben $u = 0$ és $u' \neq 0$, vagy $u'' \neq 0$. De u -nak ezekben a pontokban való kétszeri folytonos differenciálhatóságára való tekintettel e pontok izolált pontok és mivel v folytonos függvény, e pontokban is $v = 0$.

Tehát a (26)-ban $v = 0$ és így a (7) és a (25) megoldás identikus.

Ezek alapján igaz a

II. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő és a (24) kezdőfeltételnek eleget tevő (7) Dirichlet-féle sor valós függvény állít elő.

A következőkben még kimutatjuk azt, hogy

III. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő és a (24) kezdőfeltételeknek eleget tevő (7) Dirichlet-féle sorral előállított függvény akkor és csak akkor lehet azonosan egyenlő egy k konstanssal, ha $k = 0$. Ebben az esetben a (7) sor valamennyi együtthatója 0-val egyenlő.

Bizonyítás: Ha feltesszük, hogy a (7) sor azonosan egyenlő k -val, akkor az

$$(31) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}, \quad c_0 = 0$$

hatványsornak [amelynek konvergencia-sugara az a_1 -nek (24)-nek megfelelő választása mellett legalább 1-gyel egyenlő] a

$$(32) \quad z = e^{\lambda_1 x} = \varrho(x) e^{i\varphi(x)}, \quad \varrho(x) = e^{-\frac{a}{2}x}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{2} \sqrt{4b-a^2}, \quad x \geq 0$$

helyeken, tehát a (32)-ből kiválasztott bármely 0-tól különböző elemekkel bíró nullsorozat elemeihez tartozó helyeken is k -val kell egyenlőnek lennie. Viszont ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkezik ezeken a helyeken az a hatványsor, amelynek a z -től független tagjának együtthatója k és az összes többi 0-val egyenlő. De akkor a hatványsorokra vonatkozó koefficiens-összehasonlítás elve értelmében²⁾ kell hogy

$$(33) \quad k = a_0 = 0 \\ c_{\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

legyen. Ezzel tételünket igazoltuk is.

Könnyen igazolható, hogy ha $a_1 = 0$, akkor a (33) már fennáll. Ennek alapján tehát igaz a

IV. Tétel: A (2) és (6) feltételeknek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő, és a (24) kezdőfeltételeknek eleget tevő (7) Dirichlet-féle sorral előállított függvény akkor és csak akkor azonosan nulla, ha $a_1 = 0$.

Viszont az (1) másik triviális megoldását, az $y = \frac{b}{c}$ megoldást a III. tétel értelmében a (7) alakú megoldás nem foglalja magában. Ez természetes is, hiszen e megoldás az (1)-nek nyilvánvalóan szinguláris megoldása.

A következőkben a (2) és (6) feltételeknek és a (24) kezdőfeltételnek alávetett (1) differenciálegyenletet kielégítő (7) Dirichlet-féle sor két első tagjának összegét számítjuk ki.

Legyen

$$a_1 = \varrho e^{i\delta},$$

ahol δ tetszőleges és $\varrho = |a_1|$ a (24) egyenlőtlenségnek eleget tevő állandó. A (4) alapján

$$c_1 e^{\lambda_1 x} = \varrho e^{-\frac{a}{2}x} \left\{ \cos \left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + \delta \right) + i \sin \left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x + \delta \right) \right\}.$$

¹⁾ L. pl. Hurwitz—Courant: Funktionentheorie. Berlin, 1929, 30. o.

A (11) szerint

$$\sigma_2 = \frac{cQ^2 e^{2i\delta}}{b(9b-2a^2)} [(a^2-3b) + ia\sqrt{4b-a^2}]$$

és így

$$c_2 e^{2\lambda_1 x} = \frac{cQ^2 e^{-ax}}{\sqrt{b(9b-2a^2)}} \left\{ \cos(\sqrt{4b-a^2} x + 2\delta + \psi) + \right. \\ \left. + i \sin(\sqrt{4b-a^2} x + 2\delta + \psi) \right\}.$$

hacsak

$$\cos \psi = \frac{a^2-3b}{\sqrt{b(9b-2a^2)}} \quad \sin \psi = \frac{a\sqrt{4b-a^2}}{\sqrt{b(9b-2a^2)}}.$$

Mivel a II. tétel értelmében a képzetes tagokat figyelmen kívül hagyhatjuk, a (7) alapján

$$(34) \quad y(x) = Q e^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x + \delta\right) + \\ + \frac{cQ^2 e^{-ax}}{\sqrt{b(9b-2a^2)}} \cos(\sqrt{4b-a^2}x + 2\delta + \psi) + \dots$$

Ha a (34)-ben csak az első két tagot tartjuk meg és e két tag összegét $f(x)$ -el jelöljük, akkor a (19) felhasználásával

$$|y(x) - f(x)| < 2e^{-\frac{3ax}{2}} \left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma_1|^3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{c}{b}\right)^{\nu-2} |\gamma_1|^{\nu-2}.$$

A (24) alapján még inkább

$$|y(x) - f(x)| < 2e^{-\frac{3ax}{2}} \left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma_1|^3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2},$$

amiért végül is

$$|y(x) - f(x)| < \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right) \left(\frac{c}{b}\right)^2 |\gamma_1|^3 e^{-\frac{3a}{2}x}.$$

Ha a (34)-ben tetszőszerinti véges számú tagot tartottunk volna meg, az elkövetett hibát hasonló módon minden nehézség nélkül meghatározhatnánk.

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Б. Дыреш

Резюме

В настоящей работе дается решение в виде ряда Дирихле (7) дифференциального уравнения (1) удовлетворяющего условиям (2) и (6). Это уравнение возникло в связи с теоретическими исследованиями, ведущимися в дебrecенском институте физической химии.

Доказывается, что если кроме упомянутых условий выполняется и условие (24), то решение (7) представляет собой для положительных значений, x функцию, дифференцируемую любое число раз и не зависящую от x тогда и только тогда, если $\alpha_1 = 0$. Работа, содержит и верхнюю оценку ошибки, получающейся, если отбросить все члены ряда (7) кроме первых двух.

LÖSUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

B. GYIRES

Zusammenfassung

Im Verlaufe theoretischer Untersuchungen im Physikalisch-Chemikalischen Institut der Debrecener Universität trat eine Differentialgleichung der Form (1) mit Bedingungen (2) und (6) auf. Gegenstand vorliegender Arbeit bildet die Lösung dieser Differentialgleichung mit Hilfe einer Dirichletschen Reihe. Es wird nachgewiesen, dass bei Bestehen der Bedingung (24), die Lösung der Gestalt (7) für nicht negative x eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion darstellt, die dann und nur dann eine Konstante ist, falls $\alpha_1 = 0$.

Schliesslich wird eine obere Schranke für den Fehler angegeben, der entsteht, falls in (7) nur die beiden erten Glieder berücksichtigt werden.

EGY ÚJ MÓDSZER REKURRENS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK TÁRGYALÁSÁNÁL

TAKÁCS LAJOS

Összefoglalás

Rekurrens folyamatok alatt olyan folyamatokat ért a szerző, amelyeknél megadható egy bizonyos E esemény úgy, hogy ha ez az esemény előfordul, akkor az előfordulási ponttól számítva a folyamat a multtól függetlenül ugyanazt a sztochasztikus viselkedést mutatja. Ilyen folyamatokkal kapcsolatos kérdéseket rendszerint a visszatérési pontok közötti távolság eloszlásának meghatározására vezetik vissza. Ez a tárgyalás elég bonyolult és csak speciális esetekben vihető keresztül. A dolgozatban közölt módszer abban áll, hogy először az átlagfüggvényt, azaz a $(0, t)$ időközben előforduló E események előfordulásának várható számát határozza meg, ami a legtöbb esetben könnyen végezhető el. Az átlagfüggvény ismeretében ezután a kérdéses valószínűségek is meghatározhatók. A fenti folyamatokra példaként említi a dolgozat részecskeszámításoknál és gépalkatrészek törésével kapcsolatban fellépő folyamatokat. |

Bevezetés

Rekurrens sztochasztikus folyamatok alatt olyan folyamatokat értünk, amelyeknél megadható egy bizonyos E esemény úgy, hogy ha ez előfordul, akkor a rendszer jövő sztochasztikus viselkedése egyértelműen meg van határozva, azaz nem függ a multtól és ezen E esemény előfordulási időpontjaitól számítva a folyamat hasonló sztochasztikus viselkedést mutat. Az E eseményt rekurrens eseménynek és előfordulási pontjait a folyamat regenerációs pontjainak vagy Markov-pontjainak nevezzük. Nem szándékozunk itt ezen folyamatok általános elméletével foglalkozni. Csupán két típust ragadunk ki és arra fogjuk alkalmazni a következőkben vázolt módszert.

I. Tekintsük a $0 \leq t < \infty$ időintervallumot, amelyben $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ időpontokban előfordul egy-egy esemény. Tegyük fel, hogy a $t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots; t_0 = 0$) időkülönbségek egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók, közös $F(x)$ eloszlásfüggvénynel. Ekkor a folyamat regenerációs pontjait a $\{t_n\}$ időpontok alkotják és E jelenti egy esemény bekövetkezését.

Ezzel kapcsolatban a következő problémák merülnek fel: mi a valószínűsége annak, hogy $(0, t)$ időközben előforduló események száma $\leq n$; jelöljük ezt $W(t, n)$ -nel. Ezután meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy $(u, u+t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő és kérdezzük, hogy $u \rightarrow \infty$ esetén mihez tart ez a valószínűség. Jelöljük ezt a határértéket, amennyiben létezik, $W^*(t, n)$ -nel.

Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvényt ismerjük, úgy $W(t, n)$ és $W^*(t, n)$ meghatározása egyszerűen keresztülvihető. Mi olyan példákat fogunk most tekinteni, amelyeknél $F(x)$ -et nem ismerjük, de az átlagfüggvényből kerülő úton meg tudjuk határozni.

II. Tekintsünk egy sztochasztikus folyamatot $0 \leq t < \infty$ időközben. Tegyük fel, hogy a folyamat csak két állapotban lehet: A vagy B állapotban. Legyen a folyamat $t = 0$ időpontban A állapotban és tegyük fel, hogy folyamatunkban az A és B állapotok váltakoznak. Legyenek az egymást követő különböző állapotokban való tartózkodás időtartamai független, pozitív valószínűségi változók. Mégpedig az A állapotban való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvénye: $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, ha $x \geq 0$ és a B állapotban való tartózkodás időtartamának eloszlásfüggvénye: $H(x)$.

Most a folyamat regenerációs pontjait mindazon időpontok alkotják, amelyekben a rendszer A állapotban van. Ugyanis ha egy időpillanatban A állapotban van a rendszer, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $A \rightarrow B$ átmenet $\leq x$ távolságra következik be: $G(x)$, függetlenül attól, hogy mióta tart már az A állapot. Ugyanis ha u ideje tart az A állapot, úgy ezen feltétel mellett annak a feltételes valószínűsége, hogy a következő $A \rightarrow B$ átmenet legfeljebb x időtartamon belül következik be:

$$(1) \quad \frac{G(u+x) - G(u)}{1 - G(u)} = G(x);$$

és ez független u értékétől. Megjegyezzük, hogy az (1) tulajdonság az exponenciális eloszlás kizárólagos sajátja.

A következőkben az $A \rightarrow B$ átmeneteket fogjuk tekinteni a rekurrens E eseményeknek.

Az egymást követő $A \rightarrow B$ átmenetek időpontjai közötti távolságok egyforma eloszlású független valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvénye: $F(x) = G(x) * H(x)$, azaz

$$(2) \quad F(x) = \int_0^x G(x-y) dH(y) = \int_0^x H(x-y) dG(y).$$

Ekkor felmerül az a kérdés, hogy $(0, t)$ időközben mennyi lesz az $A \rightarrow B$ átmenetek száma és a B állapotban való tartózkodás összidőtartama. Legyen $W(t, n)$ annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben $\leq n$ $A \rightarrow B$ átmenet fordul elő és $\Omega(t, z)$ annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben a B állapotban való tartózkodás összidőtartama $\leq z$. Jelöljék ugyanezen valószínűségeket az $(u, u+t)$ intervallumra vonatkozóan, $u \rightarrow \infty$ határesetben $W^*(t, n)$, illetve $\Omega^*(t, z)$.

Ha a $G(x)$, illetve $F(x)$ eloszlásfüggvényeket ismerjük, úgy a felsorolt valószínűségek meghatározása nem jelent nehézséget. Mi a következőkben olyan esetekkel fogunk foglalkozni, midőn ezeket az eloszlásokat nem ismerjük, de kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt, a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát, vagy $P_A(t)$ -t, annak a valószínűségét, hogy t időpontban A állapotban van a rendszer. $m(t)$ vagy $P_A(t)$ ismeretéből azután meghatározható $G(x)$ és $F(x)$ és ezek segítségével a kérdéses valószínűségek is.

1. §. A kérdéses valószínűségek meghatározása

I. eset.

$W(t, n)$ meghatározása. $(0, t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő, ha az $n + 1$ -edik esemény a t időpont után következik be, azaz

$$(3) \quad W(t, n) = P(t < t_{n+1}) = 1 - P(t_{n+1} \leq t) = 1 - F_{n+1}(t),$$

ahol $F_{n+1}(t)$ jelenti az $F(t)$ eloszlásfüggvény önmagával való $n + 1$ -szeres konvolúcióját. Ugyanis t_{n+1} egyenlő $n + 1$ számú független valószínűségi változó összegével, melyek mindegyikének eloszlásfüggvénye $F(x)$.

Legyen $F(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltja :

$$(4) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) \quad (\Re(s) \geq 0),$$

úgy

$$(5) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n) dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s} \quad (\Re(s) > 0),$$

ahonnan $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

A momentumok meghatározása. Ha $W(t, n)$ r -edik hatványmomentuma véges, úgy a következőképpen határozható meg :

$$(6) \quad m_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] F_{n+1}(t).$$

Ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja :

$$(7) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^r - n^r] [\varphi(s)]^{n+1} = \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [\varphi(s)]^j}{[1 - \varphi(s)]^j},$$

ahol \mathfrak{S}_r^j a másodfajú Stirling-számokat jelöli. Innen $m_r(t)$ egyértelműen meghatározható.

Speciálisan az $m(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(8) \quad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t)$$

és

$$(9) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}.$$

$W^*(t, n)$ meghatározása. Jelentse az u időpontnak a közvetlen utána következő eseménytől vett távolságát η_u valószínűségi változó. Ekkor könnyen belátható, hogy annak a valószínűsége, hogy az $(u, u + t)$ időközben $\leq n$ esemény fordul elő $1 - P(\eta_u \leq t) * F_n(t)$.

Itt $P(\eta_u \leq x)$ valószínűség eloszlásfüggvény a következő explicit alakban írható fel:

$$(10) \quad \begin{aligned} P(\eta_u \leq x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_u^{u+x} [1 - F(u + x - y)] dF_n(y) = \\ &= \int_u^{u+x} [1 - F(u + x - y)] dm(y). \end{aligned}$$

Ugyanis $\eta_u \leq x$ akkor áll fenn, ha az $(u, u + x)$ intervallumban legalább egy esemény előfordul. Ez több egymást kizáró módon jöhet létre: $(u, u + x)$ intervallumban az utolsó előforduló esemény lehet az $n = 1, 2, \dots$ -ik és így a teljes valószínűségek tétele alapján kapjuk meg a (10) kifejezést, ha még felhasználjuk $m(t)$ (8) alatti előállítását.

Az η_u függvény által definiált folyamat lényegében megegyezik $J. L. Doob$ [1] munkájában vizsgált megújítási folyamat speciális esetével. Ha feltesszük, hogy $F(x)$ átlaga véges, azaz

$$\mu = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx < \infty$$

és $F(x)$ nem rácsos eloszlás, azaz nem olyan eloszlásfüggvény, amely csupán ugrásokkal növeli értékét egy adott szám bizonyos egészszámú többszöröseinél, úgy alkalmazhatjuk $Doob$ idézett munkájának 12. tételét, amely szerint létezik a következő határeloszlásfüggvény

$$(11) \quad F^*(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} P(\eta_u \leq x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(t)] dt.$$

Megjegyezzük, hogy ha $\lim m'(t) = 1/\mu$ határérték létezik, úgy (10)-ből már következik (11) határeloszlás létezése is. Ha $F(x)$ rácsos eloszlás, úgy könnyen megmutatható, hogy $m'(t)$ -nek nincs határértéke és ilyenkor $F^*(x)$ sem létezik.

Így (11)-re való tekintettel az $u \rightarrow \infty$ határátmenetet elvégezve azt nyerjük, hogy

$$(12) \quad W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t).$$

Megjegyezzük, hogy ha $W^*(t, n)$ -et úgy értelmezzük, mint végtelen hosszú ideje tartó folyamat esetén annak a valószínűségét, hogy egy találmásra kiválasztott t hosszúságú intervallumban az előforduló események száma $\leq n$, úgy elegendő csupán azt feltenni, hogy $F(x)$ átlaga, μ véges legyen. Pontosabban az a helyzet, hogy most is $(u, u+t)$ intervallumra számítjuk ki a keresett valószínűséget, ahol azonban most u egyenletes eloszlást mutató valószínűségi változó $(0, T)$ szakaszon és ezután $T \rightarrow \infty$ határátmenetet végzünk. Ekkor a »nagy számok erős törvényének« alkalmazásával megmutatható, hogy u -nak a következő eseménytől vett távolságának eloszlásfüggvénye $T \rightarrow \infty$ esetén $F^*(x)$ -hez tart és ekkor csupán egyetlen feltévéssel kell élni, mégpedig azzal, hogy $\mu < \infty$. Így az előzőhöz hasonló okoskodással $W^*(t, n)$ ismét (12)-ből adódik.

Most $W^*(t, n)$ Laplace-transzformáltja $\Re(s) > 0$ -ra :

$$(13) \quad \int_0^\infty e^{-st} W^*(t, n) dt = \frac{1}{s} - \frac{[1 - \varphi(s)] [\varphi(s)]^n}{\mu s^2},$$

ahonnan $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

A momentumok meghatározása. Ha $W^*(t, n)$ r -edik momentuma $m_r^*(t)$ létezik, úgy erre fennáll

$$(14) \quad m_r^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [(n+1)^r - n^r] [1 - W^*(t, n)]$$

és ennek Laplace—Stieltjes-transzformáltja

$$(15) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm_r^*(t) = \frac{1}{\mu s} \sum_{j=1}^r \mathfrak{S}_r^j \frac{j! [\varphi(s)]^{j-1}}{[1 - \varphi(s)]^{j-1}}.$$

Speciálisan az $m^*(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(16) \quad m^*(t) = \sum_{n=0}^\infty [1 - W^*(t, n)] = \frac{t}{\mu}.$$

II. eset.

$W(t, n)$ meghatározása. $W(t, n)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek száma $\leq n$. A korábbi gondolatmenethez hasonlóan felírható, hogy

$$(17) \quad W(t, n) = 1 - G(t) * F_n(t).$$

Legyen most

$$(18) \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x), \quad (\Re(s) \geq 0),$$

és mivel

$$(19) \quad \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x) = \frac{p}{p+s}, \quad (\Re(s) > -p),$$

következőleg

$$(20) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = \frac{p\psi(s)}{p+s}, \quad (\Re(s) \geq 0).$$

Így felírható $W(t, n)$ Laplace-transzformáltja, amely most

$$(21) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n) dt = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1} (\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}} \right], \quad (\Re(s) > 0).$$

(21) ismeretében $W(t, n)$ egyértelműen meghatározható.

Ha $W(t, n)$ r -edik momentuma $m_r(t)$ létezik, úgy ennek Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$(22) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm_r(t) = p \sum_{j=1}^r \mathfrak{E}_r^j \frac{j! [\psi(s)]^{j-1}}{[p+s-p\psi(s)]^j}.$$

Speciálisan az $m(t)$ átlagra fennáll, hogy

$$(23) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{p}{p+s-p\psi(s)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

$W^*(t, n)$ meghatározása. Legyen $H(x)$ átlaga

$$(24) \quad \alpha = \int_0^{\infty} x dH(x) = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx < \infty,$$

úgy $F(x)$ átlagára fennáll, hogy

$$(25) \quad \mu = \alpha + \frac{1}{p} = \frac{1 + \alpha p}{p}$$

és könnyen belátható, hogy $F(x)$ -re teljesülnek azok a feltételek, amelyek lehetővé teszik Doob említett tételének alkalmazását és ekkor

$$(26) \quad W^*(t, n) = 1 - F^*(t) * F_n(t),$$

ahol $F^*(t)$ -t (11) szolgáltatja. Így szóról-szóra alkalmazható a $W^*(t, n)$ -re adott korábbi tárgyalás. Speciálisan az $m^*(t)$ átlagra most fennáll, hogy

$$(27) \quad m^*(t) = \frac{t}{\mu} = \frac{tp}{1 + \alpha p}.$$

$\Omega(t, z)$ meghatározása. Hivatkozunk [2] dolgozatunkra, amelyben megmutattuk, hogy fennáll:

$$(28) \quad \Omega(t, z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} H_n(z) & \text{ha } 0 \leq z \leq t \\ 1 & \text{ha } z \geq t. \end{cases}$$

A $\tau_r(t)$ r -edrendű momentumok a következőképpen fejezhetők ki:

$$(29) \quad \tau_r(t) = \int_0^t z^r d_z \Omega(t, z) = r \int_0^t z^{r-1} [1 - \Omega(t, z)] dz.$$

Ezek Laplace–Stieltjes transzformáltjai idézett dolgozatunkban találhatók meg.

$\Omega^*(t, z)$ meghatározása. Ismét hivatkozunk [2] dolgozatunkra, ahol megmutattuk, hogy

$$(30) \quad \Omega^*(t, z) = \begin{cases} \frac{1}{1 + p\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p(t-z)} \frac{[p(t-z)]^n}{n!} [H_n(z) + p \int_0^z [1 - H(x)] H_n(z-x) dx] & \text{ha } 0 \leq z < t \\ 1 & \text{ha } z \geq t. \end{cases}$$

$\Omega^*(t, z)$ -nak $z = t$ helyen

$$(31) \quad \frac{p\alpha}{1 + p\alpha} \int_t^{\infty} \frac{1 - H(x)}{\alpha} dx$$

nagyságú ugrása van.

A $\tau^*(t)$ átlagértékre most fennáll, hogy

$$(32) \quad \tau^*(t) = \frac{c\rho}{1+c\rho} t.$$

Az eddigiekben azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy ha ismerjük a kiindulásul szolgáló eloszlásfüggvényeket, mégpedig az első esetben $F(x)$ -et és a második esetben $F(x)$, illetve $H(x)$ -et, úgy miként lehet meghatározni a keresett valószínűségeket, illetve várható értékeket. A következőkben bemutattunk egy módszert arra vonatkozólag, hogy miként lehet ezeket a kiindulásul szolgáló eloszlásfüggvényeket kerülő úton meghatározni. Ez a módszer sikerrel alkalmazható akkor, ha a kérdéses eloszlásokat nem ismerjük, de az átlagfüggvényt közvetlenül meg tudjuk határozni; miként azt az alábbi példákban is látni fogjuk.

2. §. A kiindulásul szolgáló valószínűség-eloszlások meghatározása

II. eset.

Legyen a $(0, t)$ időközben előforduló események várható száma $m(t)$. Erre fennáll, hogy

$$(33) \quad m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x) dF(x).$$

Ugyanis azon feltétel mellett, hogy az első esemény x időpontban fordul elő, a keresett várható érték: $1 + m(t-x)$. Mivel x eloszlásfüggvénye $F(x)$, ezért a feltételes várható értékek definíciója szerint:

$$m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)] dF(x),$$

ami megegyezik (33)-mal.

W. Feller [3] munkájában a megújuló sokaságokkal kapcsolatban foglalkozott ezzel az egyenlettel és 1. tételében kimutatta, hogy olyan feltételek mellett, amelyek esetünkben teljesülnek, (33)-nak létezik $t > 0$ -ra egyetlen nem-csökkenő $m(t)$ megoldása, amelynek Laplace—Stieltjes transzformáltja:

$$(34) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

Ez megegyezik a (9) formulával.

Innen azt nyerjük, hogy

$$(35) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^\infty e^{-st} dm(t)}{1 + \int_0^\infty e^{-st} dm(t)}, \quad (\Re(s) > 0).$$

Ha kerülő úton meg tudjuk határozni az $m(t)$ átlagfüggvényt, úgy (35) segítségével megkapjuk $\varphi(s)$ -et $F(x)$ Laplace—Stieltjes transzformáltját, amelynek ismeretében $F(x)$ egyértelműen meghatározható. $F(x)$ ismeretében pedig a 2. fejezet formulái már alkalmazhatókká válnak.

Ha $F(x)$ átlagát μ -vel jelöljük és szórásnégyzete σ^2 létezik, úgy bizonyos feltételek mellett fennáll a következő aszimptotikus előállítás:

$$(36) \quad m(t) = \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} + \varepsilon_t,$$

ahol $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t = 0$. Ha ismerjük az $m(t)$ átlagfüggvényt, úgy ezen kifejezés segítségével lehetőség nyílik arra, hogy a μ átlagot és σ^2 szórásnégyzetet egyszerűen meghatározzuk.

Megjegyzés: $m(t)$ (36) alatti aszimptotikus előállítására analitikus bizonyításokat adtak *W. Feller* [3], [4] és *S. Täcklind* [5]. Mi most *A. N. Kolmogorov* és *Ju. V. Prohorov* [6] tételének felhasználásával kimutatjuk, hogy (36) fennáll, ha $F(x)$ nem rácsos eloszlás, melynek átlaga és szórása véges.

Az idézett tétel a minket érdeklő speciális esetben a következőképpen hangzik: Legyen adva egyforma várható értékű valószínűségi változóknak $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ sorozata. Képezzük a $\zeta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$ összeget, ahol ν maga is valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy valamennyi m -re a $\nu = m$ esemény független $\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \dots$ valószínűségi változóktól. Ekkor ζ_ν várható értékére $M(\zeta_\nu)$ -re fennáll, hogy $M(\zeta_\nu) = \mu M(\nu)$, ahol $\mu = M(\xi_n)$.

Jelölje most ζ_n ($n = 1, 2, \dots$) rendre a $(0 < t < \infty)$ intervallumban előforduló események időpontjait, azaz legyen $\zeta_n = t_n$. Ekkor $\xi_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots; t_0 = 0$). Legyen továbbá $\nu = m$, ha $t_{m-1} \leq t < t_m$, azaz ν a $(0, t)$ intervallumban előforduló események számánál eggyel nagyobb. Így $M(\nu) = m(t) + 1$ és $M(\xi_n) = \mu$. A $\{\xi\}$ változók feltételezett függetlenségéből következik, hogy az idézett tétel alkalmazható és pedig fennáll, hogy $M(\zeta_\nu) = [1 + m(t)] \mu$. Azonban $\zeta_\nu = t + \tau_t$, ahol τ_t a t időpontnak a közvetlen utána következő eseménytől vett távolságát jelenti. Így tehát

$$(37) \quad t + M(\tau_t) = [1 + m(t)] \mu,$$

azaz

$$(38) \quad m(t) - \frac{t}{\mu} = \frac{M(\tau_t)}{\mu} - 1.$$

A mondott feltételek mellett τ_t határeloszlását, mindön $t \rightarrow \infty$ (11) szolgáltatja és így könnyen adódik, hogy

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(\tau_t) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu},$$

ahonnan már következik, hogy

$$(40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| m(t) - \frac{t}{\mu} \right| = \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2},$$

amit bizonyítani kívántunk.

A fentiekkel kapcsolatban a következő paradox tényeket kívánjuk fel-
említeni.

Abban az esetben, ha a ξ_n változók várható értéke μ véges, megtör-
ténhetik, hogy r_t várható értéke nagyobb, mint μ , sőt még végtelen is lehet
abban az esetben, ha $\sigma^2 = \infty$ és $t \rightarrow \infty$. Pedig első pillanatban azt gondol-
hatnánk, hogy r_t része valamelyik ξ_n -nek és így várható értéke is kisebb
 μ -nél. A paradox jelenségnek szemléletesen kitejévezve az az oka, hogy a
(t_n, t_{n+1}) intervallumok közül a hosszabbak nagyobb valószínűséggel tar-
talmazzák a t pontot, mint a rövidebbek.

Tegyük fel, hogy $\sigma^2 = \infty$, és tekintsük a folyamatot t időpontban és
kérdézzük, hogy mikor fog bekövetkezni a következő esemény. Ennek a távol-
ságnak várható értéke tetszőleges nagy lehet, ha a folyamat már elegendő
hosszú ideje tart, azaz t elegendő nagy. Ha azonban úgy tesszük fel a kérdést,
hogy a t időpont után számított tetszőleges T idő alatt mennyi lesz az elő-
forduló események várható száma, úgy azt nyerjük, hogy ez $t \rightarrow \infty$ esetben
pontosan T/μ lesz. Ez a paradox tény hasonlóan magyarázható meg, mint
az előbbi paradoxon.

II. eset.

Mint már a (23) formulában is kifejezésre juttattuk, $m(t)$ átlagfügg-
vényre a $(0, t)$ időintervallumban előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható
számára fennáll, hogy:

$$(41) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \frac{p}{p+s} \frac{1}{1-\varphi(s)}, \quad (\Re(s) > 0),$$

ahol $\varphi(s)$ -et (20) egyenlet definiálja. Innen azt nyerjük, hogy

$$(42) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{p}{p+s} \left[\int_0^\infty e^{-st} dm(t) \right]^{-1}.$$

$\varphi(s)$ megfordításával egyszerűen megkapható $F(x)$ és a (20)-ból nyert $\psi(s)$ meg-
fordításával pedig $H(x)$. Végeredményben így az átlagfüggvény ismeretében a
kérdéses valószínűségek és várható értékek a 2. fejezet formulái alapján meghatá-
rozhatók.

Könnyen belátható, hogy most

$$(43) \quad m(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{p\mu} + \varepsilon_t,$$

ahol $\varepsilon_t \rightarrow 0$ midőn $t \rightarrow \infty$. Így $m(t)$ aszimptotikus előállításából meghatá-
rozható $F(x)$ átlaga: μ és szórásnégyzete: σ^2 . Ezek ismeretében könnyen
megkapható $H(x)$ átlaga: $\alpha = \mu - \frac{1}{p}$ és szórásnégyzete: $\sigma_0^2 = \sigma^2 - \frac{1}{p^2}$.

Most azt mutatjuk meg, hogy miként lehet az átlagfüggvényt az alábbi valószínűség kiszámítására visszavezetni. Legyen $P_A(t)$ annak a valószínűsége, hogy t időpontban A állapotban van a rendszer. Ekkor fennáll, hogy

$$(44) \quad m'(t) = p P_A(t).$$

Ez a következőképpen indokolható: $m(t + \Delta t) - m(t)$ jelenti a $(t, t + \Delta t)$ időközben előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát. Ha t időpontban A állapotban van a rendszer, aminek a valószínűsége $P_A(t)$, úgy annak a valószínűsége, hogy a következő $(t, t + \Delta t)$ szakaszban $A \rightarrow B$ átmenet jöjjön létre (1) alapján: $G(\Delta t) = p\Delta t + O(\Delta t)$, függetlenül attól, hogy mióta tart az A állapot. $(t, t + \Delta t)$ szakaszban egynél több $A \rightarrow B$ átmenet előfordulásának a valószínűsége: $O(\Delta t)$. Így könnyen belátható, hogy

$$(45) \quad m(t + \Delta t) - m(t) = p P_A(t) \Delta t + O(\Delta t),$$

ahonnan $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk (44)-et.

Ezek után (42) alapján felírható, hogy

$$(46) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{\left[\int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt \right]^{-1}}{p + s},$$

, amely formula $P_A(t)$ meghatározására redukálja a problémát.

Megjegyezzük, hogy $P_A(t)$ -re könnyen beláthatóan fennáll a következő Volterra-típusú integrálegyenlet:

$$(47) \quad P_A(t) = 1 - p \int_0^t P_A(t-x) [1 - H(x)] dx,$$

amelynek segítségével szintén megkapható (46).

Megemlíttük még, hogy [2] dolgozatunkban Paley—Wiener tétele alapján megmutattuk, hogy fennáll

$$(48) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) = \frac{1}{1 + \alpha p} = \frac{1}{p\mu}$$

és így ezen határérték alapján is meghatározható μ vagy α .

Most néhány példát mutatunk be a fenti módszer alkalmazására.

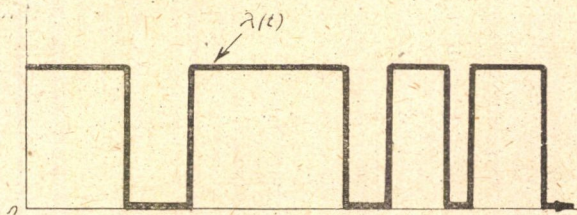
3. §. Példák

I. eset

Tekintsünk egy Poisson-folyamatot változó eseményssűrűséggel, mégpedig az eseményssűrűség legyen váltakozva $\lambda(t) = \lambda$ és $\lambda(t) = 0$ (1. ábra). Azon időtartamok hosszai, melyek alatt az eseményssűrűség λ , legyenek egymástól független valószínűségi változók ugyanazon $G(x) = 1 - e^{-px}$ ($x \geq 0$) eloszlás-

függvénnyel és azon időszakaszok hosszai, melyek alatt az eseménysűrűség zérus, legyenek szintén egymástól független valószínűségi változók ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy $(0, t)$ időközben n esemény fordul elő.

Ez a probléma a gyakorlatban a következő kérdések kapcsán lép fel. Tekintsünk egy elektroncsövet, amely impulzusüzemben működik és tegyük fel, hogy az impulzusok a fent leírt véletlen törvényt követik és az érdekel bennünket, hogy mennyi lesz t időtartam alatt a katódból kilépő elektronok száma. Elektronok csak akkor léphetnek ki a katódról, amikor egy impulzus folyamatban van, és pedig egy impulzus alatt a kilépés sűrűsége λ , míg különben zérus. Vagy tekintsük gépalkatrészek törését, olyan gépeknél, amelyek működésében a fenti törvény szerint szünetek állnak be és az érdekel bennünket, hogy t idő alatt hány alkatrész törésére lehet számítani, ha azokat a törés pillanatában újjal helyettesítjük. Most λ jelenti a törési sűrűséget működő gépnél. Ha a gép nem működik, úgy a törési sűrűség zérus.



1. ábra

A fenti esetben annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ időközben a λ eseménysűrűségű szakaszok összhossza $\leq z$, a (28) formula alapján

$$(49) \quad \Omega_1(t, z) = \Omega(t, t-z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pz} \frac{(pz)^n}{n!} H_n(t-z)$$

és így a keresett valószínűség

$$(50) \quad P_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^n}{n!} dz \Omega_1(t, z).$$

Ugyanis, ha z ideig λ az eseménysűrűség, úgy ez alatt az idő alatt előforduló események száma Poisson-eloszlást követ λz átlaggal. Hasonlóképpen írható fel a stacionárius esetre vonatkozó valószínűség $\Omega^*(t, z)$ segítségével.

Ezen formulák elég bonyolultak. Észrevesszük azonban, hogy az egymást követő események bekövetkezési időpontjainak egymástól vett távolságai egyforma eloszlású független valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvényét jelöljük $F(t)$ -vel. $F(t)$ ismeretében a 2. fejezet eredményei alapján felírhatók a kérdéses valószínűségek és várható értékek.

Most (49) segítségével $F(t)$ explicite a következőképp állítható elő:

$$(51) \quad F(t) = 1 - \int_0^t e^{-\lambda x} d_2 \Omega_1(t, x).$$

Azonban ez sem alkalmas $F(t)$ egyszerű kiszámítására. A következő út azonban célra vezet. Legyen a rendszer t időpontban A állapotban, ha $\lambda(t) = \lambda$ és B állapotban, ha $\lambda(t) = 0$. Ekkor könnyen beláthatóan a II. eset alatt leírt folyamattal állunk szemben és $P_A(t)$ -re fennáll a következő egyenlet:

$$(52) \quad P_A(t) = 1 - p \int_0^t P_A(t-x) [1 - H(x)] dx,$$

ahonnan azt nyerjük, hogy

$$(53) \quad \int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt = \frac{1}{s + \lambda + p[1 - \psi(s)]},$$

ahol $\psi(s)$ jelöli $H(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltját. Most $m'(t) = \lambda P_A(t)$ és így (34) alapján:

$$(54) \quad \int_0^\infty e^{-st} dm(t) = \lambda \int_0^\infty e^{-st} P_A(t) dt = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)},$$

(53) és (54) összevetéséből az adódik, hogy:

$$(55) \quad \varphi(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda + p[1 - \psi(s)]}.$$

$\varphi(s)$ ismeretében a keresett $F(t)$ eloszlásfüggvény inverz transzformációval kapható meg.

Speciálisan $F(t)$ átlagára μ -re fennáll, hogy

$$(56) \quad \mu = \frac{1 + p\lambda}{\lambda}$$

és szórásnégyzetére σ^2 -re:

$$(57) \quad \sigma^2 = \frac{p(\alpha^2 + \sigma_0^2)}{\lambda} + \left(\frac{1 + p\lambda}{\lambda}\right)^2.$$

Itt α $H(x)$ átlagát és σ_0^2 szórásnégyzetét jelöli.

Ez a példa az I. esethez tartozik, bár magát az átlagfüggvényt a II. eset formuláival határoztuk meg.

II. eset.

Tekintsünk egy λ sűrűséggel jellemzett Poisson-folyamatot $0 \leq t$ időpontokban. Tegyük fel, hogy mindenegyes esemény elindít egy történést rendre $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$ időtartammal. Feltesszük, hogy ezek független valószínűségi változók közös $P(\chi_n \leq x) = R(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Azt mondjuk, hogy a rendszer egy adott időpontban A állapotban van, ha abban a pillanatban nincs folyamatban törtézés és B állapotban van, ha legalább egy törtézés folyamatban van. Most az A állapotok időtartamának eloszlásfüggvénye: $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ és a B állapotoké $H(x)$, amelyet egyelőre nem ismerünk. Bennünket most az érdekel, hogy mennyi lesz t időtartam alatt az $A \rightarrow B$ átmenetek száma és a B állapotban való tartózkodás összydőtartama. Legyen $F(x) = G(x) * H(x)$, azaz két szomszédos $A \rightarrow B$ átmenet távolságának eloszlásfüggvénye. $H(x)$ és $F(x)$ ismeretében a kérdéses valószínűségek a 2. fejezet eredményei alapján felírhatók, úgy hogy csak ezek meghatározására van szükség.

Ez a példa a gyakorlatban többek között elektronsokszorozókkal történő részecskeszámlálásoknál lép fel. Ekkor λ jelenti az érkező részecskék sűrűségét és $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$ jelentik a létrehozott impulzusok időtartamait. Ezzel a problémával foglalkozott C. Levert és W. L. Scheen [7], L. Kosten [8], W. Feller [4] munkájában Geiger-Müller-számlálókkal kapcsolatban és C. Domb [9] munkájában véletlen intervallumoknak egyenesen való eloszlásával kapcsolatban. Az említett szerzők csupán a $\chi_n = \varrho$ (állandó) esetet tárgyalják.

Most (46) formula alapján felírható, hogy $F(x)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja:

$$(58) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{\left[\int_0^{\infty} e^{-st} P_A(t) dt \right]^{-1}}{\lambda + s}$$

és így csak $P_A(t)$ meghatározása marad hátra. $\chi_n = \varrho$ állandó esetben:

$$(59) \quad P_A(t) = \begin{cases} e^{-\lambda \varrho} & \text{ha } t \geq \varrho \\ e^{-\lambda t} & \text{ha } t < \varrho. \end{cases}$$

Ugyanis t időpontban akkor van A állapotban a rendszer, ha $(t - \varrho, t)$, illetve $(0, t)$ időközben nem fordul elő esemény, aminek a valószínűségét (59) szolgáltatja. Tehát $\chi_n = \varrho$ (állandó) esetben:

$$(60) \quad \varphi(s) = \frac{\lambda e^{-(\lambda+s)\varrho}}{s + \lambda e^{-(\lambda+s)\varrho}}$$

és ez az egyszerűen nyert formula magában foglalja a felsorolt szerzők idevágó eredményeit. Ugyanakkor kiterjeszthető arra az esetre is, midőn χ_n tetszőleges $R(x)$ eloszlással bír. Az általános esetben ugyanis

$$(61) \quad P_A(t) = e^{-\lambda \int_0^t [1-R(x)] dx}$$

Ez a következőképpen látható be. Ha tudjuk, hogy $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordult elő, aminek a valószínűsége

$$(62) \quad e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

úgy ennek az n eseménynek előfordulási pontjai úgy tekinthetők, mintha $(0, t)$ intervallumra n számú egymástól független, egyenletes eloszlást mutató pontot dobánk rá. És ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlen pontban kezdődő történés befejeződik t időpontig

$$(63) \quad p_t = \frac{1}{t} \int_0^t R(x) dx,$$

és hogy mind az n véletlen pontban kezdődő történés befejeződik t időpontig a függetlenség miatt: $(p_t)^n$. Így tehát a keresett valószínűség:

$$(64) \quad P_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (p_t)^n = e^{-\lambda t(1-p_t)},$$

ami megegyezik (61)-gyel. Ekkor $F(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltja:

$$(65) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{1}{\lambda + s} \left[\int_0^{\infty} e^{-st - \lambda \int_0^t [1-R(x)] dx} dt \right]^{-1}.$$

Mivel most $\lim_{t \rightarrow \infty} P_A(t) = e^{-\lambda \varrho}$, ahol ϱ jelenti $R(x)$ átlagát, ezért (48) alapján $F(x)$ átlagára μ -re fennáll, hogy

$$(66) \quad \mu = \frac{e^{\lambda \varrho}}{\lambda}.$$

Megemlítjük még azt az általánosabb esetet, midőn nem Poisson-folyamat szerint következnek be az események, hanem fennáll, hogy az egymást követő események távolságai független valószínűségi változók ugyanazon $Q(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Tegyük fel most, hogy a létrehozott történések állandó ϱ hosszúságúak. Ekkor is fennáll, hogy az egymást követő $A \rightarrow B$ átmenetek távolságai egymástól független egyforma eloszlású valószínűségi változók

egyelőre ismeretlen $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Legyen $F(x)$ Laplace–Stieltjes transzformáltja $\varphi(s)$, úgy (35) alapján felírható, hogy:

$$(67) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dm(t)}{1 + \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t)},$$

ahol $m(t)$ jelenti a $(0, t)$ időközben előforduló $A \rightarrow B$ átmenetek várható számát. Erre fennáll, hogy

$$(68) \quad m(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < \varrho \\ Q(t) - Q(\varrho) + \int_0^t m(t-x) dQ(x) & \text{ha } t \geq \varrho. \end{cases}$$

Ugyanis azon feltétel mellett, hogy az első esemény x időpontban fordul elő, a keresett várható érték: $m(t-x)$, ha $x \leq \varrho$ és $1 + m(t-x)$, ha $x > \varrho$. Mivel x eloszlását $Q(x)$ szolgáltatja, következőleg a feltételes várható értékek alapján megkapjuk $m(t)$ kifejezést. (68)-ból áttérve Laplace-transzformációra azt nyerjük, hogy

$$(69) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} dm(t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}{1 - \int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}$$

s így (67) szerint:

$$(70) \quad \varphi(s) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)}{1 - \int_0^{\infty} e^{-st} dQ(t)},$$

ahonnan $F(x)$ egyértelműen meghatározható.

Most $F(x)$ átlagára (70) alapján fennáll, hogy

$$(71) \quad \int_0^{\infty} x dF(x) = \frac{\int_0^{\infty} x dQ(x)}{1 - Q(\varrho)}$$

$F(x)$ ismeretében a kérdéses valószínűségek könnyen meghatározhatók.

Csupán megemlítjük, hogy a fenti módszer sikerrel alkalmazható bizonyos incidenciák kérdéseinek megoldására is.

- [1] *J. L. Doob*: Renewal theory from the point of view of the theory of probability [Transaction Amer. Math. Soc. Vol. 63 (1948) 422—438. o.].
- [2] *L. Takács*: Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration [Acta Math. Hung. Vol. 2 (1951) 275—298. o.].
- [3] *W. Feller*: On the integral equation of renewal theory [Annals of Mathematical Statistics Vol 12 (1941) 243—267. o.].
- [4] *W. Feller*: On probability problems in the theory of counters [Courant Anniversary Volume, 1948. 105—115. o.].
- [5] *S. Täcklind*: Fourieranalytische Behandlung vom Erneuerungsproblem [Skandinavisk Aktuarietidskrift (1945) 68—105. o.].
- [6] А. Н. Колмогоров и Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых, [Усп. матем. наук, том 4 (1949), выш. 4 (32), 168—172].
- [7] *C. Levert and W. L. Scheen*: Probability fluctuation of discharges in a Geiger—Müller counter produced by cosmic radiation [Physica, Vol. 10 (1943) 225—238. o.].
- [8] *L. Kosten*: On the frequency distribution of the number of discharges counted by a Geiger—Müller counter in a constant interval [Physica Vol. 10 (1943) 749—756. o.].
- [9] *C. Domb*: The problem of random intervals on a line [Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 43 (1947) 328—341. o.].

НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ РЕКУРРЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Л. Такач

Резюме

Под рекуррентными процессами подразумеваются такие процессы, в которых можно задать некоторое событие E так, что если событие E происходит, то считая от момента происхождения, процесс — независимо от прошлого — показывает такое же стохастическое поведение и в будущем. Вопросы, связанные с упомянутыми процессами обычно сводятся к определению распределения расстояний между моментами возвращения. Такая трактовка является довольно сложной и может быть проведена только в специальных случаях. Описанный в работе метод состоит в том, что сначала определяем функцию среднего значения, т. е. ожидаемое число повторений событий E в интервале $(0, t)$. В большинстве случаев это легко провести. Зная эту функцию мы, можем определить нужные нам вероятности. В качестве примера для вышеупомянутых процессов упоминаются процессы происходящие в счетчиках и в связи с ломкой деталей.

A NEW METHOD FOR DISCUSSING RECURRENT STOCHASTIC PROCESSES

L. TAKÁCS

Summary

Processes which after every occurrence of some event E show the same stochastic behaviour independently of their past, are termed recurrent. Problems connected with them are usually traced back to the determination of the distribution of the recurrence time. This type of discussion is rather complicated, and can only be applied to special cases.

The method proposed in this paper consists in determining first the average function, i. e. the expected number of occurrences of event E in the time interval $(0, t)$, which in most cases can easily be done. Knowing the average function, the probabilities in question can be determined in a very simple manner.

Examples of such processes are those occurring in counters and in connection with breakdown of machinery.

RÉSZECSESZÁMLÁLÓKNÁL FELLÉPŐ KOINCIDENCIA-PROBLÉMÁKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Összefoglalás

Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket elektronsokszorozóval illetve Geiger—Müller-számlálóval vizsgálva a beérkező részecskék hatására az egyes számláló-csővek feszültség-impulzusokat szolgáltatnak. Az elektronsokszorozó minden egyes részecskére ad egy feszültség-lökést, míg a Geiger—Müller-számlálónál az egyes jelzések után holtidő lép fel, amely alatt esetleg érkező részecskék elvesznek az észlelés számára. A feszültség-lökések hatására az észlelő berendezésben exponenciálisan csökkenő jelek keletkeznek, melyek lineárisan összeadódnak. A számlálóberendezés akkor ad jelzést, ha az egyes jelek értékeinek összege áthalad egy előre beállított a küszöbfeszültségen. A szerző megállapítja, hogy miként változik a látszólagos esemény-sűrűség a függvényében. Ezután több számlálóval történő egyidejű számlálásnál a koincidenciák sűrűségét határozza meg az a küszöbfeszültség függvényében.

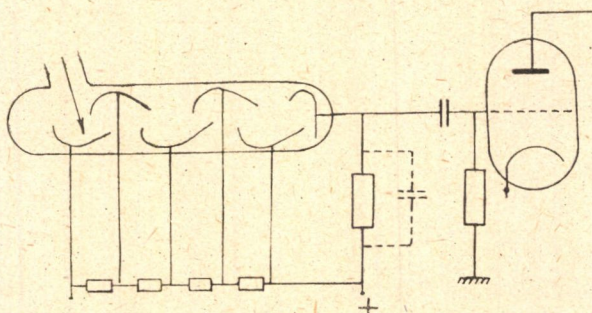
Bevezetés

Ebben a munkában elektronsokszorozóval és Geiger—Müller-számlálóval történő foton vagy részecske (elektron, α rész, stb.) számlálásnál fellépő bizonyos koincidenencia-problémákkal fogunk foglalkozni. Először röviden ismertetjük ezen számlálóberendezések működési elvét. Meghatározzuk a részecskék érzékelésének időbeli sűrűsége és a számláló jelzéseinek időbeli sűrűsége közötti kapcsolatot és ezután két számlálóval történő egyidejű számlálás esetén meghatározzuk a koincidenciák időbeli sűrűségét. Két fontos speciális esetet fogunk tárgyalni, az ú. n. *véletlen koincidenciák* és az ú. n. *műkoincidenciák problémáját*.

1. §. Különböző részecseszámlálók

1. *Az elektronsokszorozó.* Az elektronsokszorozó katódjára beeső fotonok vagy korpuszculák szekunder elektronokat váltanak ki. Egy elektróda-soron végighaladva az elektronok száma egymásután szekunder emisszióval sokszorozódik. Az anódra érkező elektronlavina az elektronok számával arányos feszültség-lökést okoz az anódenálláson (1. ábra). A feszültség-lökések amplitúdói statisztikus ingadozást mutatnak a szekunder elektronemisszió valószínűségi jellegének megfelelően. Az elektronsokszorozó elektromos adatainak megváltoztatásával azonban elérhető, hogy a feszültség-lökések amplitúdói közel állandóak legyenek. Példáinkban mi is erre az esetre fogunk szorítkozni.

A számlálási folyamat további menete abban áll, hogy a számlálócső által szolgáltatott feszültségimpulzusok egy elektroncsöves mérőberendezésbe jutnak, amely rendszerint több fokozatból áll, és amely végül is egy mechanikus számlálót vezérel, vagy például egyenletesen mozgó filmen regisztrálja a jelzések időpontjait. Ezzel kapcsolatban bennünket az a kérdés érdekel, hogy milyen összefüggés áll fenn a számlálóhoz érkező részecskék folyamata és a berendezés által regisztrált folyamat között. Ennek ismeretére azért van szükség, hogy például az észlelt jelzések sűrűségéből vissza tudjunk következtetni a számlálóhoz érkező részecskék sűrűségére. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban különféle elveken működő számlálóberendezéseket használnak, melyek mindegyike más és más tárgyalást kíván. Ezen berendezések közös vonása azonban az, hogy a számlálócső által szolgáltatott feszültséglökéseket formáló körök segítségével kedvezőbb alakra transzformálják, és ezután esetleg diszkriminátor-fokozatot alkalmaznak, amely az amplitúdó szerinti válogatást végzi el. Mi tárgyalásunkban a következő legegyszerűbb esetre szorítkozunk: Feltételezzük, hogy a számlálócső által szolgáltatott feszültség-



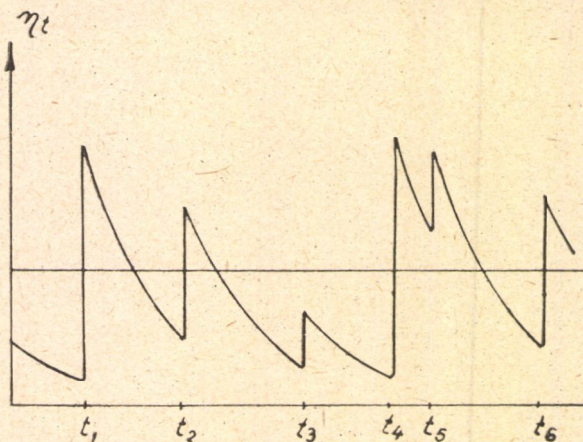
I. ábra

lökések átranzformálódnak a feszültséglökés nagyságával arányos amplitúdójú pozitív feszültséglökésbe és feltesszük, hogy az egyes lökések amplitúdói időben exponenciálisan e^{-at} függvény szerint csökkennek, ahol a a megfelelő kör időállandójának reciprok értéke. Az egyes részecskék által szolgáltatott impulzusok szuperponálódnak és feltesszük, hogy csak azon részecskék által szolgáltatott lökéseket jelzi a berendezés, amelyek hatására a feszültség egy előre beállított a küszöbértéken áthalad és ilyen időpontokban történik egy számlálás. Ez a tárgyalás bonyolultabb mérőberendezéseknél modellül szolgálhat. Egyébként a gyakorlatban úgy valósítható meg, hogy a számláló által szolgáltatott negatív feszültségimpulzusokat fázisfordító cső segítségével pozitív impulzusokba vesszük át és ezeket az impulzusokat egy negatív előfeszültséggel lezárt cső rácsára vesszük, amely tehát csak akkor ad jelzést, ha a rácsra vitt feszültség a lezáró feszültség értékénél magasabbra emelkedik. Ezután erősítő és regisztráló berendezéssel észleljük a jelzéseket.

Megjegyezzük, hogy a fentemlített berendezésekkel kapcsolatban felmerülő problémák az általunk tárgyaltak azt az általánosítást képezik, midőn exponenciálisan csökkenő feszültséglökések helyére egyéb időbeli lefolyású jelek lépnek.

Ha η_t^* valószínűségi változóval jelöljük az említett jellemző feszültség értékét t időpontban, úgy a 2. ábra szerinti lefolyást kapjuk. Megjegyezzük, hogy elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálás esetén mindenegyes a katódhoz érkező részecske létrehoz egy feszültséglökést, csupán a számlálóberendezés nem jelzi mindegyiket. Például a 2. ábrán a $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \dots$ időpontokban bekövetkező jelek közül csak a $t_1, t_2, t_4, t_6, \dots$ időpontokban előfordulókat jelzi a berendezés.

Tegyük fel, hogy az elektronsokszorozóval λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket észlelünk. Ez az eset áll elő például rádióaktív anyagok bomlásának vizsgálatánál vagy kozmikus sugárzással kapcsolatos méréseknél. Feltesszük továbbá, hogy az egyes részecskék által létrehozott feszültséglökések nagyságai χ_k ($k = 1, 2, \dots$) egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók közös $P(\chi_k \leq x) = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ez a $H(x)$ eloszlásfüggvény az elektronsokszorozóra és a mérőberendezésre jellemző és kísérletileg meghatározható. Legyen továbbá $\alpha = 1/RC$,



2. ábra

azaz az időállandó reciprok értéke. Ekkor az η_t^* -gal jelölt feszültség, két jel érkezése között, időben $e^{-\alpha t}$ függvény szerint csökken és ugrásokkal növeli értékét a jelek előfordulásának pillanatában. Tegyük fel, hogy a számlálás folyamata végtelen hosszú ideje tart és jelölje η_t^* a feszültség nagyságát t időpontban. [1] dolgozatunkban meghatároztuk η_t^* eloszlását. Legyen η_t^* eloszlásfüggvénye $F^*(x)$ és karakterisztikus függvénye: $E\{e^{i\omega\eta_t^*}\} = \psi^*(\omega)$ úgy fennáll, hogy

$$(1) \quad \psi^*(\omega) = \exp \left(-\frac{\lambda}{\alpha} \int_0^1 \frac{1 - \varphi(\omega u)}{u} du \right),$$

ahol

$$(2) \quad \varphi(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega x} dH(x).$$

(1) segítségével $F^*(x)$ egyértelműen meghatározható.

$F^*(x)$ ismeretében könnyen kiszámítható a látszólagos eseményssűrűség (észlelések sűrűsége), amelyet a küszöbfeszültség mellett jelölünk $\lambda'(a)$ -val. Erre fennáll:

$$(3) \quad \lambda'(a) = \lambda \left[F^*(a) - \int_0^a H(a-x) dF^*(x) \right].$$

Ugyanis egy jel a küszöbfeszültség mellett akkor lesz észlelve, ha a jel megérkezésének pillanatában $\tau_i^* = x < a$ és a jel amplitúdója nagyobb $(a-x)$ -nél.

Ha speciálisan valamennyi jel amplitúdója $\chi_k = \mu$ (állandó), úgy (1) szerint

$$(4) \quad \psi^*(\omega) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \int_{\mu}^{\infty} \frac{e^{i\omega u}}{u} du}}{(-i\omega \mu \gamma)^{\lambda/\alpha}},$$

ahol $\gamma = e^C = 1,781072 \dots$ ($C = 0,577215 \dots$ az Euler-állandó). Innen

$$(5) \quad F^*(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) (\mu \gamma)^{\lambda/\alpha}} \left[x^{\lambda/\alpha} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{\mu}\right]} \frac{(-1)^n (\lambda/\alpha)^n}{n!} \int_{n\mu}^x (x-y)^{\lambda/\alpha} f_n(y) dy \right],$$

ahol

$$(6) \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \mu \\ 1/x & \text{ha } x \geq \mu \end{cases}$$

és $f_n(x)$ ennek n -szeres konvolúciója, amely a következő rekurzív formula segítségével határozható meg:

$$(7) \quad f_n(x) = \int_{\mu}^{x-(n-1)\mu} \frac{f_{n-1}(x-y)}{y} dy.$$

Ekkor a látszólagos eseményssűrűség:

$$(8) \quad \lambda'(a) = \lambda [F^*(a) - F^*(a - \mu)].$$

Megjegyzés: Ha azt is tekintetbe kívánjuk venni, hogy az egyes részecskék csupán bizonyos valószínűséggel szóltatják meg a számlálósövet, úgy ennek figyelembevétele vagy úgy történik, hogy a χ_k amplitúdók számára bizonyos valószínűséggel megengedjük a zérus értéket, vagy λ helyett λp -nek vesszük a Poisson-folyamat eseményssűrűségét, ahol p jelenti a megszólalási valószínűséget.

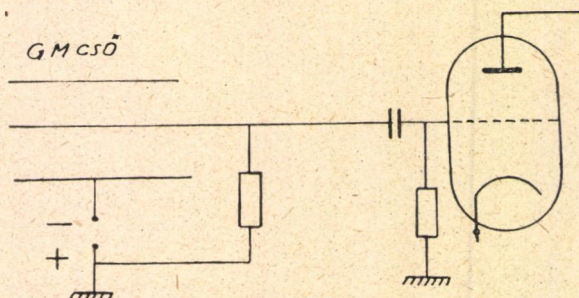
2. *A Geiger—Müller-számláló.* Geiger—Müller-számlálóknál a beeső fotonok vagy részecskék ionokat hoznak létre a cső gázterében. Az elektronsok-sorozótól eltérően az ionizáció időbeli lefolyása az u . n. holt idő (vagy érzé-

ketlenségi idő) alatt még esetleg érkező részecskék elvesznek az észlelés számára. Ezután azonban hasonló a helyzet, mint az elektronsokszorozó esetében volt. Az észlelt részecskék a Geiger—Müller-cső munkaellenállásán feszültséglökéseket hoznak létre és ezeket a feszültséglökéseket egy ugyanolyan típusú mérőberendezés segítségével vizsgáljuk, mint amelyet az elektronsokszorozónál írtunk le. A berendezést tehát két adat, az időállandó reciprok értéke α és az a küszöbfeszültség jellemzi (3. ábra).

Tegyük fel, hogy a számlálóhoz érkező részecskék vagy fotonok időpontjai λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak. Ekkor, ha a holtidő τ állandó, úgy két feszültséglökés közötti idő eloszlásfüggvénye

$$(9) \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \tau \\ 1 - e^{-\lambda(x-\tau)} & \text{ha } x \geq \tau. \end{cases}$$

Ekkor már maga a Geiger—Müller-számláló is korlátozza a számlálás határfokát, ugyanis ekkor a számláló által szolgáltatott feszültséglökések sűrűsége: $\lambda/(1 + \lambda\tau)$ és az észlelőberendezés ezt tovább csökkenti. Ez a szemléletből különben plauzibilis tény [2] dolgozatunkban exaktul meg van indokolva. Ha a kisülési idő nem állandó, hanem maga is valószínűségi változó, úgy



3. ábra

$G(x)$ az $1 - e^{-\lambda x}$ exponenciális eloszlásnak a kisülési idő eloszlásával való kompozíciója. Tegyük fel, hogy az egyes feszültséglökések ismét egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók közös $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel, úgy [3] dolgozatuk eredményei alapján felírhatjuk, hogy tettszőleges $G(x)$ esetén és a küszöbfeszültség mellett stacionárius esetben a lát-szólagos eseménysűrűség

$$(10) \quad \lambda'(a) = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} \left[F(a) - \int_0^a H(a-x) dF(x) \right],$$

ahol τ a holtidő várható értéke és $F(x)$ eloszlásfüggvény a következő integrálegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása

$$(11) \quad F(x) = \int_0^\infty K(x, y) dF(y),$$

ahol

$$(12) \quad K(x, y) = \int_0^{\infty} H(xe^{au} - y) dG(u).$$

Itt $F(x)$ jelenti az η_t^* feszültség eloszlásfüggvényét közvetlenül egy jel bekövetkezése előtti időpontban. A feszültség nagyságának eloszlásfüggvénye egy tetszőleges időpontban:

$$(13) \quad F^*(x) = \int_0^{\infty} K(xe^{au}) dG^*(u),$$

ahol

$$(14) \quad G^*(x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} \int_0^x [1 - G(u)] du$$

és

$$(15) \quad K(x) = \int_0^x H(x - y) dF(y).$$

Ha speciálisan a holtidő τ állandó és mindenegyes feszültséglökés ugyanazon $\chi_k = \mu$ állandóval egyenlő, úgy:

$$(16) \quad \lambda'(a) = \frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} |F(a) - F(a - \mu)|$$

és $F(x)$ a következő rekurzív formulával határozható meg:

$$(17) \quad F(x) = e^{\lambda\tau x^{\lambda\alpha}} \left[A - \frac{\lambda}{\alpha} \int_{\mu}^{xe^{a\tau}} F(t - \mu) \frac{dt}{t^{\lambda\alpha+1}} \right],$$

amely a (11) integrálegyenletből nyerhető. Ezen formula segítségével $F(x)$ előállítható a $[0, \mu/(e^{a\tau} - 1)]$ intervallumban mégpedig rekurzíve $\mu e^{-a\tau}$, $\mu e^{-2a\tau}$, $\mu e^{-3a\tau}$, ... hosszúságú szakaszokra. Könnyen belátható, hogy $F(x) = 1$, ha $x \geq \mu/(e^{a\tau} - 1)$. Az egyelőre ismeretlen A állandó is ezen utóbbi követelményből határozható meg. A meghatározására azonban egy másik út is kínálkozik. (17) segítségével fel tudunk írni egy összefüggést $F(x)$ Laplace transzformáltjára $\Phi(s)$ -re, amely összefüggésből meghatározható $\Phi(s)$ aszimptotikus viselkedése $s \rightarrow \infty$ esetén. Innen ismert Abel-típusú tételek felhasználásával megadható $F(x)$ viselkedése $x \rightarrow 0$ esetén. Így ezen az úton azt nyerjük, hogy

$$(18) \quad A = \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) (\mu\gamma)^{\lambda\alpha}},$$

ahol $\gamma = e^C = 1,781072 \dots$. Ekkor (17) segítségével felírható, hogy a $(0, \mu e^{-\alpha})$ intervallumban :

$$(19) \quad F(x) = \frac{e^{\lambda \tau x^{\lambda/\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) (\mu \gamma)^{\lambda/\alpha}}$$

és a $(\mu e^{-\alpha \tau}, \mu e^{-2\alpha \tau})$ intervallumban :

$$(20) \quad F(x) = \frac{e^{\lambda \tau x^{\lambda/\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) (\mu \gamma)^{\lambda/\alpha}} \left[1 - \frac{\lambda e^{\lambda \tau}}{\alpha} \int_{\mu}^{xe^{\alpha \tau}} \frac{(t - \mu)^{\lambda/\alpha}}{t^{\lambda/\alpha + 1}} dt \right].$$

Hasonlóan határozható meg $F(x)$ a többi intervallumokra is. Most (13) szerint :

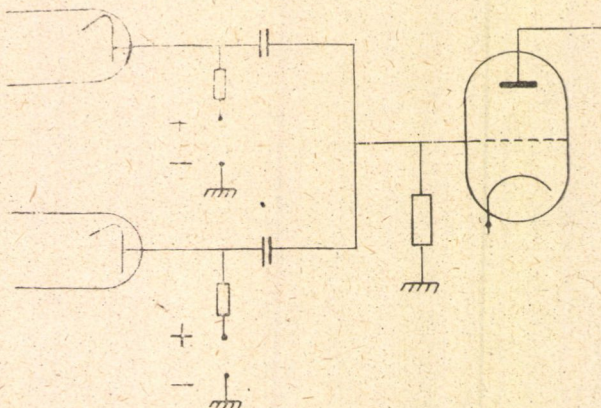
$$(21) \quad F^*(x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda \tau} \int_0^{\tau} F(xe^{\alpha u} - \mu) du + \frac{F(x)}{1 + \lambda \tau}.$$

A fenti formulák birtokában eldönthető, hogy különböző α küszöbfeszültségek mellett a látszólagos eseményssűrűségből miként lehet visszakövetkeztetni a valódi eseményssűrűségekre és hogy milyen α küszöbfeszültség mellett a leghatásosabb a számlálási kísérletet elvégezni.

Most azonban bizonyos koincidencia-problémákkal fogunk foglalkozni.

2. §. Koincidencia-problémák

Ha több elektronsokszorozót vagy Geiger—Müller-számlálót használunk egyidejűleg foton- vagy részecskeszámlálásra és az egyes számlálók által szolgáltatott feszültségjelöket ugyanazon mérőberendezéssel vizsgáljuk, úgy ezáltal a koincidenciákat észleljük (4. ábra). Ekkor probléma, hogy különböző α küszöbfeszültségek mellett mennyi lesz a koincidenciák látszólagos sűrűsége.



4. ábra

Ennek ismerete akkor bír fontossággal, ha két vagy több folyamat között korreláció-vizsgálatot végzünk, vagy ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy szisztematikus koincidenciák vizsgálatánál mennyi a véletlen koincidenciák sűrűsége, hogy azokat le tudjuk számítani. Ekkor érdekességgel bír az a kérdés, hogy milyen a küszöbfeszültség mellett a leghatásosabb a kísérletet elvégezni.

Mi a következőkben arra szorítkozunk, midőn két számlálóval végezzük a kísérletet és csupán két szélső esetet tárgyalunk: a teljes függetlenség esetét és a teljes kapcsolat esetét. Az első alatt azt értjük, hogy mindkét számláléhoz egymástól függetlenül Poisson-folyamat szerint érkeznek a részecskék, a második alatt pedig azt az esetet értjük, midőn mindkét számláléhoz pontosan egyidejűleg érkeznek a részecskék és ez az együttes érkezési sorozat Poisson-folyamatot alkot. Az első esetet *véletlen koincidenciáknak*, a másodikat *műkoincidenciáknak* nevezzük. Tárgyalásunkban nem jelent lényeges megszorítást, hogy két számlálóra szorítkozunk, hasonlóan tárgyalható több számláló esete is.

1. *Elektronsokszorozók esete.* Tegyük fel, hogy mindkét elektronsokszorozónál minden beeső részecske állandó μ nagyságú feszültséglökést okoz.

Véletlen koincidenciák sűrűsége. Tegyük fel, hogy mindkét elektronsokszorozóhoz egymástól függetlenül λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek a részecskék. Ekkor a véletlen koincidenciák sűrűsége a küszöbfeszültség mellett:

$$(22) \quad \Lambda_1 = 2\lambda [F^*(a) - F^*(a - \mu)],$$

ahol $F^*(x)$ -et (5) szolgáltatja, csupán λ helyettesítendő 2λ -val. Ekkor ugyanis úgy tekinthető a helyzet, mintha egyetlen elektronsokszorozóval 2λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkező részecskéket számlálnánk.

Műkoincidenciák sűrűsége. Tegyük fel most, hogy mindkét sokszorozóhoz pontosan egyidejűleg érkeznek a részecskék λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint. Ekkor a műkoincidenciák sűrűsége a küszöbfeszültség mellett:

$$(23) \quad \Lambda_2 = \lambda \left[F^*\left(\frac{a}{2}\right) - F^*\left(\frac{a}{2} - \mu\right) \right],$$

ahol $F^*(x)$ -et ismét az (5) formula szolgáltatja. Ekkor ugyanis úgy tekinthető a helyzet, mintha egyetlen elektronsokszorozó 2μ nagyságú feszültséglökéseket szolgáltatna egy beérkező részecske hatására.

Megjegyezzük, hogy ha az egyik elektronsokszorozó által szolgáltatott lökések nagyságának eloszlása $H_1(x)$ a másiké pedig $H_2(x)$ és az egyikhez λ_1 eseménysűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek a részecskék, a másikhoz λ_2 sűrűséggel és mindkettőhöz egyidejűleg λ_{12} sűrűséggel, úgy ez a rendszer is visszavezethető egyetlen sokszorozó esetére, amelyhez $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ sűrűséggel érkeznek részecskék és

$$(24) \quad H(x) = \frac{\lambda_1 H_1(x) + \lambda_2 H_2(x) + \lambda_{12} H_1(x) * H_2(x)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}$$

eloszlású feszültséglökéseket hoznak létre.

2. *Geiger—Müller-számlálók esete.* Tegyük fel, mint előbb, hogy a τ holtidő állandó, és az egyes részecskék által létrehozott feszültséglökések állandó μ amplitúdójúak.

Véletlen koincidenciák sűrűsége. Mindkét számlálóhoz egymástól függetlenül λ esemény-sűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek a részecskék. Ekkor a véletlen koincidenciák sűrűsége a küszöbfeszültség mellett :

$$(25) \quad \Lambda_1 = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda\tau} [L(a) - L(a - \mu)],$$

ahol

$$(26) \quad L(x) = \int_0^x F^*(x-y) dF(y).$$

Ugyanis ekkor az időegység alatt átlag $2\lambda/(1 + \lambda\tau)$ impulzus érkezik a berendezéshez, de ezek közül csak azokat jelzi a berendezés, amelyek olyan pillanatban érkeznek, midőn a feszültség értéke $(a - \mu, a)$ intervallumba esik. Egy impulzus érkezésének az időpontjában $L(x)$ szolgáltatja a kritikus feszültség eloszlását. Ugyanis az impulzus beérkezésének a pillanatában $F(x)$ szolgáltatja az illető csőre jellemző feszültség eloszlását és ugyanakkor a másik csőre jellemző feszültséget $F^*(x)$ és $L(x)$ e két eloszlás kompozíciója. Itt $F(x)$ -et a (17) és $F^*(x)$ -et a (21) formula alapján lehet meghatározni.

Műkoincidenciák sűrűsége. Tegyük fel most, hogy mindkét számlálóhoz egyidejűleg λ esemény-sűrűségű Poisson-folyamat szerint érkeznek a részecskék. Ekkor a küszöbfeszültség mellett a műkoincidenciák sűrűsége :

$$(27) \quad \Lambda_2 = -\frac{\lambda}{1 + \lambda\tau} \left[F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(\frac{a}{2} - \mu\right) \right],$$

ahol $F(x)$ -et (17) rekurzív formula segítségével határozhatjuk meg. Ugyanis ekkor a rendszer helyettesíthető egyetlen Geiger—Müller-számlálócsővel, amelynek impulzusai μ helyett 2μ nagyságúak.

A fenti formulák lehetővé teszik annak számbavételét, hogy különböző a küszöbfeszültségek mellett mennyi lesz a véletlen koincidenciák sűrűsége és így koincidencia-vizsgálatoknál eldönthető, hogy csupán véletlen koincidenciákról van-e szó vagy szisztematikus koincidenciák is fellépnek. Továbbá, ha két folyamat közötti korreláció megállapítása érdekkel bennünket, úgy célszerű a számlálást olyan a küszöbfeszültség beállítása mellett elvégezni, amely mellett maximális a véletlen és műkoincidenciák sűrűségének különbsége. Ugyanis ilyen a küszöbfeszültség mellett lesz a berendezés érzékenysége a legnagyobb.

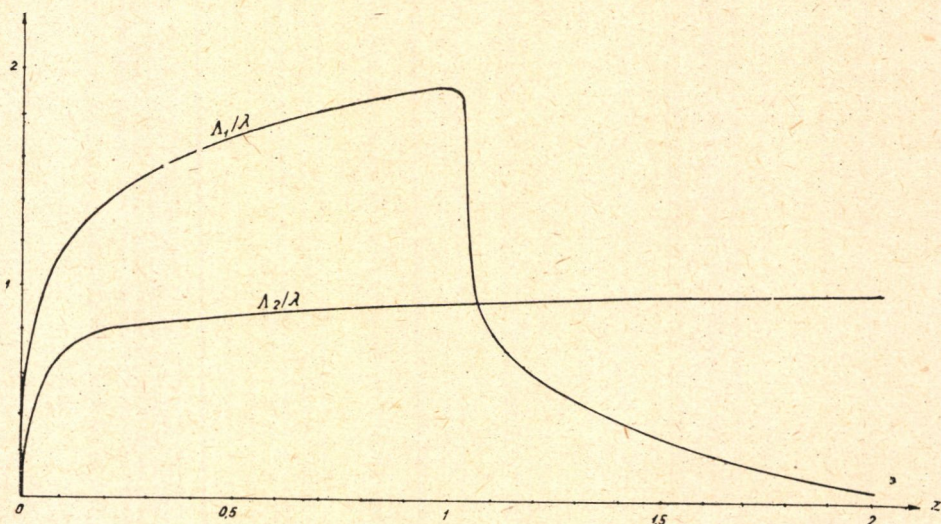
Most néhány példán megmutatjuk, hogy elektronsokszorozó és Geiger—Müller-számláló esetén hogyan változik a véletlen és műkoincidenciák sűrűsége az a lezáró feszültség függvényében.

3. *Példák. Elektronsokszorozó esete.* a) *Véletlen koincidenciák sűrűsége.* Legyen $z = a/\mu$ úgy (22) szerint $0 \leq z \leq 1$ értékekre :

$$\Lambda_1|_{\lambda} = \frac{2z^{2\lambda/\alpha}}{\gamma^{2\lambda/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha}\right)}$$

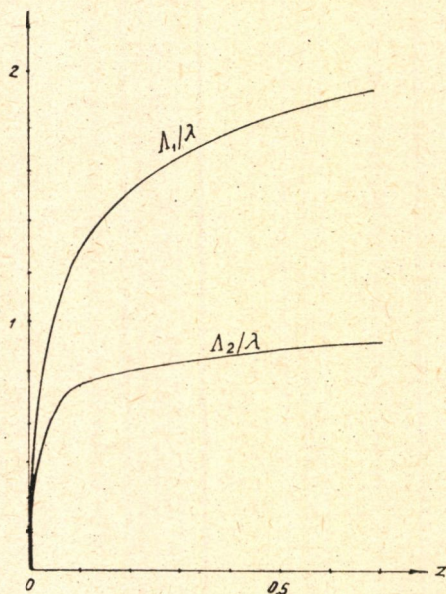
és $1 \leq z \leq 2$ értékekre :

$$\Lambda_1/\lambda = \frac{2z^{2\lambda/\alpha}}{\gamma^{2\lambda/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha}\right)} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{2\lambda/\alpha} - \frac{2\lambda}{\alpha} \int_{1/z}^1 \frac{(1-y)^{2\lambda/\alpha}}{y} dy \right]$$



5. ábra

b) *Műkoincidenciák sűrűsége.* Legyen ismét $z = a/\mu$ úgy (23) szerint $0 \leq z \leq 2$ értékekre :



6. ábra

$$\Lambda_2/\lambda = \frac{(z/2)^{\lambda/\alpha}}{\gamma^{\lambda/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)}$$

Az 5. ábrán Λ_1/λ és Λ_2/λ értékeit tüntettük fel z függvényében $\lambda/\alpha = 0,1$ mellett.

Geiger—Müller-számláló esete.

a) *Véletlen koincidenciák sűrűsége.* Legyen $z = a/\mu$ úgy (25) szerint $0 \leq z \leq e^{-a\tau}$ értékekre

$$\Lambda_1/\lambda = \frac{2}{(1 + \lambda\tau)^2} \cdot \frac{e^{2\lambda\tau} z^{2\lambda/\alpha}}{\gamma^{2\lambda/\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha}\right)}$$

b) *Műkoincidenciák sűrűsége.* Legyen ismét $z = a/\mu$ úgy (26) szerint $0 \leq z \leq e^{-a\tau}$ értékekre

$$\Lambda_2/\lambda = \frac{1}{1 + \lambda\tau} \cdot \frac{e^{\lambda\tau} (z, 2)^{\lambda} \alpha}{\gamma^{\lambda} \alpha \Gamma \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)}.$$

A 6. ábra $\lambda/\alpha = 0,1$ és $\lambda\tau = 0,3$ esetén tünteti fel Λ_1/λ és Λ_2/λ értékeit z függvényében.

IRODALOM

[1] Takács L.: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. (M. T. A. III. Oszt. Közl. megjelenőben).

[2] Takács L.: Bekövetkezési és koincidencia-jelenségek időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. (M. T. A. III. Oszt. Közl. 1 (1951) 371—386 o.)

[3] Takács L.: Bizonyos fizikai regisztrálóberendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. (M. T. A. III. Oszt. Közl. megjelenőben).

О ПРОБЛЕМАХ СОВПАДЕНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ В СЧЕТЧИКАХ

Л. Такач

Резюме

Частицы, прибывающие по процессу типа Пуассона мы исследуем мультипликатором или счетчиком Гейгера—Мюллера. Под действием прибывающих частиц счетчики дают импульсы напряжения. Мультипликатор дает импульс напряжения при прибытии каждой частицы в то время как в счетчике Гейгера—Мюллера после каждого сигнала наступает мертвое время, в течение которого прибывающие частицы не регистрируются. Под действием импульсов напряжения в регистрирующей схеме возникают затухающие по показательному закону сигналы, которые слагаются линейно. Счетчик дает сигнал тогда, когда сумма значений сигналов превосходит некоторое напряжение α . В работе определяется, как изменяется кажущаяся плотность событий и плотность коинцидентий как функции от α .

COINCIDENCE PROBLEMS ARISING IN THE THEORY OF COUNTERS

L. TAKÁCS

Summary

Particles arriving according to a Poisson process are kept under observation by means of electron multipliers or Geiger—Müller counters. Upon the effect of the particles arriving the individual tubes give rise to random voltage pulses. While in the electron multiplier each particle produces a voltage pulse, in the Geiger—Müller counter each signal is followed by an inoperative period and particles possibly arriving during it escape observation. The counted particles cause exponentially decreasing signals in the recording apparatus which are superposed linearly. The recorder will indicate when the sum of the signals exceeds a given threshold voltage α . In this manner it is possible to determine the apparent density of events as a function of the threshold voltage α . Finally, the density of coincidences is determined as a function of the threshold voltage α , when more counters are used for the observation of simultaneous random events.

VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK KEVERÉKÉNEK FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐIRE

MEDGYESSY PÁL

Összefoglalás

A szerző a következő problémával foglalkozik: Ha egy valószínűség-sűrűség-függvény (amely empirikusan van megadva) felfogható, mint különböző paraméterű normális sűrűségfüggvények keveréke, ahol a súlyok konstansok, hogyan lehet meghatározni a komponenseket? — A cikk hangsúlyozza a probléma fontosságát és spektroszkópiai valamint biológiai példákkal illusztrálja. Azután foglalkozik a megoldás grafikus és analitikus módszereivel. *G. Doetsch* a megoldást a keverék Fourier-transzformáltja segítségével adja meg, míg a szerző ugyanezt a keverék magasabb deriváltjaival képezett függvényt sor segítségével állítja elő. — A vizsgálatokat a szerző két példával illusztrálja, megemlíti ezen kívül saját vizsgálatait is, amelyek az általánosítás kérdésére és a gépi megoldás lehetőségére vonatkoznak.

Kevert valószínűség-eloszlásfüggvényen a következőt értjük: Legyen $F^*(x, t)$ eloszlásfüggvényeknek a t paramétertől függő családja, $(-\infty < t < \infty)$, és tegyük fel, hogy $F^*(x, t)$ folytonos függvénye t -nek; legyen továbbá $p(t)$ egy valószínűség-sűrűségfüggvény. Könnyen belátható, hogy az

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) p(t) dt$$

függvény eloszlásfüggvény; ezt a függvényt a $F^*(x, t)$ eloszlásfüggvényeknek a $p(t)$ súlyfüggvénnyel képezett keverékének nevezzük. Ha $\frac{\partial F^*(x, t)}{\partial x} = f(x, t)$ létezik és folytonos x és t értelmezési tartományában, akkor a

$$\frac{dF}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) p(t) dt = f(x)$$

integrál is létezik; $f(x)$ -et, az $F(x)$ sűrűségfüggvényét, az $f^*(x, t)$ sűrűségfüggvények $p(t)$ súllyal képzett keverékének nevezzük.

Hasonlóképpen ha $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ egy tetszőleges számsorozat, az $F^*(x, t_k)$, ill. $f^*(x, t_k)$ függvényeknek p_k súlyokkal képezett keverékén az

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^*(x, t_k) p_k \text{ ill. } f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^*(x, t_k) p_k \text{ függvényt értjük,}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \right|.$$

A definíció további kiterjesztésével nem foglalkozunk.

Eloszlásfüggvények keverékével a gyakorlatban gyakran találkozunk. Például vizsgáljuk egy ország (bizonyos korú) lakossága testmagasságának, mint valószínűségi változónak eloszlásfüggvényét. Ez a vizsgált sokaságba tartozó férfiak, ill. nők testmagasság-eloszlásfüggvényeinek keveréke, a férfiak, ill. nők számával arányos súlyokkal. Vagy például meteorológiai vizsgálatokból kiderült, hogy egy adott hely napi átlagos hőmérsékletének, mint valószínűségi változónak eloszlásfüggvénye jól közelíthető normális eloszlásfüggvények keverékével [1].

Találkozunk azonban a következő problémával is, amelyet a keverés, mint valószínűségszámítási »művelet« inverzének nevezhetünk. Az

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(x, t) p(t) dt,$$

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F^*(x, t_k) p_k$$

ill.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, t) p(t) dt,$$

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^*(x, t_k) p_k$$

összefüggésekből F (ill. F_1, f, f_1), és esetleg F^* (ill. f) ismeretében meg kell határoznunk a többi függvényt, melyek a képletekben szerepelnek.

A meghatározáskor alkalmazott eljárást az *eloszlás-, ill. sűrűségfüggvények keveréke összetevőkre bontásának* nevezzük.

Ebben a dolgozatban speciális sűrűségfüggvények keverékének összetevőkre bontásával fogunk foglalkozni. A kérdés gyakorlati jelentőségére alább még kitérünk.

A szóbanforgó keverék a következő:

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k},$$

ahol

$$\sum_{k=1}^N A_k = 1, \quad A_k > 0, \quad 0 < m_1 < \dots < m_N, \quad \sigma_k > 0$$

konstansok. (V. ö. a fenti $f_1(x)$ -szel). $f(x)$ tehát normális (Gauss-féle) sűrűségfüggvények A_k súlyokkal vett keveréke. ($\sum_{k=1}^N A_k = 1$ megkötés különben lényegtelen; itt csak a valószínűségszámítási terminológia vonta maga után).

Analitikus fogalmazásban tehát *problémánk így hangzik:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}$$
 ismeretében *hogyan határozhatók meg egyértelműen az A_k , m_k , σ_k konstansok értékei?*

Ezzel a problémával többek közt a következő vizsgálatokban találkozunk:

1. Nem-folytonos spektrumok fényképezésénél diszkrét vonalak helyett a valóságban folytonosan változó, maximumokkal bíró intenzitáseloszlást kapunk. Ennek az az oka, hogy a Doppler-effektus következtében minden vonalhoz egy Gauss-függvény szerint lefutó intenzitáseloszlás tartozik és ezek szuperponálódnak [2]. Ennek folytán az eredő intenzitáseloszlást a következő függvény fejezi ki:

$$I(x) = \sum_{k=1}^N \frac{I_k}{2\sqrt{\pi\kappa T}} e^{-\frac{(x-m_k)^2}{4\kappa T}}$$

(Itt x a felvétel sávjának hossz-koordinátája, valamilyen alkalmas origótól számítva, I_k az egyes komponensek szolgáltatta összes intenzitás, m_k a spektrumvonalak elméleti helye, κ univerzális állandó, T a sugárzást kibocsátó anyag abszolút hőfoka). Minthogy a felvételtől a spektrumvonalak valóságos helyeit, az m_k -kat kell meghatároznunk, ismét problémánkkal van dolgunk. Itt minden σ_k ugyanaz; a spektroszkópiai gyakorlatban általában így van; — állócsillag-spektrum vizsgálatoktól kezdve luminiscens porok vizsgálatáig [3].

2. Oldatokban tartalmazott különböző molekulásúlyú fehérjék ultracentrifugálás vagy elektroforézis útján történő szétválasztásakor a komponens fehérjék koncentrációja Gauss-függvény szerint oszlik el bizonyos maximum körül, amelynek helye a kérdéses ion mozgékonyaságától függ. Minthogy pl. optikai (Tiselius-féle készülék) vagy kromatográfiai úton az egyes koncentrációeloszlások keveredésének eredőjét rögzíthetjük csak, ebből a felvételtől még meg kell határoznunk a komponens Gauss-függvények maximumhelyét és egyéb adatait [4]. Ennek kapcsán láthatjuk problémánk megoldásának fontosságát, ha arra gondolunk, hogy az emberi vér fehérjefrakcióinak vizsgálatát diagnosztikai célból gyakran kell elvégezni [5].

Problémánk alkalmazási területeinek ismertetése után most rátérünk a megoldás különböző módjaira.

1. §.

A kérdést néhány, speciális esetekkel foglalkozó cikk [6] után először G. Doetsch tárgyalta összefoglalóan és gyakorlatilag is kielégítően [7]. (A komponensekre bontást ő nevezte el a Fourier-analízis mintájára »Gauss-analízis«-nek). Eredményeit sikerrel alkalmazták a spektroszkópiában [8].

Más területen azonban nem használták fel (bizonyára félve a matematikai nehézségektől), úgyhogy legtöbbször csak a következő, elég pontatlan grafikus eljárással találkozunk [9]:

Tekintsük a komponensekre bontandó függvényt. Ennek görbéje általában néhány Gauss-görbe szuperpozíciója. Feltehető, hogy a görbe jobb, ill. bal szélén az utolsó, ill. első Gauss-görbe dominál, minthogy a szomszédosak legtöbbször olyan távol vannak, hogy az előbbieket alig befolyásolják. Előre elkészített, különböző szórású és magasságú Gauss-görbe sablonokat illesztve a görbe bal, ill. jobb széléhez, találunk egy olyat, amely a legjobban egybeesik a görbeszélekkel. Ennek az adatai megadják az első, ill. utolsó komponens adatait. Az odaillesztett sablont teljes egészében is berajzoljuk az analizálandó görbébe és grafikusan levonjuk. Ily módon két komponenszt leválasztottunk. A maradék-görbén ismét alkalmazzuk az eljárást, mindaddig, míg egyetlen komponens sem marad. (Újabbban a sablonokat rávetítik a görbére, ez lényegesen megkönnyíti a munkát.)

Ez a módszer sok pontatlansággal jár és sokszor nem dönthető el, megkaptuk-e az összes komponenseket? (Ennek illusztrálására később még visszatérünk.)

Mindezekkel szemben *Doetsch* két pontos módszert is adott. Az egyikben grafikusan sorban kiszámítja az analizálandó függvény momentumait. Ezek A_k , m_k és σ_k polinomjai, tehát elegendő számú momentum ismeretében kellő számú egyenletet kapunk az ismeretlenek meghatározására. Az egyenletek azonban magasabb fokúak és így kezelésük nagyon nehéz.

Doetsch másik módszere lett a kiindulópontja a későbbi idevágó vizsgálatoknak. Ezt a módszert a »szóráscsökkentés módszerének« nevezhetjük, mert alapgondolata a következő:

Legyen az analizálandó függvény

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}$$

Tegyük fel, hogy ennek az ismeretében elő tudjuk állítani az

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}$$

függvényt. (λ valós paraméter; λ kisebb a legkisebb szórásnál.) Ez olyan Gauss-függvények szuperpozíciója, amelyek maximumhelye ugyanaz, mint $f(x)$ komponenseinek, csak a szórásnégyzetek csökkentek ugyanazzal a λ^2 értékkel. $f^*(x)$ komponensei tehát keskenyebbek és magasabbak, mint $f(x)$ -éi, következésképp a szuperpozíció után is kevésbé keverednek össze, mint $f(x)$ -ben. Legjobban az a komponens válik ki, amelyiknek a legkisebb a szórása, vagyis ahol $\sigma_k^2 - \lambda^2$ a legkisebb. Minthogy ez erősen kiemelkedik a görbéből, mint külön Gauss-görbe kezelhető, amelynek adatai grafikusan megállapíthatók. (Legbiztosabban a maximum helye határozható meg, s épp ez kell a legtöbbször. A többi adat meghatározásához legjobb a teljes Gauss-görbét extrapolálni és a maximumhely magasságából, valamint a görbe alatti

területből a Gauss-függvény ismert tulajdonságai alapján az A_k és σ_k értékeket kiszámítani.) Általában egyszerre több komponens is különválnak, ha nem így volna, az egyetlen különvált komponens grafikusán levonva, a maradékon újból elvégezzük az eljárást. Minél jobban megközelíti λ^2 a legkisebb σ_k^2 -et, annál jobban különválnak a megfelelő komponens. Így tehát λ^2 kellő választásával az egyes komponenseket egyre pontosabban kiemelhetjük, ill. leválaszthatjuk. Az eljárás nem tételezi fel a komponensek számának ismeretét, csak azt, hogy az m_k számok különbözők. Ha azonban ez teljesül, az eljárás egyértelmű is, minthogy az elkeskenyedett és túszerűen kiemelkedő maximumokat az m_k -knál kapjuk meg. Egyenlő szórás esetén egyszerre keskenyednek el a komponensek és így egyszerre válnak szét.

A főfeladat tehát az $f(x)$ -ből $f^*(x)$ -be vivő transzformáció megkeresése. Erre több módszert dolgoztak ki.

2. §.

G. Doetsch eredetileg csak egyenlő szórások esetével foglalkozott [10]. Az alapgondolat azonban különböző szórásoknál is alkalmazható.

Képezzük az

$$f(x) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}$$

Fourier-transzformáltját, $\varphi(t)$ -t. Ismeretes, hogy [11]

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{im_k t - \frac{\sigma_k^2}{2} t^2}.$$

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \lambda^2)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \lambda^2}}$$

Fourier-transzformáltja $\varphi^*(t)$ pedig :

$$\varphi^*(t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot e^{im_k t - \frac{(\sigma_k^2 - \lambda^2)}{2} t^2} = e^{\frac{\lambda^2}{2} t^2} \cdot \varphi(t)$$

Az unicitási tétel értelmében tehát

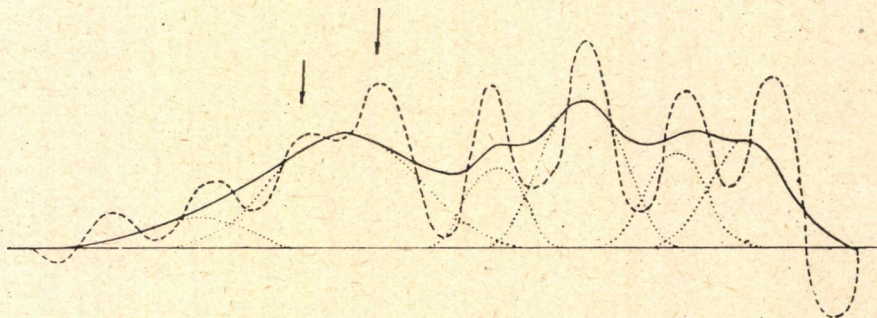
$$f^*(x) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ e^{\frac{\lambda^2}{2} t^2} \cdot \varphi(t) \right\},$$

ahol \mathfrak{F}^{-1} az inverz Fourier-transzformációt jelenti. (A mellékfeltételek teljesülése könnyen ellenőrizhető.)

Ennek alapján tehát $f^*(x)$ $f(x)$ -ből a következőképpen kapható meg :

Képezzük $f(x)$ Fourier-transzformáltját, megszorozzuk $\frac{\lambda^2}{e^2} t^2$ -tel (ahol λ^2 kisebb a legkisebb σ_k^2 -nél) és az így kapott függvényt visszatranszformáljuk. Ha λ^2 -re támpontunk nincs, különböző értékekkel próbálkozunk. Ha a legkisebb σ_k -t túlléptük, az integrálok divergensnek és az eljárás értelmét veszti.

Az eljárás gyakorlatban persze nem végezhető el pontosan, már csak a végtelen határu integrálások miatt sem. Közelfekvő gondolat azonban a Fourier-integrálok helyett Fourier-sorokkal próbálkozni. Elég nagy periódust választva, az $f(x)$, ill. $f^*(x)$ Fourier-együtthatóit kifejező integrálok a Gauss-függvény rohamos csökkenése folytán tetszőleges keveset térnek el a Fourier-transzformált értékétől, és így a transzformáltak közti összefüggés közelítőleg az együtthatók közt is felírható. Így közelítőleg megkaphatók $f^*(x)$ Fourier-együtthatói, $f^*(x)$ -et pedig ezen együtthatókkal elvégzett Fourier-szintézis adja meg.



1. ábra

Ezt a módszert *Doetsch* is alkalmazta egyenlő szórások esetén [12]. Intézetünkben emberi vér fehérjefrakcióinak elektroforetikus vizsgálatakor nyert görbét dolgoztunk fel hasonló módon (1. ábra). A vastag vonal az eredeti görbe, a szaggatottat bizonyos λ^2 paraméterértéknél kaptuk. Az első 18 Fourier-együtthatóval dolgoztunk. Jól látható a komponensek szétválása. Pontozott vonallal a fentebb említett grafikus eljárás eredményét tüntettük fel. Látható, hogy a grafikus módszer két különböző komponenst egyetlennek állapított meg (nyilak). A negatív értékek a Fourier-analízisből adódnak ; ha 18 együtthatónál többet vettünk volna, az ilyen kis ingadozások kevésbé mutatkoznának.

Ez a közelítő módszer tág teret nyújt matematikai gépek alkalmazására. A Fourier-analizátorok és szintetizátorok irodalma igen nagy. Modern elektronikus készülékekkel az eljárást gyorsan végre lehetne hajtani. Mi Mader—Ott-analizátorral dolgoztunk, a szintézist egyenlő távolságban felvett pontokban numerikusan végeztük el. A feldolgozás számológép nélkül cca 6 órát vett igénybe ; számológéppel fele idő is elég.

Érdekes, hogy a kezdeti nekilendülés után ezt az eljárást többet nem alkalmazták. Valószínűleg a nem matematikus kutatók idegenkedtek tőle.

Csak éppen megemlítjük, hogy szerzőnek sikerült az alapötletet más (pl. Cauchy-féle) sűrűségfüggvények keverékének felbontására is alkalmazni.

3. §.

Egy másik eljárást, amely azonban csak egyenlő σ szórások esetén alkalmazható, *H. Freudenthal* ismertetett az 1953. évi varsói matematikai kongresszuson [13]. Az eljárás kiindulópontja *Doetsch* korábbi dolgozatában [14] is szerepel: az

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t}} \quad (t > 0)$$

függvény kielégíti a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

hővezetési differenciálegyenletet. $t = \sigma^2$ -nél ismerjük ennek az egyenletnek a megoldását: ez ugyanis éppen az adott függvény. Ennek alapján határozzuk meg a megoldást valamilyen $t = \sigma^2 - k \cdot \Delta t > 0$ értékre ($\Delta t > 0$ tetszőleges kis szám, $k = 1, 2, \dots$). Ebben a megoldásban a komponensek arányosan csökkentett szórással jelentkeznek, vagyis különválva láthatók.

A *Freudenthal* által ismertetett módszer abban áll, hogy a hővezetés differenciálegyenletét differenciaegyenletként írjuk fel az (x, t) síkon felvett Δx , ill. Δt ponttávolságú hálón. A háló (x_i, t) pontjaihoz ($i = 1, 2, \dots$) a kiinduló függvény értékei tartoznak az x_i pontokban. E pontokra a differenciaegyenlet

$$\frac{f(x_i, t) - f(x_i, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{f(x_i + \Delta x, t) + f(x_i - \Delta x, t) - 2f(x_i, t)}{2 (\Delta x)^2}$$

Itt $f(x_i + \Delta x, t)$, $f(x_i - \Delta x, t)$, $f(x_i, t)$, Δt , Δx ismert, így ezekből $f(x_i, t - \Delta t)$ meghatározható. Pontról pontra haladva sorban meghatározhatjuk az $f(x_i, t - \Delta t)$ értékeket, vagyis végül megkapjuk a $t = \sigma^2 - \Delta t$ -hez tartozó megoldást bizonyos hibával, amely a háló sűrítésével csökken. Az eljárást megismételve megkapjuk a megoldást $t = \sigma^2 - 2 \cdot \Delta t$ -nél, é. i. t., $\sigma^2 - k \cdot \Delta t$ -ig.

Az eljárás minden gépi segédeszköz nélkül is elvégezhető, mert csak a négy alapművelet szerepel. Hátránya, hogy csak egyenlő szórásoknál alkalmazható.

4. §.

Az $f^*(x)$ transzformált függvény más módon is előállítható explicite. Állítsuk elő a keresett

$$f^*(x) = f^*(x, \mu) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \frac{e^{-\frac{(x-m_k)^2}{2(\sigma_k^2 - \mu)}}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_k^2 - \mu}} \quad (\mu = \lambda^2)$$

függvényt μ hatványsoraként. Minthogy $f^*(x, \mu)$ kielégíti a

$$\frac{\partial f^*}{\partial \mu} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial x^2}$$

hővezetési differenciálegyenletet, $\frac{\partial^n f^*}{\partial \mu^n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\partial^{2n} f^*}{\partial x^{2n}}$,

$$\left[\frac{\partial^n f^*}{\partial \mu^n} \right]_{\mu=0} = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\partial^{2n} f^*}{\partial x^{2n}} \right]_{\mu=0} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}},$$

ahol $f(x) = f^*(x, 0)$ a kiindulási függvény és így $f^*(x, \mu)$ Taylor-sora

$$f^*(x, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^{\nu} f^*}{\partial \mu^{\nu}} \right]_{\mu=0} \cdot \frac{\mu^{\nu}}{\nu!}$$

felírható $f(x)$ x szerinti deriváltjaival:

$$f^*(x, \mu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \mu^{\nu}}{2^{\nu} \cdot \nu!} \frac{\partial^{2\nu} f}{\partial x^{2\nu}}$$

A deriváltak ismeretében tehát $f^*(x, \mu)$ közelítőleg meghatározható. A fő nehézség az, hogy $f(x)$ deriváltjait görbéjéből kell meghatározni; ez a véges differenciák segítségével történhetik. A kérdésre még visszatérünk; előbb azonban rámutatunk egy másik lehetőségre.

Ismeretes, hogy egy $\psi(x)$ függvény sorbafejthető Hermite-függvények szerint [15]:

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{\nu!} \cdot \varphi^{(\nu)}(x)$$

$$\text{ahol } \varphi^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu} \cdot H_{\nu}(x) \cdot \varphi(x), \quad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$H_{\nu}(x)$ pedig a $\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (-1)^{\nu} H_{\nu}(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ -vel definiált Hermite-polinom.

$$\text{Ekkor } c_{\nu} = (-1)^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\nu}(x) \psi(x) dx.$$

Legyenek tehát a fenti $f^*(x, \mu) = f^*(x, \lambda^2)$ és $f(x)$ Hermite-sorfejtései:

$$f^*(x, \lambda^2) = f^*(x) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{c_{\varrho}^*}{\varrho!} \varphi^{(\varrho)}(x)$$

és

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{h!} \varphi^{(h)}(x);$$

(bebizonyítható, hogy $\sigma_k^2 < 1$ -nél — s ez alkalmas léptékkal mindig elérhető — ezek konvergensek). Mindezeket beírva $f^*(x)$ fenti Taylor-sorába (ennek jogosultsága bebizonyítható):

$$f^*(x) = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{c_{\varrho}^*}{\varrho!} \varphi^{(\varrho)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{h!} \varphi^{(h+2\nu)}(x)$$

Koefficiens-összehasonlítással kapjuk:

$$c_{\varrho}^* = \sum_{n=0}^{\left[\frac{\varrho}{2}\right]} \frac{c_{\varrho-2n} \cdot \varrho! (-1)^n \lambda^{2n}}{(\varrho-2n)! n! 2^n}$$

azaz $f(x)$ Hermite-sorának együtthatóiból $f^*(x)$ Hermite-együtthatói egyszerűen meghatározhatók.

Ezzel a módszerrel $f^*(x)$ tehát úgy nyerhető, hogy $f(x)$ -et Hermite-sorba fejtjük, azután együtthatóival az előbbi képlet szerint képezzük $f^*(x)$ Hermite-együtthatóit, végül az ezekkel szorzott Hermite-függvényeket összegezzük (»Hermite-szintézis«). Az egyes eljárásokban szereplő függvények összegezésének elvégzésére szerző matematikai gépet is tervezett; ennek leírása Kiadványunk más helyén található. Magától értetődően a sorfejtések és összegeзések mindig csak bizonyos tagszámig haladnak; a hiba esetenként megbecsülhető.

5. §.

Befejezésül foglalkozzunk azzal, hogyan használhatjuk fel a gyakorlatban $f^*(x, \lambda^2)$ -nek a 4. §-ban közölt

$$f^*(x, \lambda^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \lambda^{2\nu}}{2^{\nu} \cdot \nu!} \frac{\partial^{2\nu} f}{\partial x^{2\nu}}$$

előállítását.

A differenciászámítás módszereit fogjuk igénybe venni. Legyen a az $f(x)$ értelmezési tartományának egy pontja és $h > 0$ adott szám. Ismeretes hogy az $f(a)$, $f(a \pm h)$, $f(a \pm 2h)$, ... függvényértékek ismeretében $f(x)$ a helyen vett deriváltjai közelítőleg kifejezhetők a függvény a helyre vonatkozó magasabb differenciáival.

Állapodjunk meg abban, hogy $\nu = 3$ -nál megállunk $f^*(x, \lambda^2)$ sorfejtésében. Ekkor $f(x)$ deriváltjait az a helyen a következő képletek adják meg [16]:

$$f''(a) = \frac{2\sigma_3 - 27\sigma_2 + 270\sigma_1 - 490f_0}{180h^2} + \frac{47}{8480} h^6 \varepsilon M_8$$

$$f^{(4)}(a) = \frac{-\sigma_3 + 12\sigma_2 - 39\sigma_1 + 56f_0}{6h^4} + \frac{403}{5040} h^4 \varepsilon M_8$$

$$f^{(6)}(a) = \frac{\sigma_3 - 6\sigma_2 + 15\sigma_1 - 20f_0}{h^6} + \frac{169}{420} h^2 \varepsilon M_8$$

ahol

$$f_0 = f(a), \quad \sigma_\nu = f(a + \nu h) + f(a - \nu h), \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

$$|\varepsilon| \leq 1, \quad M_8 = \max_{a-3h \leq x \leq a+3h} |f^{(8)}(x)|.$$

(Hasonló kifejezések találhatók a magasabb deriváltakra is, csak ott magasabb differenciák szerepelnek.)

Adott esetben legegyszerűbben úgy járhatunk el, hogy alkalmasan választott h értékkel a feldolgozandó görbe adataiból megállapítjuk az $f(\pm k \cdot h)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) értékeket, majd a fenti képletek segítségével közelítőleg kiszámítjuk a deriváltak értékeit a $0, \pm h, \pm 2h, \dots$ pontokban. Előre megválasztott λ^2 érték mellett sorfejtésünk alapján ekkor már megadhatjuk $f^*(x, \lambda^2)$ közelítő értékeit a $0, \pm h, \pm 2h, \dots$ pontokban és megrajzolhatjuk a további analízis alapjául szolgáló függvénygörbét.

Foglalkozunk még az eljárás hibájával az a helyen. Ez két forrásból ered: Egyrészt a Taylor-sor $\nu > 3$ indexű tagjainak elhanyagolásából, másrészt a differenciálhányadosok közelítő megállapításából. Jelöljük a két hibafajtát δ_1 , ill. δ_2 -vel.

Fenti képleteink alapján

$$|\delta_2| \leq \left(\frac{47}{8480} h^6 \frac{\lambda^2}{2} + \frac{403}{5040} h^4 \frac{\lambda^4}{8} + \frac{169}{420} h^2 \frac{\lambda^6}{48} \right) \varepsilon M_8.$$

M_8 -ban $f^{(8)}(x)$ maximuma szerepel bizonyos intervallumban. Ennek becs-

lése $f(x)$ alakja folytán lényegében véve egy $\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}}}{\sqrt{2\pi\tau}}$ ($\tau > 0$, konstans)

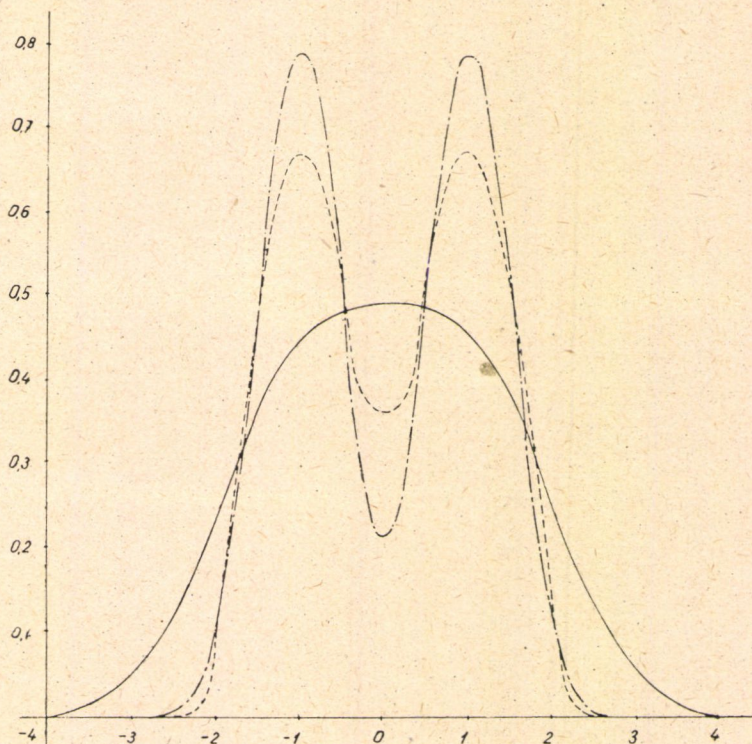
típusú függvény deriváltjainak, vagyis Hermite-függvényeknek a becslésére vezet. Ismeretes, hogy [17]:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (e^{-x^2}) = \\ = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[(-1)^n 2^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cos \sqrt{4n+1} x + \frac{2^n \sqrt{(2n)!} \sqrt{\pi}}{\sqrt{5} \sqrt{4n+1}} |x|^5 \Theta_n(x) \right] \\ |\Theta_n(x)| < 1. \end{aligned}$$

Ennek alapján a jobboldal mindenik tagját maximumával becslve könnyen kimutatható, hogy

$$\left| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}}}{\sqrt{2\pi} \tau} \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau^{2n+1}} \left[\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} + \frac{0,56 \sqrt{(2n)!}}{\sqrt{4n+1}} \right]$$

Ennek segítségével adható meg végül becslés δ_2 -re. δ_1 becslésére szintén felhasználhatjuk, minthogy δ_1 a Taylor-sor maradéktagja, amelyben ugyancsak Hermite-függvények szerepelnek különböző szórásokkal.



2. ábra

Mindezeket itt nem részletezhetjük, csak megjegyezzük, hogy Taylor-sorunk maradéktagja úgy tart zérushoz, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Az itt alkalmazott (elég durva) becslésekkel a hiba (főleg δ_1) elég lassan csökken. A becslést érthetően megnehezíti az, hogy $f(x)$ komponenseinek paramétereit tág határok közt állapíthatjuk csak meg (v. ö. a grafikus eljárásnál mondottakkal).

Illusztrálásul bemutatjuk az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \right)$$

függvény analízisét $\lambda^2 = \frac{3}{4}$ -del, a sorfejtést a 4. tagnál hagyva abba (2. ábra). A vastag vonal mutatja $f(x)$ -et, amelynek egyetlen maximuma van, A szagatott vonal $f^*(x, \lambda^2)$ a mondott közelítésben. Összehasonlításként pontvonallal berajzoltuk a pontos eredményt;

$$f^*(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (e^{-2(x-1)^2} + e^{-2(x+1)^2})$$

görbáját.

Amint látjuk, nagyobb eltérés csak az extremumok környékén van. Ez a hiba képletéből várható is. A hiba jóval kisebb, mint a becslésekből számított. A maximumok helyét (ami általában a legfontosabb) már ez a közelítés is jól megadja.

Ha nagyobb pontosság nem szükséges, ez az eljárás kényelmes, mint-hogy elvégzése semmi segédeszközt nem igényel.

IRODALOM

- [1] *Rényi Alfréd*: Újabb eredmények a valószínűségszámítás terén. MTA. Mat. Fiz. Oszt. Közl. II. 1. Budapest, 1952. 125—139. o. (főleg a 132. o.-tól.)
- [2] *G. Doetsch*: Die Elimination des Dopplereffekts bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten. Zs. Phys. 49 (1928). 705—730. o.
- [3] L. pl. *B. Sticker*: Über die Farbenhäufigkeitsfunktion in Sternhaufen. Zs. Astrophys. 1 (1930). 174—191. o.; *A. Kiss—C. Sándorfy*: Sur les méthodes d'analyse des courbes d'adsorption. Acta chem. et phys. Szeged. Tom. II. Fasc. 3 (1948). 71—76. o.; *Szigeti György*: Lumineszkáló anyagok. Elektrotechnika 1947. 4—5. sz.
- [4] L. pl. *The Svedberg—K. O. Pedersen*: Die Ultrazentrifuge. Dresden u. Leipzig. 1940. 265. o.;
- E. Wiedemann*: Über die Auswertung von Elektrophorese-Diagrammen nach L. G. Longworth und Philpot—Svensson. Helv. Chim. Acta. XXX. Pars. I. Fasc. I—V. (1947). 892—900. o.
- [5] L. pl. *F. Wuhrmann—Ch. Wunderly*: Die Bluteiweisskörper des Menschen. Basel. 1947. 106. o.
- [6] L. pl. *N. Sen*: Über den Einfluss des Dopplereffekts auf spektroskopische Feinstrukturen und seine Elimination. Phys. Zs. 23 (1922). 397. o.; *K. Pearson*: Contributions to the mathematical theory of evolution. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A), 185 (1894). 71—110. o.
- [7] *G. Doetsch*: Zerlegung einer Funktion in Gauss'sche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes. Math. Zs. 41 (1936). 283—318. o.; továbbá a (2) alatt idézett mű.
- [8] L. pl. a [3] alatt idézett csillagászati cikket és a [2] alatti cikk példáit.
- [9] L. pl. *A. Wallner—R. Ulke*: Auswertung von Diagrammen aus Elektrophoreseversuchen. Hoppe—Seyler's Zs. Phys. Chem. Bd. 290. Heft 3—6. 81—91. o.; *H. Labhart*: Ein Auswertegerät für Elektrophoresediagramme. Experientia. 36 (1947). 3. és *A. Kiss—C. Sándorfy*, valamint *Szigeti György* [3] alatt idézett dolgozatait.
- [10] *L. G. Doetsch* idézett dolgozatait.
- [11] L. pl. *B. V. Gnyegyenko—A. N. Kolmogorov*: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Budapest, 1951. 52. o.
- [12] L. a (2) alatt idézett művét.
- [13] *Rényi A.* közlése.
- [14] L. a [2] alatt idézett dolgozatot.
- [15] L. pl. a [11] alatt idézett monográfiát. 198. o.
- [16] *L. L. V. Kantorovics—V. I. Kriülov*: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Budapest, 1953. 189—199. o.
- [17] *L. B. И. Смирнов*: Курс высшей математики. Москва, 1949, Том. III. Часть 2. 587. o.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

П. Меддешин

Резюме

Автор занимается следующей проблемой: если плотность вероятностей, заданную эмпирически, можно рассматривать как смесь с постоянными весами нормальных функций плотности разных параметров, как определить компоненты? — Практическая важность проблемы иллюстрируется спектроскопическими и биологическими примерами, потом автор занимается графическими и аналитическими методами решения, следуя Г. Деч. Г. Деч получает решение с помощью преобразования Фурье. Автор-следуя идее А. Реньи-представляет решение в форме функционального ряда, построенного с помощью производных высших порядков смеси.

Автор иллюстрирует исследования двумя примерами. Дальше он описывает свое исследование о возможности обобщения и механического решения.

DÉTERMINATION DES COMPONENTS D'UN MÉLANGE DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

P. MEDGYESSY

Résumé

L'auteur traite du problème suivant :

Si, dans le calcul des probabilités, une fonction de fréquence (donnée de façon empirique) peut être comprise comme un mélange des fonctions normales de fréquence de paramètres différentes, pris avec des poids constants, comment peut-on déterminer les composants? — L'auteur expose l'importance du problème par des exemples spectroscopiques et biologiques, ensuite il traite des méthodes graphiques et analytiques de la solution, en se joignant aux recherches de G. Doetsch. Pour G. Doetsch la solution est donnée avec l'aide de la transformée de Fourier du mélange, tandis que l'auteur — suivant une idée de A. Rényi — l'obtient par une série des fonctions formée des dérivées du mélange. — La discussion est illustrée de deux exemples. L'auteur mentionne aussi quelques-unes de ses recherches se rapportant à la généralisation et à la solution par appareil.

ÚJ KÉSZÜLÉK FOURIER-SZINTÉZIS ÉS ANALÍZIS, VALAMINT HASONLÓ SORFEJTÉSI FELADATOK ELVÉGZÉSÉRE

MEDGYESSY PÁL

Összefoglalás

Alkalmazott matematikai vizsgálatoknál sokszor van szükség empirikus függvényeknek valamilyen ortogonális függvényrendszer szerint történő kifejtésére, valamint adott együtthatók mellett az ortogonális függvényrendszer szeleteinek grafikus előállítására. Példa erre a Fourier-analízis és szintézis. A feladat lényegében két függvény szorzata integráljának előállítása, illetve egyes függvények grafikus összeadása. Az ismertetett készülék egyszerismindenkorra elkészített sablonok segítségével felrajzolja az említett függvény-szorzatokat, illetve bizonyos konstansokkal szorozza és grafikusan összeadja a sablonokon lévő függvényeket. Mechanikus, az eddigiektől eltérően egyetlen kezelőt igényel, a sablonokat nem veszi mechanikusan igénybe és megfelelő sablonokkal bármilyen ortogonális függvényeknél felhasználható, nem csak harmonikusoknál. Felhasználható függvénygörbék grafikus összeadására, szorzására és bizonyos transzformálására is.

Alkalmazott matematikai vizsgálatoknál sokszor van szükségünk empirikus függvények ortogonális függvényrendszer szerint történő kifejtésére. A kifejtés ellenőrzésére — és más célokra is — szükséges továbbá adott együtthatójú ortogonális függvényrendszer szeleteinek előállítása.

Mindkét eljárás gyors elvégzésére matematikai gépek készültek. A sorfejtés szorzat-integrálok kiszámítását kívánja, a sorszeletek előállítása pedig ortogonális rendszer függvényeinek grafikus összeadását.

A szorzat-integrálok kiszámítására számos gépet szerkesztettek [1]. Legismertebbek az ú. n. Stieltjes-planiméterek [2]. A gépek mechanikusak vagy elektronikusak. Utóbbiak [3] nagy hátránya, hogy pontatlanabbak a mechanikusoknál. A mechanikusok pedig — még a legmodernebbek is [4] — vagy két kezelőt, vagy alkatrészek mechanikus mozgatására alkalmas szilárd sablonokat kívánnak. Mindez számos nehézséget von maga után.

Az összegezés elvégző gépek úgyszólván kizárólag a Fourier-szintézis céljaira készülnek. Hatalmas irodalmuk van [5]. Más függvénytípusok összegezésére azonban kidolgozott készülékek nincsenek.

Egy problémával kapcsolatban [6] felmerült annak szükségessége, hogy empirikus függvényeket Fourier-, ill. Hermite-sorba fejtsünk, majd a sorfejtés együtthatóit bizonyos konstansokkal szorozva, az így nyert új mennyiségekkel, mint együtthatókkal Fourier-, ill. »Hermite-szintézist« végezzünk, vagyis

$$F(x) = \sum_{k=1}^N A_k \cdot \Phi_k(x)$$

típusú függvényeket állítsunk elő, ahol $\Phi_k(x)$ a k indexű harmonikus, ill. Hermite-függvény.

Az eljárás gyors elvégzésére gondoltuk ki az alább ismertetendő gépet, amely egyszersmindenkorra elkészített sablonok segítségével egyrészt előállítja a sorfejtésnél fellépő függvényszorzatokat, ill. azok integrálját, másrészt a sablonokon szereplő függvényeket bizonyos konstansokkal (az »amplitudókkal«) szorozva, lépésről lépésre összegezi őket. Működése mechanikus, egyetlen kezelőt igényel és a sablonok mechanikailag nincsenek igénybevéve. A legkényelmesebb megoldást közöljük; a kényelem rovására bizonyos egyszerűsítések bevezethetők.

Ábránk külön mutatja a készülék asztalkáit (I) és az összeadó (II), ill. szorozóberendezést (III). Technikai részletezésre nem törekedhettünk; sokféle kivitel lehetséges.

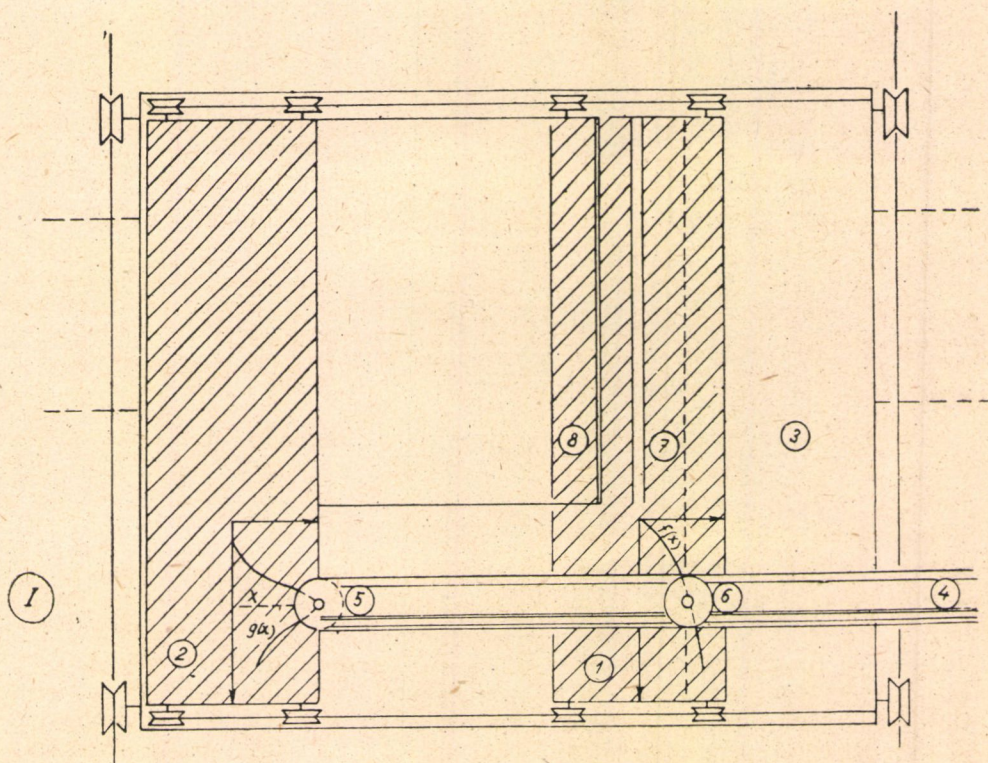
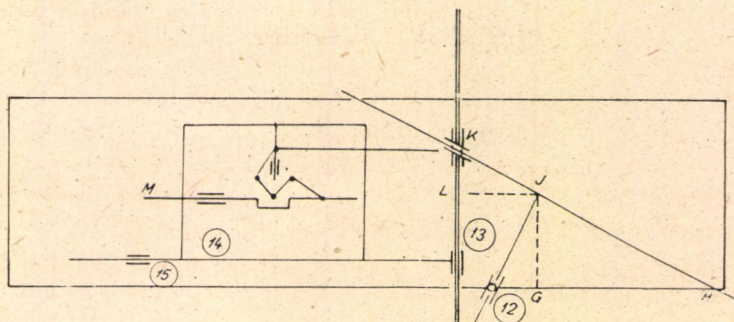
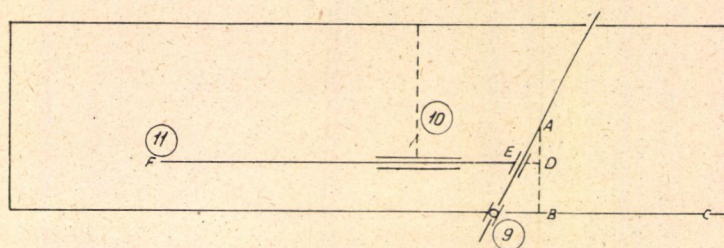
A sorfejtés alapjául szolgáló függvényeket különböző indexekre egyszersmindenkorra egyforma léptékben megrajzoljuk. Ezek a »sablonok«. A sablon az (1) asztalkára kerül, koordinátatengelyei megadott egyenesekbe esnek. Az a függvény, amelyet a sablon-függvénnyel szorzunk, vagy amelyet hozzáadunk ahhoz — a sablon léptékében felrajzolva a (2) asztalka megadott helyére kerül. (1) és (2) a (3) asztalkán jobbra-balra mozgatható, (3) pedig fel-le. Ily módon mindkét görbe tetszőleges irányban elgurítható a (4) binokuláris lupe objektívjei, (5) és (6) alatt. A lupe okulárjában egyesítve látható mindaz, ami (5), ill. (6) alatt fekszik. (1) és (2)-t egy-egy kezünkkel (ill. alkalmas készülékkel) megfelelően mozgatva elérhető, hogy (6) fonálkeresztjének közepét a (2) görbéjének egy pontja felett látjuk és ugyanitt látjuk az (1) sablon-görbéjének egy pontját. Az elrendezésből kifolyólag mindkét görbe ugyanazon abszcisszájú pontját hoztuk ily módon a fonálkereszt alá.

A gép működése közben (1) és (2) megfelelő vezetésével el kell érünk azt, hogy mindkét görbén (vagyis a két görbe metszéspontján) állandóan rajta lássuk a fonálkeresztet. Ekkor (2) az (5) középpontjához viszonyítva $g(x)$ -szel mozdult el balra, (1) pedig $f(x)$ -szel, hogyha (3)-at x -szel toltuk el felfelé.

Ezeket az elmozdulásokat visszük át a (II) összeadó, ill. a (III) szorozóberendezésre. Ezek az (I) szaggatott vonallal jelzett része fölött foglalnak helyet.

Nézzük először az összeadást.

A (7) vajatba kapaszkodik (1) mozgása közben a (9) gomb. Ez a gomb a BC egyenesben mozog és eközben elforgatja az A -n átmenő AE rudat. A a (6) fonálkeresztjén átmenő egyenesen, mint alapírányon fekszik. $AB = k$ a készülék állandója, (9) elmozdulása absz. értékben nyilván $f(x)$. Az A -n átmenő rúd elmozgatható hüvely van, amely E csukló segítségével a (10) vezetéken jobbra-balra mozgatható rúdhoz kapcsolódik. (10)-et rögzíthetően fel-le mozgathatjuk. (11)-ben írón van, amely a (2) felső részén rögzített papírhoz nyomódik.



1. ábra

EF meghosszabbítása AB -t D -ben metszi. Ha (9) $f(x)$ -szel mozdult el balra, E elmozdulása a (6)-ban elképzelt és az (1)-en levővel azonos irányítású koordináta-rendszerben

$$ED = -\frac{AD}{k} \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x),$$

ahol $\alpha < 0$, ha AD A -tól lefelé mutat és $\alpha > 0$, ha ellenkező irányban. Az A -n átmenő rúd lehet olyan hosszú is, hogy $|AD| > AB$; ekkor $\alpha > 1$ lesz. (1) görbéjének beállításakor tehát (11) $\alpha \cdot f(x)$ -szel mozdul el az addig nyugvó (2) felett. Ha most (2)-t $g(x)$ -szel elmozdítjuk, (11) (2)-höz viszonyítva $g(x) + \alpha \cdot f(x)$ -szel mozdul el. Ha tehát a két görbét a leírt módon végigvezetjük a fonálkereszt alatt, (2) felső részére a (11) $f(x)$ és $g(x)$ -szel egyező léptékben, egyező irányítású koordináta-rendszerben felrajzolja $g(x) + \alpha \cdot f(x)$ -et.

AD -t úgy állítjuk be [az FE -t (10)-zel fel-le mozgatva], hogy $\frac{AD}{k}$ az előírt érték legyen (szükség esetén arányosan csökkentjük a méreteket). Lényegtelen, hogy közben (11) is fel-le vándorol, mert ez csak azt jelenti, hogy (2)-n különböző α -knál másutt lesz az összeg-görbe origója; ez közömbös.

Azonnal látható, hogy a készülék egyirányú affin transzformációt végez el. Így pl. (1)-en körvonalat helyezve el, (2)-t pedig rögzítve (12) ellipszist rajzol; paraméterei könnyen megadhatók.

Az említett $F(x)$ összeget így állítjuk elő lépésről lépésre:

Beállítjuk az A_1 együtthatónak megfelelő AD -t, (1)-re $\Phi_1(x)$ -et helyezzük, (2)-t rögzítjük. Ekkor (11) $A_1 \cdot \Phi_1(x)$ -et rajzolja fel. Most ezt a görbét helyezzük (2)-re, (1)-re pedig $\Phi_2(x)$ -et, míg AD -t A_2 -nek megfelelően állítjuk be. Mindkét asztalkát végigvezetve, (11) $A_1 \cdot \Phi_1(x) + A_2 \cdot \Phi_2(x)$ -et rajzolja fel. Az eljárást folytatjuk, míg $\Phi_N(x)$ -ig el nem jutottunk.

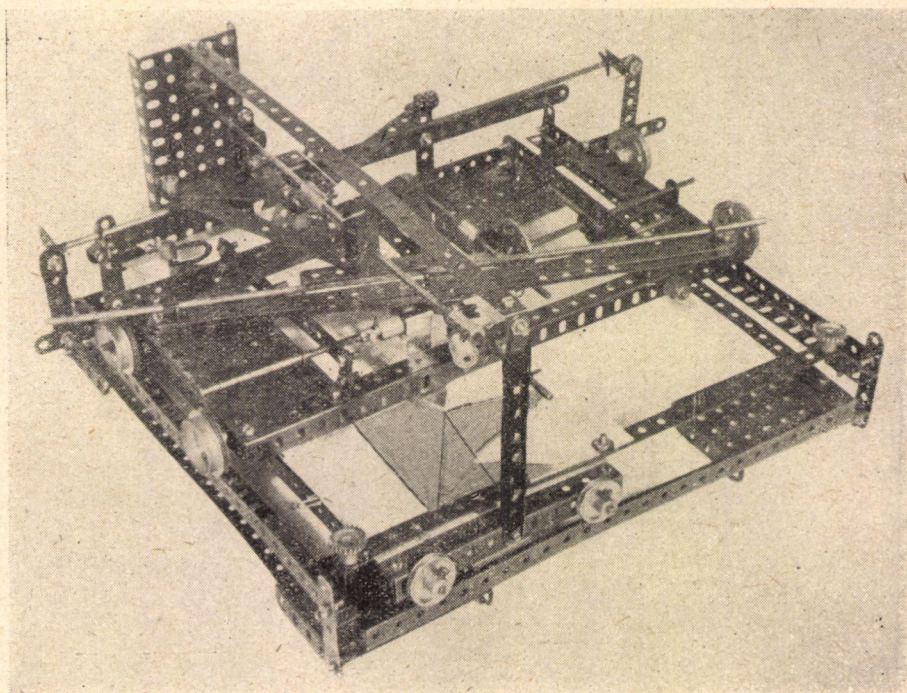
Két függvény szorzatát így képezi a készülék:

A szaggatott vonalakkal határolt rész fölé most a (III) berendezés kerül. I -ben két, egymásra merőleges rúd forog. Az egyik a (12) hüvelyt hordja. Ennek a gombja a (7) vájatban marad, míg (1) mozog és minthogy (12) a GH egyenesben mozoghat csak, (12) elmozdulása $f(x)$ -szel egyenlő abszolút értékben; $\overline{IG} = k_1$ műszerállandó. Az I -n áthaladó másik rúdon mozog a K -nál lévő kettős hüvely. Ezen halad át a (8), ill. (13) rúd, amely (2)-höz van szilárdan kapcsolva. A méretek megfelelő választásával elérhető, hogy amikor (5) alatt az abszcisszatengely van, (13) épp I -n megy át. Ha most (2)-t $g(x)$ -szel balra toljuk, (13) is $g(x)$ -szel mozdul el: $\overline{LI} = g(x)$. Ha tehát (1) és így (12) $f(x)$ -szel mozdult el, ugyanakkor pedig (2) és (13) $g(x)$ -szel, LK értéke $f(x) \cdot g(x)$ lesz. Minthogy ez az elmozdulás az abszcisszatengelyekkel párhuzamos, még át kell alakítani erre merőleges mozgássá. Erre sokféle egyszerű megoldás (pl. fogasléc, csuklós szerkezet) található. Az ábra a csuklós szerkezetet mutatja: (14). (14)-et (13) állandóan magával viszi [ide-oda csúszik a (15)-tel jelképezett vezetékben]. (14) a hozzá viszonyítva fellépő LK elmozdulást arra merőlegesbe viszi át; ezt a mozgást végzi az M -ben elhelyezett író. Az áttételek olyanok, hogy ha LK I -től felfelé mutat, M jobbra mozdul el. Ekkor az író ugyanolyan koordináta-rendszerben rajzol, mint amilyenben az összeszorozandó görbék vannak. Világos, hogy M (13)-hoz, ill. (2)-höz viszo-

k_1

nyitva mozdul csak el. Ha tehát mindkét görbét végigvezetjük a fonálkereszt alatt elgördülő papíron [melyet (2) felső részére erősítettünk], a két függvény szorzatának görbét kapjuk lerajzolva $\frac{1}{k_1}$ konstans szorzótól eltekintve.

Ha most a szorzatfüggvény integrálja szükséges, legegyszerűbb M -hez kötni egy planiméter vezetőcsúcsát, miközben a planiméter fix pontját (2)-höz rögzítjük. A két görbe végigjárása után az abszcisszatengelyeken visszafutva



M is az abszcisszatengelyen fut végig s így a planiméter a szorzatfüggvény integrálját adja meg az $\frac{1}{k_1}$ szorzótól eltekintve.

(II) és (III) könnyen egyesíthető egyetlen készülékben is. Ekkor némi átkapcsolás után a szükséges berendezés fog működni.

Ha Fourier-analízis szükséges, a sablonok bizonyos léptékben $\varphi(x) = \sin \frac{2n\pi}{l} x$ ($n = 1, 2, \dots$)-t ábrázolják, előre megadott l -lel. Ilyenkor a feldolgozandó görbét előbb még a megfelelő méretre kell hoznunk. A cos-os tagok együttthatóinak megállapításakor a sablont negyed-periódushosszal eltolva kell alkalmazni. Szintézisnél az eredményt legtöbbször nem is kell grafikusan átalakítani.

A gép fő hátrányának a feldolgozandó görbe átrajzolását kell tekintenünk. Mindenesetre szerkeszthető olyan készülék is, amely ezt a hátrányt kiküszöböli. Erről itt beszélni azonban túl messze vezetne.

A gép fő előnyének a szintézis elvégzését látjuk. Figyelemreméltó, hogy nincs harmonikus függvényekhez kötve, mint a Fourier-szintetizátorok, amellet pedig teljes egészében megadja a görbét nemcsak pontonként, mint a különben is fáradságos numerikus eljárás.

Ha a binokuláris lupét mellőzni akarjuk, a készüléket némileg át kell alakítani. Ekkor a sablonokat átlátszó lemezre (pl. celluloid) rajzoljuk, vagy papírból vágjuk ki; ez alatt mozoghat a másik görbe. Metszéspontjuk az eljárás alatt mutató, vagy leolvasó — lupe fonálkeresztje alatt tartandó. Közlelbbi részletezés túllépné cikkünk kereteit; csak azt említjük meg, hogy a gép primitív modelljét sikerült »Märklin« fémépítőszekevény alkatrészeiből megépíteni s bebizonyosodott, hogy a vázolt elgondolásnak mechanikai akadályai nincsenek. Ezt a modellt a fénykép mutatja.

IRODALOM

[1] L. pl. F. A. Willers: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin, 1951. 225—235. o.

[2] L. pl. F. A. Willers, i. m. 229. o.

[3] A. B. Macnee: A high speed product integrator. Rev. Sci. Instr. 24. No. 3. (March, 1953), 207. o.

[4] L. pl. E. H. Winkler: Principle and design of a new type Stieltjes integrator Rev. Sci. Instr. 22. (1951). 406—410. o.

[5] L. pl. F. A. Willers, i. m. 220., vagy M. Г. Серебrenников. Гармонический анализ, Москва 1948. vonatkozó fejezetét.

[6] L. szerző »Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire« c. cikkét a Kiadvány más helyén.

НОВЫЙ ПРИБОР ДЛЯ СИНТЕЗА И АНАЛИЗА ФУРЬЕ И ПОДОБНЫХ ЗАДАЧ

П. Меддешни

Резюме

При исследованиях в области прикладной математики часто нужно разложить эмпирические функции в ряд по некоторой ортогональной системе функции и представлять отрезкой ортогонального ряда при данных коэффициентах графически.

Важным примером этого является анализ и синтез Фурье. Задача заключается по существу в представлении интеграла произведения двух функций и в графическом сложении некоторых функций. Описываемый прибор вычерчивает упомянутые произведения функций с помощью изготовленных раз навсегда шаблонов, или он умножает функции на шаблонах на некоторые константы и слагает их графически. Прибор работает механически и требует только одного обслуживателя (вместо двух). Шаблоны не подвергаются механической нагрузке. С надлежащими шаблонами прибор употребляем не только при гармонических, а также при любых других ортогональных функциях. Далее он может быть использован для графического умножения и сложения и некоторого преобразования графиков функций.

UN APPAREIL NOUVEAU POUR LA SYNTHÈSE ET ANALYSE DE FOURIER AINSI QUE POUR DES PROBLÈMES ANALOGUES

P. MEDGYESSY

Résumé

En quelques recherches de mathématiques appliquées, nous ayons fréquemment besoin du développement d'une fonction empirique suivant un système quelconque des fonctions orthogonales, ainsi que de la présentation graphique des segments d'une série des fonctions orthogonales, les coefficients étant donnés. Nous citons l'analyse et synthèse de Fourier comme exemple. Au fond, notre problème est conforme à la formation de l'intégral du produit de deux fonctions ou à l'addition graphique de certaines fonctions. Avec l'aide des chablon préparés une fois pour toutes, l'appareil en question peut dessiner les séries de fonctions mentionnées ou, après avoir multiplié par certains constants, il peut additionner graphiquement les fonctions sur les chablon. Il est mécanique et exige un seul manipulateur au lieu de deux. Les chablon ne sont pas mis à contribution mécanique. Avec des chablon convenables, l'appareil peut utiliser en cas de n'importe quelles fonctions orthogonales non seulement des fonctions harmoniques. Il peut aussi utiliser pour l'addition, multiplication et transformation (dans un certain sens) des graphiques des fonctions quelconques.

A RAKTÁRKÉSZLET PÓTLÁSÁRÓL I.

A TÖRZSKÉSZLET

PALÁNTI ILONA, RÉNYI ALFRÉD, SZENTMÁRTONY TIBOR és TAKÁCS LAJOS

Összefoglalás

A dolgozat meghatározza, hogy egy bizonyos alkatrészből mekkora raktárkészletet kell tartalékolni, hogy az üzem folyamatos működése biztosítva legyen, vagyis meghatározza azt a legkisebb mennyiséget, amire, ha a raktárkészlet lepad, új alkatrészeket kell rendelni. A tárgyalásfigyelembe veszi hogy az egyes gépek nem folyamatosan működnek, hanem véletlen működési szünetek lépnek fel. Meghatározza tetszőleges $L(x)$ működési-szakasz-eloszlás tetszőleges $H(x)$ szüneteloszlás és tetszőleges $G(x)$ valódi élettartam-eloszlás mellett az alkatrészcsere számának az eloszlását. Ennek segítségével meghatározza, hogy előírt kockázat mellett hogyan kell a törzskészletet meghatározni.

Bevezetés

Vizsgálataink a következő problémával kapcsolatosak: tekintsünk egy üzemet, amelyben ugyanazon típusú gépalkatrészek, vagy felszerelési tárgyak egy-idejében több példányban vannak igénybevéve. Ezek az alkatrészek az igénybevétel következtében előbb-utóbb véletlenszerűen eltörnek vagy elkopnak. A tönkrement alkatrészeket, hogy az üzem termelésében kiesés ne történjék, azonnal ki kell cserélni. Ez csak úgy lehetséges, ha a különböző alkatrészekből egy bizonyos mennyiséget tartalékolunk és utánrendeléssel folyamatosan gondoskodunk arról, hogy a raktárkészlet ne merüljön ki. A pótlás ideje alatt természetesen újabb cserékre is sor kerülhet. A termelés folyamatosságának biztosítása megköveteli, hogy a raktárkészletből a pótlás ideje alatt az esetleg tönkrement alkatrészeket ki tudjuk cserélni, azaz (nagy valószínűséggel) ne fogyjon ki az illető alkatrészfajta raktárkészlete. A raktárkészlet utánpótlása többféleképpen történhet. Tárgyalásunkban a következő esetre szorítkozunk: feltesszük, hogy ha a raktárkészlet egy bizonyos, később megállapítandó szintre — melyet a következőkben törzskészletnek nevezünk — lepad, akkor új alkatrészeket rendelünk.

A fentiekkel kapcsolatban két probléma merül fel:

I. *Mekkora törzskészletet kell egy üzemben tartalékolni egy bizonyos alkatrészfajtából, hogy a termelés folyamatossága nagy valószínűséggel biztosítva legyen, és ugyanakkor elkerüljük a felesleges tartalékolást.*

A törzskészlet nagyságának helyes megállapítása az üzem számára nagyszámú megtakarítást jelent, népgazdasági szempontból pedig biztosítja, hogy nem vonunk el más üzemektől azok számára fontos alkatrészeket.

II. A másik kérdés az, hogy a készletpótló rendelés nagysága mekkora legyen. Ezzel a kérdéssel foglalkozik *L. Ziermann Margit* ebben a kötetben lévő dolgozata; jelen dolgozatban erre a kérdésre nem térünk ki.

Rényi Alfréd és *Szentmártony Tibor* korábbi [1] dolgozatukban foglalkoztak az első kérdéssel és arra az eredményre jutottak, hogy ha az alkatrész élettartamának, vagyis a beállítás pillanatától a törésig eltelt időnek az eloszlása exponenciális T átlaggal, továbbá ha a pótlási idő (ami alatt a megrendelés pillanatától a szállításig eltelt időt értjük) p átlagú és s szórású gamma-eloszlást mutat,* akkor a törzskészlet értéke:

$$k = \frac{p}{T} + \nu \sqrt{\frac{p}{T} + \frac{s^2}{T^2}} \quad .$$

Itt $\nu = 2$, illetve 3 esetén 2,28, illetve 0,14%-os a kockázat. Ezalatt azt értjük, hogy 0,0228, illetve 0,0014 annak a valószínűsége, hogy a pótlási idő alatt a raktár ebből az alkatrészfajtából kimerül.

A probléma eddigi irodalmából kiemeljük *K. I. Arrow, Th. Harris és I. Marschak* [2], továbbá *A. Dworetzky, I. Kiefer* és *J. Wolfowitz* [3] dolgozatait. Az utóbbi dolgozatok közlik a kérdés bibliográfiáját is. Ezek a dolgozatok egész más úton haladnak, mint a mi vizsgálataink. Az alapvető különbségek a következők:

1. Az említett szerzők a folyamatot csak diszkrét időpontokban vizsgálják, ezzel szemben mi az időt folytonos változónak tekintjük.

2. Az említett szerzők a raktárkészlettel szemben fellépő igények jellegét nem specializálják felhasználódás folytán szükségessé váló csere következtében fellépő igényekre; ezáltal tárgyalásuk általánosabb (pl. így kereskedelmi problémákra is alkalmazható, erre a kérdésre mi is vissza kívánunk más alkalommal térni), ugyanakkor azonban a szövegforgó konkrét problémára nézve kevesebbet mond, mivel az alkatrészcsere által alkotott sztochasztikus folyamatot ők közelebbről nem is vizsgálják.

3. Az említett szerzők a probléma tárgyalását a kereslet-függvény és a kockázat-függvény ismeretére építik. Ezeket a függvényeket az illető gazdasági rendszer piackutatása alapján lehet meghatározni. Mondani sem kell, hogy a kockázat megállapításánál nagy szerepet játszanak különböző spekulációs elgondolások és kizárólag az érdekelt vállalat érdekeit tartják

* Egy τ valószínűségi változó T átlagú exponenciális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye pozitív t -kre

$$P(\tau < t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \text{ ha } t > 0,$$

és p átlagú s szórású gamma eloszlású, ha $P(\tau < t) = \frac{a^m}{\Gamma(m)} t^{m-1} e^{-at}$, ahol $a = p^2/s^2$,

$m = p^2/s^2$ és $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$ a gamma-függvényt jelöli.

szemelőtt. Ezzel szemben mi az egész népgazdaság érdekeiből indulunk ki és ennek megfelelően ítéljük meg a felesleges tartalékolást, amellyel más üzemek elől vonnánk el fontos alkatrészeket és hasonlóan ítéljük meg a termelés kiesését is, amellyel a tervszerű termelésnek okoznánk károkat.

4. Mi egy speciális tartalékolási rendszerből indulunk ki, amelynél mindig akkor történik utánrendelés, amikor a raktárkészlet egy bizonyos kritikus szintre lepad, ezzel szemben *Dworetzky*, *Kiefer* és *Wolfowitz* egy adott »kockázat-függvény«-hez keresik az optimális utánrendelési »stratégiát«.

Ezen a ponton megmutatkoznak annak hátrányai, hogy utánrendelés csak bizonyos, előre meghatározott időpontokban lehetséges. Ezen feltevéssel mellett ugyanis az az utánrendelési módszer (stratégia), amelyet mi alapul vettünk, általában nem valósítható meg (bár az említett szerzők vizsgálataiból is kitűnik, hogy elég általános feltételek mellett valóban ez a legelőnyösebb módszer), hiszen ha a raktárkészlet két utánrendelési időpont között apad le a kritikus szintre, akkor a következő időpontig, amikor rendelés leadása lehetséges, a raktárkészlet már lényegesen a kritikus szint alá süllyedhet. Ez meglehetősen illuzórikussá teszi az optimális »stratégia« kérdését, hiszen az általunk alapul vett utánrendelési rendszer, amely sok esetben valóban optimális, az említett szerzők tárgyalásmódja mellett eleve ki van rekesztve.

A következőkben az [1] dolgozat meggondolásait annyiban általánosítjuk, hogy tekintetbe vesszük azt, hogy az egyes gépek az üzemidő alatt nem folyamatosan működnek, hanem véletlen működési szünetek lépnek fel, amelyek hozzájárulnak a kiválasztott alkatrész üzemidőben mért élettartamának megnöveléséhez. Ezúton mondunk köszönetet *Faludi Zoltánnak*, a Gépipari Minisztérium Normaintézete osztályvezetőjének az [1] dolgozat eredményeinek megbeszélése során a probléma gyakorlati vonatkozásait illető értékes útmutatásaiért.

1. §. A probléma általános tárgyalása

A véletlen szünetek keletkezésének több oka lehet. Előfordulhat, hogy a gépek nem folyamatosan, hanem kisebb-nagyobb megszakításokkal működnek a munka természetének következtében, vagy sok alkatrésszel működő gépek esetén ha egy alkatrész tönkremegy, a javítási idő működési szünetet okoz a többi alkatrésznél is.

Így tehát mindenegybes alkatrésznél kétféle élettartamról beszélhetünk :

1. *üzemi élettartam*, amely alatt a beállítás pillanatától a tönkremenésig eltelt üzemidőt értjük (beleértve a véletlen szüneteket is).

2. *valódi élettartam*, vagy az alkatrész futási ideje, az az idő, amely alatt az alkatrész ténylegesen működik (kihagyva a szüneteket).

Megjegyezzük, hogy az üzemidő megegyezhet a naptári idővel, vagy különbözhet attól. Folyamatosan működő üzemnél a kettő megegyzik, míg szakaszosan működő üzemnél az üzemidő a naptári időnél kisebb. A rendszeres üzemszünetek nyilvánvalóan a 24 óra és az erre eső rendszeres átlagos üzemidő arányában — például 8 órás munkaidő esetén háromszorosára — növekszik az alkatrész élettartamát.

Feladatunk : a folyamatos termelést bizonyos, kicsiny kockázattal biztosító, minimális törzskészlet meghatározása. Mint említettük, a folyamatos-ságot úgy kívánjuk biztosítani, hogy ha a raktárkészlet egy előírt minimális törzskészletre apad le, készletpótló alkatrészeket rendelünk. A minimális törzskészletet úgy kell megállapítani, hogy igen kicsiny legyen a valószínűsége annak, hogy a pótlási idő alatt több alkatrész menjen tönkre, mint amennyit a meglévő készletből fedezni tudnánk, azaz pótalkatrész hiánya következtében létrejött termelés kiesés kockázata kicsiny legyen.

A pótlási idő alatt a rendelés pillanatától a megrendelt alkatrészek beérkezéséig eltelt időt értjük. Ezt az időtartamot is üzemidőben mérjük. Általában a pótlási idő is valószínűségi változó. Jelöljük ennek átlagát T -vel és szórásnégyzetét σ_T^2 -vel.

Minket most az érdekel közelebbről, hogy a pótlási idő alatt hány alkatrész törésére lehet számítani bizonyos kockázat mellett. Ha kiszámítjuk a pótlási idő alatti törések várható számát és szórásnégyzetét, úgy ez már nagy segítséget jelent. Ugyanis ekkor *Csebisjev* ismert egyenlőtlensége szerint már becslést tudunk adni a kockázatra. Mint látni fogjuk azonban a legtöbb esetben a pótlási idő alatti cserék száma közel normális eloszlást követ és így ilyen esetekben a kockázat pontosabban meghatározható. Ilyen módon a várható érték és a szórásnégyzet meghatározására szorítkozhatunk.

Tegyük fel, hogy a pótlási idő hossza üzemidőben mérve t , jelentse $m(t)$ a pótlási idő alatti cserék várható számát, $\sigma^2(t)$ pedig a csereszám szórásnégyzetét. $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ ismeretében könnyen meghatározható a pótlási idő alatti cserék számának (feltétel nélküli) várható értéke és szórásnégyzete. Jelöljük ezeket M és D^2 . A feltételes várhatóértékre és feltételes szórásnégyzetre vonatkozó ismert tétel szerint fennáll, hogy

$$(1) \quad M = \int_0^{\infty} m(t) dP(t)$$

és

$$(2) \quad D^2 = \int_0^{\infty} \sigma^2(t) dP(t) + \int_0^{\infty} [m(t) - M]^2 dP(t).$$

Itt $P(t)$ a pótlási idő eloszlásfüggvényét jelenti.

Az első egyenlet a feltételes várható érték definíciójából következik, a második pedig abból, hogy a D^2 szórásnégyzet egyenlő a feltételes szórásnégyzet várható értékének és a feltételes várható érték szórásnégyzetének összegével [4].

Így lényegében $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ meghatározása marad hátra. Ezzel kapcsolatban még néhány szót kell szólnunk. $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ jelentik a t idő alatti cserék számának várható értékét és szórásnégyzetét. Ezek a kifejezések azonban függenek attól, hogy honnan számítjuk ezt a t időtartamot. Fel fogjuk tenni, hogy az alkatrészeket $t = 0$ időpontban állítottuk be. Ekkor valamennyi alkatrész működési ideje még 0. A valóságban persze az a helyzet, hogy a már régóta működésben lévő üzemben vagyunk kíváncsiak a pótlási idő alatti cserék számára. Ha a pótlási idő sokszorosa egy alkatrész élettartamának,

akkor a kétféle számítás nem tér el lényegesen egymástól. Viszont, ha a pótlási idő igen rövid, úgyhogy ezalatt nem kell cserére számítani, akkor a törzskészlet meghatározásának a problémája nem jelentős.

A következőkben először egyetlen alkatrészt vizsgálunk és arra állapítjuk meg, hogy a pótlási idő alatt hányszor kell újjal helyettesíteni a tönkrement alkatrészt. Ha ezt egyetlen alkatrésze ismerjük, az eredmény akár-hány alkatrésze egyszerűen kiterjeszthető.

Tekintsünk tehát egyetlen alkatrészt, amelyet a $t = 0$ időpontban állítottunk üzembe. Tegyük fel, hogy ha az alkatrész tönkremegy, abban a pillanatban újjal helyettesítjük. Kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy t idő alatt legfeljebb n csere váljék szükségessé. Jelöljük ezt a valószínűséget $W(t, n)$ -nel ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Ennek a valószínűségnek a meghatározására ismernünk kell, hogy az illető gépnél a működési szakaszok és szünetek váltakozása milyen törvényszerűséget követ, továbbá az alkatrész valódi élettartamának eloszlását. Az időt mindig üzemidővel mérjük.

Feltesszük, hogy egy gépnél az egymást követő működési szakaszok és szünetek időtartamai egyforma eloszlást mutató független valószínűségi változók, mégpedig a működési szakaszok eloszlásfüggvénye $L(x)$ és a szüneteké $H(x)$. Tegyük fel továbbá, hogy az egymás után üzembehelyezett alkatrészek valódi élettartamai szintén egyforma eloszlású független valószínűségi változók, amelyek közös eloszlásfüggvényét jelölje $G(x)$.

Szükségünk lesz ezeknek az eloszlásoknak várható értékeire, szórásnégyzeteire és Laplace—Stieltjes transzformáltjaira. Ezekre a következő jelöléseket vezetjük be:

	Eloszlás- függvény	Várható- érték	Szórás	Laplace— Stieltjes- transzformált
Működési szakaszok	$L(x)$	l	σ_L	$\lambda(s)$
Szünetek	$H(x)$	h	σ_H	$\chi(s)$
Valódi élettartam ..	$G(x)$	g	σ_G	$\gamma(s)$

Előrebocsátjuk, hogy egy eloszlásfüggvénynek önmagával való n -szeres kompozícióját n indexszel jelöljük. Tehát pl. $G_n(x)$ jelenti $G(x)$ -nek önmagával való n -szeres kompozícióját. Így $G_0(x) = 0$, ha $x < 0$ és $G_0(x) = 1$, ha $x \geq 0$, és $G_1(x) = G(x)$, és $G_n(x)$ ($n = 2, 3, \dots$) a következő rekurzív formula segítségével határozható meg:

$$(3) \quad G_n(x) = \int_0^x G_{n-1}(x-y) dG(y).$$

Ezekután rátérünk $W(t, n)$ meghatározására. Könnyen belátható, hogy

$$(4) \quad W(t, n) = 1 - \int_0^t \Omega(t, z) dG_{n+1}(z),$$

ahol $\Omega(t, z)$ annak a feltételes valószínűségét jelenti, hogy ha egy adott idő-

pontban törés történt, és azt megelőzően az összes működési idő pontosan z volt, akkor ilyen feltételek mellett az üzemidő legfeljebb t legyen.

A felírt formula annak a valószínűségét jelenti, hogy az $n + 1$ -edik törés pillanata a $(0, t)$ intervallumon kívül esik és ez éppen annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n törés történik.

Másrészt

$$(5) \quad \Omega(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} [L_{k-1}(z) - L_k(z)] H_{k-1}(t-z).$$

Ugyanis ha egy adott pillanatban törés történt és addig az összes működési idő z , akkor annak a valószínűsége, hogy addig pontosan k ($k \geq 1$) működési szakasz fordult elő: $L_{k-1}(z) - L_k(z)$. Ha k működési szakasz fordult elő, akkor az is nyilvánvaló, hogy eközben $k - 1$ szünet fordult elő, ugyanis a $t = 0$ időpontban működési szakasszal kezdődött a folyamat. Viszont a törés pillanatáig eltelt üzemidő akkor lesz $\leq t$, ha a szünetek összhossza $\leq t - z$, aminek a valószínűsége $H_{k-1}(t - z)$. Ebből (5) a teljes valószínűség tétele alapján adódik.

$W(t, n)$ ismeretében most már könnyen meghatározhatjuk a t idő alatti csereszám átlagát és szórásnégyzetét. Ezekre fennáll, hogy

$$(6) \quad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)]$$

és

$$(7) \quad \sigma^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) [1 - W(t, n)] - [m(t)]^2.$$

2. §. Speciális esetek

Az általános esetben a számítás ezen képletek alapján meglehetősen bonyolult. Jelentős egyszerűsítés érhető el abban az esetben, ha a működési

szakaszok exponenciális eloszlásúak, azaz ha $L(x) = 1 - e^{-\frac{x}{t}}$. Ekkor ugyanis fennáll, hogy az egyes alkatrészek üzemidőben mért élettartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók, mégpedig jelölje ezt a közös eloszlásfüggvényt $F(x)$, ennek átlagát f , szórásnégyzetét σ_F^2 és Laplace—Stieltjes-transzformáltját $\varphi(s)$. Megjegyezzük, hogy ez csakis exponenciális eloszlású működési idő esetén van így. Ekkor ugyanis egy alkatrész kicserélésének pillanatában ugyanaz a helyzet, mint a beállításának pillanatában, azaz a cserék időpontjai a folyamat Markov-pontjait alkotják. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a beállítás után az első szünet legfeljebb x idő múlva következik be azon feltétel mellett, hogy az előző szünet óta u idő telt el, exponenciális eloszlás esetén:

$$\frac{L(u+x) - L(u)}{1 - L(u)} = L(x),$$

tehát u -tól független és egyenlő $L(x)$ -szel. Tehát pontosan ugyanaz a helyzet, mint $t = 0$ időpontban az első alkatrész beállításának időpontjában.

Viszont ha $1 - L(u)$ helyébe $\Lambda(u)$ -t írunk, úgy

$$\Lambda(u+x) = \Lambda(u)\Lambda(x)$$

és ennek a Cauchy-féle függvényegyenletnek pedig monoton megoldása csak az exponenciális függvény.

Ez utóbbi esetben könnyen adódik, hogy

$$(8) \quad W(t, n) = 1 - F_{n+1}(t).$$

$W(t, n)$ -et most Laplace-transzformáció segítségével határozzuk meg. Legyen $F(t)$ Laplace–Stieltjes-transzformáltja

$$(9) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t),$$

akkor

$$(10) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} W(t, n) dt = \frac{1 - [\varphi(s)]^{n+1}}{s}$$

ugyanis $F_{n+1}(t)$ Laplace–Stieltjes-transzformáltja $[\varphi(s)]^{n+1}$.

Hátra van tehát $F(t)$ meghatározása. Mivel

$$(11) \quad L_{k-1}(z) - L_k(z) = e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^{k-1}}{(k-1)!}$$

és így

$$(12) \quad \Omega(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{l}} \frac{\left(\frac{z}{l}\right)^{k-1}}{(k-1)!} H_{k-1}(t-z),$$

tehát $F(t)$ a következőképpen állítható elő:

$$(13) \quad F(t) = \int_0^t \Omega(t, z) dG(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^k}{k!} H_k(t-z) dG(z).$$

Térjünk át a Laplace–Stieltjes-transzformáltakra, azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{l}} \frac{\left(\frac{t}{l}\right)^k}{k!} e^{sz} [\chi(s)]^k dG(z) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{l} + \frac{z}{l} \chi(s) + s(z)} dG(z) = \gamma \left(s - \frac{1}{l} + \frac{\chi(s)}{l} \right). \end{aligned}$$

Tehát így megkaptuk $F(t)$ Laplace–Stieltjes-transzformáltját :

$$(14) \quad \varphi(s) = \gamma \left(s - \frac{1 - \chi(s)}{l} \right).$$

Ebből $F(x)$ átlagát :

$$(15) \quad f = \int_0^{\infty} x dF(x) = -\varphi'(0) = g + \frac{hg}{l}$$

és szórásnégyzetét :

$$(16) \quad \sigma_F^2 = \int_0^{\infty} (x-f)^2 dF(x) = \varphi''(0) - [\varphi'(0)]^2 =$$

$$= \frac{\sigma_G^2}{g^2} \left(g + \frac{hg}{l} \right)^2 + \left(1 + \frac{\sigma_H^2}{h^2} \right) \frac{h^2 g}{l}$$

szolgáltatta.

A csereszám várható értéke

$$(17) \quad m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}(t).$$

Ennek Laplace-transzformáltja :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} m(t) dt = \frac{1}{s} \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}.$$

Innen $m(t)$ -re a következő aszimptotikus előállítást nyerjük :

$$(18) \quad m(t) \sim \frac{t}{f}$$

és a szórásnégyzetre a

$$(19) \quad \sigma^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) F_{n+1}(t) - [m(t)]^2$$

előállításból a

$$(20) \quad \sigma^2(t) \sim \frac{\sigma_F^2}{f^3} t$$

aszimptotikus képletet kapjuk.

Ha most speciálisan $G(t)$ -ről is feltesszük, hogy exponenciális, akkor

$$(21) \quad \gamma(s) = \frac{1}{1 + gs}$$

és így

$$(22) \quad \varphi(s) = \frac{1}{1 + gs + \frac{g}{l} [1 - \chi(s)]}$$

Ha még $H(t)$ is exponenciális eloszlás, $H(t) = 1 - e^{-\frac{t}{h}}$

akkor

$$\chi(s) = \frac{1}{1 + sh}$$

és így

$$(23) \quad \varphi(s) = \frac{s + \frac{1}{h}}{gs^2 + \left(1 + \frac{g}{h} + \frac{g}{l}\right)s + \frac{1}{h}}$$

Innen visszatranszformálással kapjuk, hogy

$$(24) \quad F(t) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_1\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)} \frac{e^{\omega_1 t}}{\omega_1} - \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_2\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)} \frac{e^{\omega_2 t}}{\omega_2},$$

ahol

$$\left. \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} = \frac{-\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right)^2 - \frac{4}{gh}}}{2}.$$

Ebben az esetben $m(t)$ és $\sigma^2(t)$ explicit alakban kiszámítható és azt nyerjük, hogy

$$(25) \quad m(t) = \frac{l}{g(h+l)} t + \frac{l}{g} \left(\frac{h}{h+l}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l}\right)t}\right]$$

és

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) = & \left[\frac{l}{g(h+l)} + 2 \frac{h^2 l^2}{g^2 (h+l)^3} \right] t + \\ & + \left[\frac{l}{g} \left(\frac{h}{h+l}\right)^2 + \frac{l^2}{g^2} \left(\frac{h}{h+l}\right)^4 - 4 \frac{h^3 l^3}{g^2 (h+l)^4} \right] + \\ & + \left[2 \frac{h^2 l^2}{g^2 (h+l)^3} - 2 \frac{lh^3}{g^2 (h+l)^3} \right] t e^{-\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l}\right)t} + \end{aligned}$$

$$+ \left[4 \frac{h^3 l^3}{g^2 (h+l)^4} - 2 \frac{l^2}{g^2} \left(\frac{h}{h+l} \right)^4 - \frac{l}{g} \left(\frac{h}{h+l} \right)^2 + 2 \frac{l}{g} \left(\frac{h}{h+l} \right)^2 \right] e^{-\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l}\right)t} + \\ + \frac{l^2}{g^2} \left(\frac{h}{h+l} \right)^4 e^{-2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l}\right)t}.$$

Abban az esetben, ha $L(x)$, $G(x)$ és $H(x)$ mind exponenciális eloszlásfüggvények, a folyamat Markov-típusú és ezért célhoz vezet a következő egyszerű számítás $F(x)$ meghatározására.

Legyen $L(x) = 1 - e^{-\frac{x}{l}}$; $H(x) = 1 - e^{-\frac{x}{h}}$ és $G(x) = 1 - e^{-\frac{x}{g}}$; ebben az esetben, ha az alkatrész t időpontban működik, annak a feltételes valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben szünet kezdődjék a következő:

$$\frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{1 - L(t)} = L(\Delta t) = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{l}} = \frac{\Delta t}{l} + o(\Delta t).$$

Hasonlóan adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az alkatrész $(t, t + \Delta t)$ időközben tönkremegy: $\frac{\Delta t}{g} + o(\Delta t)$ és annak valószínűsége, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben a működési szünet befejeződik: $\frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t)$.

Most, mivel minden egyes alkatrész működési időtartama független valószínűségi változó ugyanazon $F(t)$ eloszlásfüggvénnyel, elég az első alkatrész eloszlásfüggvényét meghatározni. Legyen a rendszer A állapotban, ha az alkatrész működik, B állapotban, ha nem működik és C állapotban, ha az első alkatrész tönkrement. Legyenek a megfelelő valószínűségek: $P_A(t)$, $P_B(t)$, $P_C(t)$. Ekkor nyilvánvalóan:

$$(27) \quad F(t) = P_C(t).$$

Meghatározandó tehát $P_C(t)$. Nyilvánvalóan $P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 1$ és a kezdeti feltételek $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = P_C(0) = 0$. Annak a valószínűsége, hogy az alkatrész a $t + \Delta t$ időpontban működik, vagy úgy jön létre, hogy az alkatrész a t időpontban működött és a Δt idő alatt nem tört el és szünet sem kezdődött, vagy pedig úgy, hogy t időpontban nem működött, de közben a szünet befejeződött: ennélfogva

$$(28) \quad P_A(t + \Delta t) = P_A(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{g} \right) \left(1 - \frac{\Delta t}{l} \right) + P_B(t) \frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t)$$

és hasonlóképpen

$$P_B(t + \Delta t) = P_A(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{g} \right) \frac{\Delta t}{l} + P_B(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{h} \right) + o(\Delta t),$$

$$P_C(t + \Delta t) = P_A(t) \frac{\Delta t}{g} + o(\Delta t).$$

Δt -vel való osztással és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenettel a

$$(29) \quad \begin{aligned} \frac{dP_A(t)}{dt} &= -\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l}\right) P_A(t) + \frac{1}{h} P_B(t) \\ \frac{dP_B(t)}{dt} &= \frac{1}{l} P_A(t) - \frac{1}{h} P_B(t) \\ \frac{dP_C(t)}{dt} &= \frac{1}{g} P_A(t) \end{aligned}$$

differenciálegyenletrendszer kapjuk. A kezdeti feltételek a következők: $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ és $P_C(0) = 0$. Ha a rendszert vektorok segítségével írjuk fel:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) \quad [\mathbf{x}(t) = (P_A(t), P_B(t), P_C(t))]$$

az \mathbf{A} pedig a rendszer együtthatóiból képezett matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right) & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{l} & -\frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

akkor a kezdeti értékeket is magában foglaló megoldás felírható a Lagrange-féle interpolációs polinom és a sajátértékek segítségével [5]:

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \frac{e^{\omega_1 t}}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} (\mathbf{A} - \omega_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_3 \mathbf{E}) \mathbf{x}_0 + \\ &+ \frac{e^{\omega_2 t}}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} (\mathbf{A} - \omega_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_3 \mathbf{E}) \mathbf{x}_0 + \\ &+ \frac{e^{\omega_3 t}}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} (\mathbf{A} - \omega_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \omega_2 \mathbf{E}) \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

ahol \mathbf{E} az egységmatrix és $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$. ebből

$$(31) \quad \begin{aligned} P_C(t) &= -\frac{e^{\omega_1 t}}{g(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_3 + \omega_2\right) - \\ &- \frac{e^{\omega_2 t}}{g(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_3 + \omega_1\right) - \\ &- \frac{e^{\omega_3 t}}{g(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{l} + \omega_2 + \omega_1\right). \end{aligned}$$

Figyelembevéve a karakterisztikus egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket, és hogy $\omega_3 = 0$, $F(t)$ -t felírhatjuk:

$$(32) \quad F(t) = P_C(t) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_1\right)}{g(1\omega - \omega_2)} \frac{e^{\omega_1 t}}{\omega_1} - \frac{\left(\frac{1}{h} + \omega_2\right)}{g(\omega_1 - \omega_2)} \frac{e^{\omega_2 t}}{\omega_2}$$

alakban is. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutottunk.

3. §. A törzkészlet meghatározása

Ha $L(x)$, $H(x)$, $G(x)$ tetszőlegesek, ebben az esetben a várható értéket és a szórást a (6), illetve (7) formulák segítségével határozhatjuk meg.

Anélkül, hogy a számítás részletezésébe bocsátkoznánk, csupán azt említjük meg, hogy a várható értékre és a szórásra a következő aszimptotikus kifejezéseket kapjuk:

$$(33) \quad m(t) \sim \frac{l}{g(h+l)} t$$

és

$$(34) \quad \sigma^2(t) \sim \left[\frac{l\sigma_G^2}{g^3(h+l)} + \frac{l^2\sigma_H^2}{g^2(h+l)^3} + \frac{h^2\sigma_F^2}{g^2(h+l)^3} \right] t.$$

Ezután felmerül az a kérdés, amelynek megválaszolása dolgozatunk főcélja: előírt kockázat mellett a pótlási idő alatt hány alkatrészcsere kell számítani. A pótlási idő alatti csereszámot ξ -vel jelölve, legyen

$$(35) \quad \mathbf{M}(\xi) = M \quad \text{és} \quad \mathbf{D}(\xi) = D.$$

(35)-ben (1) és (2) alapján M és D aszimptotikus kifejezései

$$(36) \quad M \sim \frac{T}{f} \quad \text{és} \quad D^2 \sim \frac{\sigma^2}{f^2} T + \frac{\sigma_T^2}{f^2}$$

lesznek.

Ha a pótlási idő állandó T , úgy

$$(37) \quad M \sim \frac{T}{f} \quad \text{és} \quad D^2 \sim \frac{\sigma^2}{f^2} T.$$

Ha a pótlási idő állandó és igen hosszú az alkatrészek átlagos élettartamához képest, akkor már egy gépnél is közel normális eloszlású a pótlási idő alatti csereszám. Mivel ez általános esetben nem érvényes, mert a pótlási idő nem mindig igen nagy az alkatrészek élettartamához képest, ennek bizonyítására nem térünk ki. Ha egy üzemben ugyanolyan típusú alkatrészből többet használnak egyidejűleg (a gyakorlatban ez az eset az érdekes), úgy mindegyikre külön meg kell állapítani a pótlási idő alatti ξ_k csereszám M_k várható értékét és D_k^2 szórásnégyzetét.

Ha a pótlási idő állandó, akkor a ξ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) valószínűségi változók függetlenek egymástól, és ezért (ha teljesülnek ezen változókra a valószínűségszámítás centrális határeloszlástételének feltételei, amit feltehetünk) összegük közelítőleg normális eloszlású és így a törzkészletet

$$(38) \quad (M_1 + M_2 + \dots + M_N) + \nu \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2}$$

szolgáltatja, ahol ν értéket a megengedhető kockázatnak megfelelően kell megválasztani; pl. $\nu = 3$ 0,14% kockázatnak felel meg. Ha az alkatrészek

egyforma gépekben és egyforma körülmények között kerülnek felhasználásra, akkor az M_k és D_k értékek nem függenek k -tól, és így a törzskészletet

$$(39) \quad NM + \nu D \sqrt{N}.$$

adja meg.

Más azonban a helyzet, ha a pótlási idő nem állandó; ez esetben ugyanis a ξ_k változók nem függetlenek egymástól.* Ebben az esetben, ha $m_k(t)$, ill. $\sigma_k(t)$ jelenti a k -adik alkatrész t idő alatti cseréinek átlagos számát és szórását, és $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \zeta$ akkor

$$\mathbf{M}(\zeta) = \sum_{k=1}^N M_k$$

és

$$\mathbf{D}(\zeta) = \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \sigma_k^2(t) dP(t) + \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N m(t) - \sum_{k=1}^N M_k \right)^2 dP(t)$$

és így általában $D^2(\zeta)$ nem egyenlő $\sum_{k=1}^N D_k^2$ -tel. Abban a speciális esetben, amikor $m_k(t) = m(t)$ és $\sigma_k(t) = \sigma(t)$ nem függenek k -tól, ($k = 1, 2 \dots N$), $M(\xi) = NM$ és

$$\mathbf{D}^2(\zeta) = N \int_0^{\infty} \sigma^2(t) dP(t) + N^2 \int_0^{\infty} (m(t) - M)^2 dP(t).$$

Nyilvánvaló, hogy ez esetben

$$\mathbf{D}^2(\zeta) - ND^2 = N(N-1) \int_0^{\infty} (m(t) - M)^2 dP(t).$$

Ha $m(t)$ helyett annak közelítő értékét, $\frac{t}{f}$ -et vesszük, úgy

$$\mathbf{D}^2(\zeta) - ND^2 = \frac{N(N-1)}{f^2} \sigma_f^2 \text{ és így, mivel } D^2 = \frac{\sigma^2}{f^2} T + \frac{\sigma_f^2}{f^2} \text{ tehát } D^2(\xi) =$$

*Ezt az [1] dolgozat nem vette figyelembe, ezért annak képletei közül (15) és (17) módosításra szorulnak, amint arra figyelmünket Otto Han (Prága) volt szíves felhívni. Felhasználjuk az alkalmat a helyesbítésre a (15) és (17) képletek helyes alakja a következő:

$$k = \frac{p}{T_*^2} + v \sqrt{\frac{p}{T_*} + \frac{s^2}{T_*^2}}$$

T_{**} bevezetésére ennek megfelelően nincs szükség. A (16) képlet és a 138. oldalon közölt számpélda ennek megfelelően módosulnak. Tanulságosabb a példa, ha abban, $p = 20$ helyett $p = 60$, a többi adat változatlanul tartása mellett. Ez esetben 260 alkatrészt kell tartalékolni, míg a gyakorlatban eddig használt képlet szerint 400 alkatrészt kellene tartalékolni.

$= \frac{N\sigma^2 T}{f^2} + \frac{N^2 \sigma_T^2}{f^2}$ és így a törzskészlet meghatározására a következő képlet szolgál:

$$NM + \nu \sqrt{\frac{N\sigma^2 T}{f^2} + \frac{N^2 \sigma_T^2}{f^2}},$$

ahol T a pótlás átlagos időtartama, σ_T^2 a szórása, és $M \sim \frac{T}{f}$ ahol

$$= \frac{g(h+l)}{l}$$

és

$$\frac{\sigma^2}{f^3} = \frac{l\sigma_G^2}{g^3(h+l)} + \frac{l^2\sigma_H^2}{g^2(h+l)^3} + \frac{h^2\sigma_L^2}{g^2(h+l)^3}.$$

Itt l, g, h jelentik rendre az illető alkatrésznel a működési szakaszok, szünetek és valódi élettartamok átlagait és $\sigma_G^2, \sigma_H^2, \sigma_L^2$ a megfelelő szórásnégyzeteket.

Nem állandó pótlási idő esetében azonban az összcsereszám, k még nagy N esetében sem lesz közelítőleg normális eloszlású, és így adott ν értéke mellett a kockázat más és más lehet. Mindenesetre a Csebisev egyenlőtlenség értelmében adott ν mellett a kockázat $1/\nu^2$ -nél kisebb.

IRODALOM

- [1] Rényi A. és Szentmártony T.: Gépkalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. (Mat. Lapok III. 1952. 129—139. o.)
- [2] K. I. Arrow Th. Harris és J. Marschak: Optimal inventory policy. (Econometrica. 19. (1951) 250—272. o.)
- [3] A. Dworetzky, I. Kiefer és J. Wolfowitz: The inventory problem. I. Case of known distributions of demand. (Econometrica 20 (1952/186—222) és II. Case of unknown distributions of demand (ibid 20/1952/450—466).
- [4] Rényi A.: Valószínűségszámítás. Egyetemi tankönyv. (Sajtó alatt).
- [5] Egerváry J.: Matrix-függvények kanonikus előállításáról és ennek néhány alkalmazásáról. (Magyar Tud. Akadémia III. Osztályának Közleménye 1953/ III. kötet 4. szám 471. o.)

О ПОПОЛНЕНИИ ЗАПАСА ДЕТАЛЕЙ НА СКЛАДЕ I.

И. Палапги, А. Реньи, Т. Сентмартони и Л. Такач

Резюме

Работа имеет своей целью определить количество запаса некоторых деталей на складе, необходимое для обеспечения непрерывности работы завода, т. е. дать определение того минимального количества запаса при достижении которого необходим заказ новых деталей. Принимается во внимание и то обстоятельство, что некоторые станки не работают непрерывно, а бывают случайные бездействия. При произвольном распределении периода действия $L(x)$, произвольном распределении периода бездействия — $H(x)$ и произвольном распределении срока годности деталей — $G(x)$, определяется распределение числа обменов деталей: и необходимое количество запаса.

ERGÄNZUNG DES LAGERVORRATES I

I. PALÁSTI, A. RÉNNI, T. SZENTMÁRTONY UND L. TAKÁCS

Zusammenfassung

Die Abhandlung bezweckt die Bestimmung der minimalen Lagerhöhe irgendeines Bestandteiles, bei welcher Betriebsunterbrechungen ferngehalten werden können, also die Bestimmung des Mindestlagerbestandes, bei dem, wenn er erreicht wird, nachbestellt werden muss. Hierbei wird berücksichtigt, dass die Maschinen nicht beständig arbeiten, sondern in ihrem Betriebe zufällige Stillstände auftreten.

Im Aufsatz wird bei beliebiger Arbeitsperiodenverteilung $L(x)$, beliebiger Stillstandsverteilung $G(x)$ und beliebiger Lebensdauerverteilung die Verteilung der Anzahl von Ersatzteilauswechslungen bestimmt. Daraus kann man die nötige minimale Lagerhöhe bestimmen.

A RAKTÁRKÉSZLET PÓTLÁSÁRÓL II.

A KÉSZLETPÓTLÓ RENDELÉS

L. ZIERMANN MARGIT

Összefoglalás

A cikk egy olyan üzemmel foglalkozik, amelyben több egyforma gép működik és mindegyik gépben ugyanolyan típusú alkatrészek kerülnek felhasználásra. Az egyes alkatrészek előbb vagy utóbb törés következtében tönkremennek és akkor újjal kell helyettesíteni ezeket. Így a raktáron levő tartalékalkatrészek száma állandóan fogy, ezért készletpótló rendelés, utánrendelés válik belőlük szükségessé.

Kérdés már most, mikor és mennyi alkatrészt kell rendelnünk ahhoz, hogy eljárásunk gazdaságos legyen: azaz egyrészt, hogy az alkatrészek ne heverjenek hosszú ideig raktáron, de másrészt viszont ne kerüljön sor túl gyakran rendelésre.

A probléma tárgyalására a következő egyszerű s a gyakorlat követelményeit jól kielégítő utánrendelési terv szolgál: ha a raktárkészlet r_0 -ra, az ú. n. törzskészletre apad le, úgy azonnal rendelünk r számú alkatrészt. r_0 meghatározásával az I. dolgozat foglalkozik. Ebben a cikkben a szerző az utánrendelés nagyságát határozza meg, azaz megadja r -nek azt az optimális értékét, amely a fentebb említett és egymásnak meg-
lehetősen ellentmondó gazdaságossági követelményeket a lehető legjobban kielégíti.

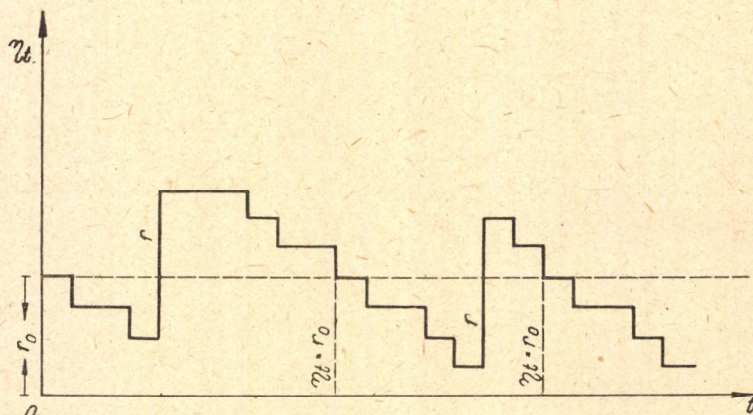
A termelésben részvevő gépek alkatrészei az igénybevétel következtében előbb vagy utóbb használhatatlanná válnak (törés, kopás stb. folytán) és ekkor ki kell cserélni őket. A folyamatos termelés és a tervgazdálkodás megköveteli, hogy ezekből az alkatrészekből egy bizonyos mennyiséget raktáron tartsunk. Ha egy alkatrész elkopik, vagy eltörik, a raktárunkon lévő alkatrészek egyikével kicseréljük. Ilyen módon a tartalékkészlet állandóan fogy, idővel gondoskodnunk kell a kiegészítéséről, ezért időközönként bizonyos számú darabot rendelünk a szóbanforgó alkatrészfajtából. Míg a megrendelés befut, az ú. n. pótlási idő alatt is sor kerülhet alkatrész-cserére s így előfordulhat az, hogy egy, esetleg több gép áll mindaddig, míg a megrendelt alkatrészek megérkeznek. Kérdés tehát, hogy *mikor és mennyi* alkatrészt kell rendelni, ha azt akarjuk, hogy gazdaságosan termeljünk, azaz hogy

1. minél kevesebb idő essen ki a termelésből gépállás miatt;
2. minél ritkábban kerüljön sor rendelésre (rendelés, szállítás stb. költségek csökkentése céljából);
3. ne heverjen túl sok alkatrész a raktáron (mert ez a szükségesnél nagyobb forgóalap lekötését jelenti).

Ezen — egymásnak meg lehetőségen ellentmondó — követelményeket kell szemelőtt tartanunk a pótlási terv elkészítésekor.

A raktárkészlet időbeli változását az 1. ábra tünteti fel. Az ábrán a vízszintes tengelyen az idő szerepel,* a függőleges tengelyen pedig a raktárkészlet (darabszám). A raktáron lévő tartalékalkatrészek darabszámát t időpontban r_t valószínűségi változóval jelöljük. r_t értéke 1-gyel csökken abban a pillanatban, amikor egy alkatrész eltörik (ugyanis a hibásat azonnal kicseréljük egy, a raktárkészletből kivett újjal) s megnövekszik abban a pillanatban, amidőn a rendelt alkatrészek megérkeznek, mégpedig a megérkezett alkatrészek számával.

Meggondolásainkat a következő utánrendelési tervre alapozzuk:** Ha a raktáron lévő alkatrészek száma r_0 -ra csökkent, úgy azonnal rendelünk r darab alkatrészt. A készletpótló rendelés időpontja tehát az a t időpont, amelyben a raktárkészlet éppen r_0 értékre csökken le. A pótlási idő alatt is előfordulhat alkatrész-csere, tehát a raktárkészlet r_0 alá is csökkenhet, sőt teljesen ki is fogyhat; ekkor természetesen nem tudjuk a raktárból fedezni a



1. ábra

törött alkatrészeket, ezért gépállásra is sor kerülhet. A megrendelt r számú alkatrész megérkezésekor a raktárkészlet r -rel megnövekszik. A gazdaságos pótlási terv tehát r_0 és r értékek helyes megválasztásán múlik.

Rényi A. és Szentmártony T. [1] dolgozatukban megállapították, hogy mekkora legyen a szóbanforgó alkatrészfajtából tartalékolandó azon legkisebb mennyiség (az ú. n. törzskészlet, az ábrán r_0), amelyre ha a tartalék lepad, azonnal rendelünk, mert a termelés folyamatossága — bizonyos megkövetelt biztonság mellett — csak ekkor biztosítható. Az említett cikkben a szerzők lényegében a pótlási idő alatti cserék várható számát és szórásnégyzetét számítják ki és így határozzák meg r_0 értékét. Nem foglalkoznak azonban külön annak a vizsgálatával, hogy mekkora legyen a mindenkor rendelés darabszáma (r), csak azt jegyzi meg, hogy r nem lehet kisebb r_0 -nál, és az egy-

* Idő alatt mindig üzemidő értendő.

** Természetesen sokféle más pótlási terv is számításba jöhet, de az itt vázolt látszik a legegyszerűbbnek és a gyakorlati követelményeket is leginkább kielégítőnek. (Gondolhatnánk arra is pl. hogy szabályos időközökben rendelünk és a mindenkor rendelés nagyságát a pillanatnyi raktárkészlettel tesszük függővé.)

szerűség kedvéért $r = r_0$ -al számolnak. Jelen dolgot — bizonyos feltételek mellett — r meghatározásának kérdését tárgyalja.

Tegyük fel, hogy egy üzemben m számú egyforma gép működik, egyforma alkatrészekkel. Ez a feltevés azt jelenti, hogy minden egyes gépalkatrészre nézve a törési valószínűség ugyanakkora. A továbbiakban eltekintünk az alkatrészek kopásától és feltesszük, hogy egy alkatrész elkopása előtt majdnem bizonyosan eltörik, továbbá, hogy az alkatrészek törése csupán a géptől és nem az alkatrészek »életkorától« (állapotától) függ.

Mindezen feltételeket matematikai szempontból a következőképen fogalmazhatjuk meg:

Legyen annak a valószínűsége, hogy működő gép t és $t + \Delta t$ időpontok között eltör egy alkatrészt: $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, ahol λ az illető gép törési sűrűségét jelenti; minél nagyobb λ , annál sűrűbben történik törés és minél kisebb, annál ritkábban. Mivel feltettük, hogy az üzemben m egyforma gép működik, ezért az m számú alkatrésze az együttes törési sűrűség $\Lambda = m\lambda$.

Feltevéseinkből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy egy alkatrész élettartama t -nél kisebb: $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, azaz exponenciális eloszlású.

Az exponenciális eloszlás ugyanis az egyetlen olyan eloszlás, amely azzal a sajátsággal bír, hogy ha tudjuk, hogy valamely adott alkatrész már bizonyos ideje, mondjuk u ideje működik, úgy annak a valószínűsége, hogy a rákövetkező t időtartam alatt eltörik, független attól, hogy mióta működik már az alkatrész. Ez abból következik, hogy $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ az egyetlen olyan eloszlásfüggvény, amely kielégíti a következő összefüggést:

$$\frac{G(u+t) - G(u)}{1 - G(u)} = G(t).$$

Itt a baloldal annak a valószínűségét jelenti, hogy egy u ideje működő alkatrész ($u, u+t$) időközben eltörik, míg a jobboldal annak a valószínűsége, hogy egy újonnan beállított alkatrész a t időtartam alatt eltörik. Törési törvényünk tehát valóban azt jelenti, hogy az alkatrészek nem »öregszenek«, hanem csupán véletlen »balesetek« következtében törnek el. Az elmondottakból viszont az is következik, hogy egy gépben működő alkatrész eltörésének időpontjai — ha a törés pillanatában új alkatrésszel cseréljük ki — Poisson-folyamatot alkotnak.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a pótlási idő eloszlásfüggvénye $F(x)$ tetszőleges. Várható értéke legyen

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dF(x).$$

I. A törzskészlet r_0 meghatározása

A következő megfontolásokat alkalmazhatjuk:

A) r_0 értékét olyan nagyra kell választani, hogy a pótlási idő alatt nagy biztonsággal fedezze az esetleges töréseket. A pótlási idő alatt $j = 0, 1, 2, \dots, r_0, r_0 + 1, \dots, m$ törés fordulhat elő. Ha a törések száma $\leq r_0$, úgy az eltört alkatrészeket a törzskészletből pótolhatjuk, míg r_0 -nál több törés esetében egyes gépek leállítására kerül sor. Éppen ezért r_0 úgy határozandó meg, hogy a törések száma nagy valószínűséggel ne legyen nagyobb nála.

Annak a valószínűsége, hogy a pótlási idő alatt j törés történik :

$$p_j = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dF(x) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r_0)$$

és kell hogy

$$p_0 + p_1 + \dots + p_r \geq 1 - \varepsilon$$

fennálljon, ahol ε a kockázatot jelenti, azaz annak a valószínűségét, hogy a pótlási idő alatt a raktár nem fedezi az alkatrész-szükségletet. A gyakorlatban elegendő ε -t 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 é. i. t. értékek választani.

Ha a pótlási idő, α állandó, úgy

$$p_j = e^{-\lambda \alpha} \frac{(\lambda \alpha)^j}{j!} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r_0).$$

Lényegében ez a megfontolás szerepel Rényi A. és Szentmártony T. már említett [1] cikkében.

B) Kiindulhatnánk abból a követelményből is, hogy a pótlási idő alatt a várható gépállási idő (az ú. n. *holidió*) legyen elhanyagolható. A várható holidió :

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^x e^{-\lambda(x-t)} \frac{[\lambda(x-t)]^{r_0-1}}{(r_0-1)!} \lambda m \left\{ \frac{\lambda t + e^{-\lambda t} - 1}{\lambda} \right\} dt \right] dF(x).$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. A pótlási időt jelöljük ξ -vel ; ξ valószínűségi változó, eloszlásfüggvénye $F(x)$. Tegyük fel, hogy $\xi = x$ és hogy az r_0 -adik törés az $x - t$ időpontban következik be. ($0 \leq t \leq x$). Az r_0 -adik törés időpontjának sűrűségfüggvénye : $e^{-\lambda(x-t)} \frac{[\lambda(x-t)]^{r_0-1}}{(r_0-1)!}$. Ezen feltételek mellett nézzük meg, hogy az egyes alkatrészekre mennyi a várható állási idő az $(x - t, x)$ időintervallumban. Ez egy alkatrészsze

$$\int_0^t e^{-\lambda y} \lambda (t - y) dy = \frac{e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t}{\lambda},$$

mert ha az $x - t + y$ időpontban törik el egy alkatrész, úgy $t - y$ ideig áll. m alkatrésze a várható állási idő m -szer annyi. Végül a várható holidióra a fentebb felírt kifejezést a feltételes várható értékek formulája alapján kapjuk.

Az elmondottak alapján r_0 értékét úgy kell megválasztani, hogy az így kiszámított várható holidió elegendő kicsiny legyen.

II. A rendelt alkatrészek számának, r -nek meghatározása

1. Mivel a törzskészlet meghatározásánál arra törekedtünk, hogy nagy valószínűséggel fedezze a pótlási idő alatti alkatrészcseréket, másszóval, hogy elhanyagolhatóan kis idő essen ki a termelésből gépállás miatt (l. 1 követelményt), ezért a további tárgyalásunkból kizárjuk azt az esetet, amikor a

törzskészlet a pótlási idő alatt teljesen elfogy s hogy mire a megrendelés befut, már álló gépek is vannak.*

Vizsgáljuk most meg tehát a második és a harmadik követelményt. Ezek azt mondják ki, hogy a rendelések számának, valamint a heverési időnek minimálisnak kell lennie. Számítsuk ki ezért, mondjuk a $(0, T)$ időintervallumra eső rendelések átlagos számát és az átlagos heverési időt. Mindenekelőtt azonban az η_t folyamat sajátásaival kell megismerkednünk.

Jelentse a raktár készletét t időpontban η_t valószínűségi változó. Az η_t változó egy sztochasztikus folyamatot ír le. Ennek a folyamatnak regenerációs pontjai (Markov-pontjai) azok az időpontok, amikor a raktár a törzskészletre apad le, azaz amikor $\eta_t = r_0$ (lásd 1. ábrát). Ezekben a pontokban ugyanis a folyamat előlről kezdődik, azaz bármelyik regenerációs ponttól számítva η_t jövő sztochasztikus menete független η_t -nek a multban felvett értékeitől. A jelen állapot tehát teljesen meghatározza a jövőt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpontban $\eta_t = r_0$ és ekkor éppen egy rendelés történt.

A 2. követelmény értelmében arra kell törekednünk, hogy minél ritkábban kerüljön sor rendelésre a vizsgált $(0, T)$ időközben. A $(0, T)$ időközben előforduló rendelések számának várható értékét a felújítási elmélet segítségével kiszámíthatnók; nekünk azonban csak arra az eredményre van szükségünk, amely azt mondja ki, hogy ha v_T jelenti a $(0, T)$ intervallumban előforduló rendelések számának a várható értékét és u két egymástkövető regenerációs pont távolságának a várható értékét, azaz két egymást követő rendelés között eltelt idő átlagértékét, akkor

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_T}{T} = \frac{1}{u},$$

mint az a felújítási elméletből ismeretes [2].

Megjegyezzük, hogy v_T annál kisebb, minél nagyobb r , mert minél több alkatrészt rendelünk egyidejűleg, annál ritkábban kerül sor rendelésre. Így ha csak erre a feltételre lennénk tekintettel, arra a következtetésre jutnánk, hogy r -et célszerű minél nagyobbra választani.

A 3. követelmény értelmében arra kell törekednünk, hogy ne heverjen túl sok alkatrész a raktáron. A gépalkatrészek heverési idejét a vizsgált $(0, T)$ időtartamra vonatkozóan úgy kapjuk meg, hogy mindenegyes alkatrésztől megállapítjuk, mennyi ideig feküdt a raktáron, azaz hogy a raktárba érkezése időpontjától T időpontig (illetve, ha közben felhasználásra került, úgy a felhasználás időpontjáig) mennyi idő telt el és ezeket — az egyes alkatrészekre megállapított — raktározási, heverési időtartamokat összegezzük minden olyan alkatrésztre, amely a $(0, T)$ időtartam alatt kerül a raktárba.

Célszerűbb azonban úgy eljárunk, hogy az időtengelyt egységekre bontjuk és megnézzük, hogy mindegyik egység alatt mennyi volt a raktáron lévő alkatrészek száma; e számosságnak az időegységgel való szorzata adja az

* Arra az esetre, amikor ez mégis bekövetkezne, tegyük fel, hogy van egy pótraktárkészletünk s ebből pótoljuk az eltört alkatrészeket addig, míg a rendelés meg nem érkezik — azért, hogy álló gépek ne legyenek. Az ε kockázatot, illetve várható holt-időt úgy kell azonban megválasztani, hogy erre csak ritkán, mondjuk átlag 10 évenként kerüljön sor. Így gyakorlatilag ez az eset valóban elhanyagolható.

illető időegységre jutó heverési időt s ezeknek a T időpontig való összegezése pedig a $(0, T)$ időtartam alatti összes heverési időt. Ha az időegységet minden határon túl csökkentjük s η_t jelenti a raktárkészlet pillanatnyi nagyságát, úgy T időtartam alatt az összes heverési idő

$$\int_0^T \eta_t dt,$$

ami tulajdonképpen nem más, mint az η_t görbe és az időtengely által bezárt terület. Ez a terület maga is valószínűségi változó, bennünket azonban csak a várható értéke érdekel.

Az átlagolás és összegezés felcserélhetőségére vonatkozó ismert tétel általánosításaként kapjuk, hogy

$$M \left(\int_0^T \eta_t dt \right) = \int_0^T M(\eta_t) dt.$$

A keresett várható-érték tehát η_t átlagának $M(\eta_t)$ -nek integráljával egyenlő. Ennek kiszámításánál a következő megfontolásokat vesszük alapul.

Az η_t folyamatot vizsgálva fentebb már láttuk, hogy azon időpontok, amikor a raktárkészlet éppen r_0 -ra apad le, a folyamat regenerációs pontjait alkotják, azaz ezekben az időpontokban a folyamat újrakezdődik.

Kézenfekvő tehát először annak a megállapítására törekedni, hogy átlag mekkora heverési idő esik egy ilyen szakaszra s ebből következtetni a keresett várható értékre.

Jelöljük az egymást követő rendelési időpontokat (regenerációs pontokat) t_i -vel ($t_1 = 0$, $i = 1, 2, \dots$) és jelöljük a (t_i, t_{i+1}) ($i = 1, 2, \dots$) szakaszokra eső heverési időket χ_i -vel ($i = 1, 2, \dots$), közös várható értékeket pedig h -val. h ismeretében a keresett várható értékre a következő összefüggést kapjuk:

$$(2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T M(\eta_t) dt = \frac{h}{u},$$

ahol u a két egymást követő rendelés között eltelt idő várható értékét jelenti.

Ugyanis nyilvánvaló, hogy

$$(2/a) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \eta_t dt = \frac{\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu}{T} - \frac{1}{T} \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \eta_t dt,$$

ahol ν a $(0, T)$ intervallumban előforduló rendelések száma; $t_{\nu+1}$, tehát a T időpont utáni első rendelés időpontja.

Képezzük (2a) mindkét oldalának a várható értékét, s a jobboldalon szereplő $\eta_\nu = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu$ összeg várható értéke kiszámításához használjuk fel *A. N. Kolmogorov és Ju. V. Prohorov* [3] tételének következő speciális esetét:

Legyenek $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ egyforma várható értékű valószínűségi változók. Tekintsük az $\eta_\nu = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu$ összeget, ahol a tagok száma ν maga is valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy $n > m$ -re a χ_n valószínűségi változók függetlenek a $\nu = m$ eseménytől. Legyen $M(\chi_n) = h$ ($n = 1, 2, \dots$) és $M(\nu)$ véges, úgy

$$M(\eta_\nu) = h M(\nu).$$

Mivel a (2a) jobboldalán szereplő $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_\nu$ valószínűségi változók kielégítik fenti tétel feltételeit, ezért e tétel alapján felírhatjuk, hogy

$$M(\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_\nu) = h \nu_T.$$

A jobboldal második tagjára nyilvánvalóan fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\eta_t \leq r + r_0$$

és így

$$\int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt \leq (r + r_0)(t_{\nu+1} - T).$$

Tehát

$$M\left(\frac{1}{T} \int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt\right) \leq \frac{r + r_0}{T} M(t_{\nu+1} - T).$$

Jelen kötet [4] cikkében azonban ki van mutatva, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(t_{\nu+1} - T) = \frac{\sigma^2 + u^2}{2u},$$

ahol σ^2 a regenerációs pontok közötti távolság szórásnégyzetét jelenti. Így — mivel η_t nem-negatív, következik, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_T^{t_{\nu+1}} \eta_t dt\right) = 0.$$

Végeredményben tehát felírható, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \eta_t dt\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} h \frac{\nu_T}{T},$$

amivel — (1)-et tekintetbevéve — (2) állításunkat igazoltuk.

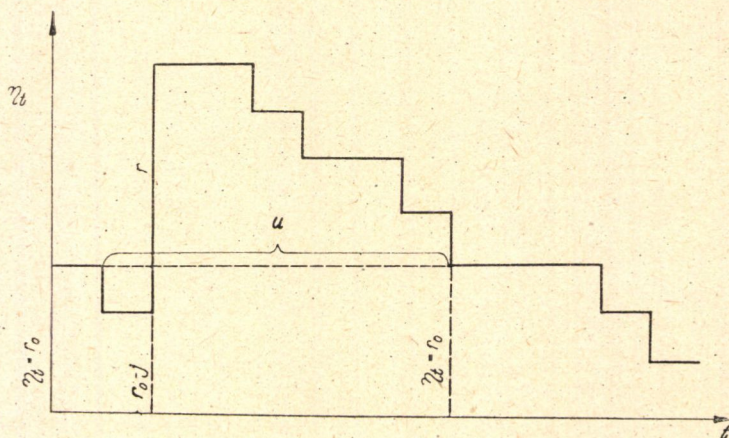
Nyilvánvaló, hogy a heverési idő várható értéke *annál kisebb, minél kisebb r* , ugyanis ha egyszerre kevés alkatrészt rendelünk, akkor sűrűn kell rendelnünk s az alkatrészek keveset állnak a raktáron. Így ha csak erre a követelményre lennénk tekintettel, úgy akkor járnánk el helyesen, ha r -et a lehető legkisebbre választanánk.

Az (1) és (2) formulákban szereplő u illetve h értékének meghatározását az alábbiakban adjuk.

1^o. u , mint az a 2. ábrán is látható, két szakaszból tehető össze.

Az első szakasz a pótlási idő, ennek átlagos hossza α , a második szakasz hosszának várható értéke a pótlási idő alatti gépalkatrész-törések számától függ. Ha a pótlási idő alatt j ($j = 0, 1, 2, \dots, r_0$) törés történik (ennek a valószínűsége p_j), akkor a második szakaszban $r - j$ alkatrész törik el addig, míg a készlet r_0 törzskészletre apad le. Mivel két törés közötti idő várható értéke $\frac{1}{\Lambda}$, ezért

$$u = \alpha + \frac{1}{\Lambda} \sum p_j (r - j).$$



2. ábra

u r -nek lineáris függvénye, tehát a következő alakban is írható:

ahol
$$u = A_1 + B_1 r,$$

$$(3) \quad A_1 = \alpha - \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} j p_j \quad \text{és} \quad B_1 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j$$

2^o. h meghatározása. A pótlási idő alatt — mint már említettük — $j = 0, 1, 2, \dots, r_0$ törésre számíthatunk, mivel r_0 -t úgy határoztuk meg, hogy az r_0 -nál több törés valószínűsége elhanyagolhatóan kicsiny legyen.

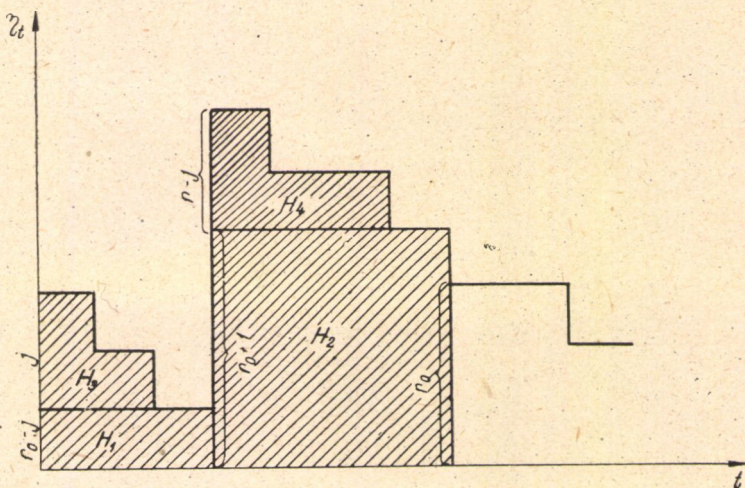
Feltesszük tehát, hogy a pótlási idő alatt j törés történik ($j = 0, 1, 2, \dots, r_0$), aminek a valószínűsége p_j s jelöljük a megfelelő feltételes várható értéket h_j -vel. Ekkor a feltételes várható értékre vonatkozó ismert tétel szerint

$$h = \sum_{j=0}^{r_0} p_j h_j.$$

Meghatározandó tehát h_j .

Lenti ábráról leolvasható, hogy h_j értéke négy területből tehető össze. E területek várható értékeit a következő kifejezések szolgáltatják: $M(H_1) = \alpha(r_0 - j)$, ugyanis a H_1 téglalap alapja a pótlási idő, s ennek várható értéke α ; magassága pedig $r_0 - j$. $M(H_2) = (r_0 + 1) \frac{r-j}{\Lambda}$, ugyanis a H_2 téglalap alapjának várható értéke $\frac{r-j}{\Lambda}$, magassága pedig $r_0 - j$. H_3 és H_4 területét kissé bonyolultabb úton állapítottuk meg. *Hajós György* egy észrevétele e két terület egyszerűbb kiszámítását tette lehetővé.

Tekintsünk egy Λ sűrűségű Poisson-folyamatot a $0 \leq t$ időpontokban és



3. ábra

jelentse a ξ_t valószínűségi változó a $(0, t)$ időintervallumban előforduló események számát. Kérdés, mivel egyenlő az

$$s_t = \int_0^t \xi_u du$$

valószínűségi változó várható értéke azon feltétel mellett, hogy $\xi_t = n$.
Állítás:

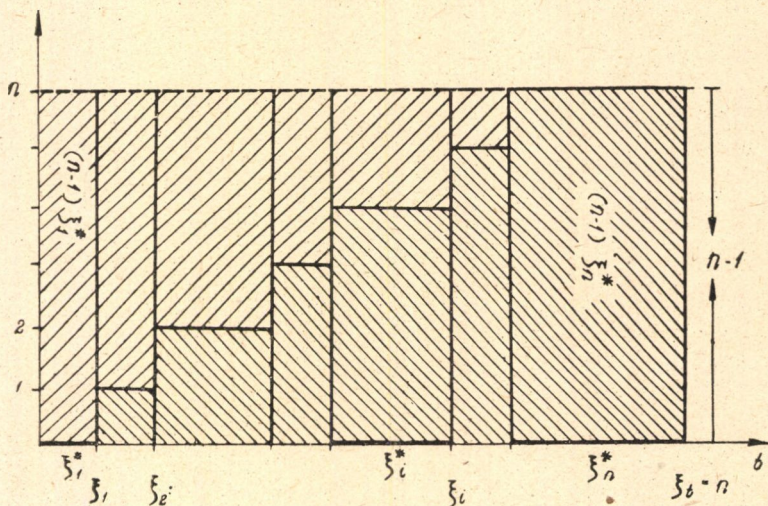
$$M\left(\int_0^t \xi_u du \mid \xi_t = n\right) = \frac{nt}{2},$$

ami — az alábbi ábrát tekintve — nem más, mint a t alapú és n magasságú téglalap területének a fele.

Bizonyítás: Jelentse ξ_i^* az i -edik és $(i-1)$ -edik esemény bekövetkezése közötti időtartam hosszát ($i = 2, 3, \dots, n$), ξ_1^* a $t = 0$ -tól az első esemény

bekövetkezéséig tartó időtartam hosszát, ξ_{n+1}^* pedig az n -edik esemény bekövetkezésétől t -ig terjedő időtartam hosszát.

A 4. ábrán látható téglalap két területből tehető össze, ezek egyike a sűrűbben vonalkázott idom, területe: $1 \cdot \xi_2^* + 2 \cdot \xi_3^* + \dots + (n-1) \xi_n^*$, a másik pedig az ezt téglalappá kiegészítő terület: $(n-1) \xi_1^* + (n-2) \xi_2^* + \dots + 1 \cdot \xi_{n-1}^*$. *Hajós György* észrevétele abban áll, hogy e két terület várható értéke megegyezik, ugyanis a $\xi_t = n$ feltevés mellett az egyes események bekövetkezéseinek időpontjai egyenletes eloszlásúak $(0, t)$ -ben is így a $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{n+1}^*$ változók együttes eloszlása megegyezik a $\xi_{n+1}^*, \xi_n^*,$



4. ábra

\dots, ξ_1^* változók eloszlásával, vagyis ha az eseményeket t -től visszafelé vizsgáljuk, ugyanolyan eloszlású pontokat nyerünk. Ennélfogva tehát

$$\begin{aligned} M \left(\int_0^t \xi_u du \mid \xi_t = n \right) &= M (1 \xi_2^* + 2 \xi_3^* + \dots + (n-1) \xi_n^* \mid \xi_t = n) = \\ &= M ((n-1) \xi_1^* + (n-2) \xi_2^* + \dots + 1 \xi_{n-1}^* \mid \xi_t = n) = \frac{nt}{2}. \end{aligned}$$

Ha most t nem állandó, hanem τ valószínűségi változó, $G(t)$ eloszlásfüggvénnyel, úgy

$$M \left(\int_0^\tau \xi_u du \mid \xi_\tau = n \right) = \int_0^\infty \frac{nt}{2} dG(t) = \frac{n}{2} \int_0^\infty t dG(t) = \frac{n}{2} M(\tau),$$

tehát egyenlő annak a téglalapnak a fél területével, amelynek alapja τ várható értéke, magassága pedig n .

Így tehát fentiek értelmében $M(H_3) = \frac{\alpha \cdot j}{2}$ ugyanis H_3 alapjának várható értéke α , magassága pedig j . Most vizsgáljuk meg a H_4 területet. H_4 esetében a téglalap alapja szintén valószínűségi változó, amelynek várható értéke $\frac{r-j-1}{\Lambda}$, tehát $M(H_4) = \frac{(r-j-1)(r-j)}{2\Lambda}$.

Végül tehát h_j -re a következő kifejezést kaptuk :

$$(4^*) \quad h_j = \alpha(r_0 - j) + (r_0 + 1) \frac{r-j}{\Lambda} + \frac{\alpha \cdot j}{2} + (r-j-1) \cdot \frac{r-j}{2\Lambda}$$

és

$$(4) \quad h = \sum_{j=0}^{r_0} p_j h_j.$$

Behelyettesítve (4*)-ot (4)-be, r -ben kvadratikussá kifejezést kapunk, ezért (4)-et a következő formában is felírhatjuk :

$$(5) \quad h = A_2 + B_2 r + C_2 r^2,$$

ahol

$$A_2 = \alpha r_0 \sum_{j=0}^{r_0} p_j - \left[\alpha + \frac{1}{\Lambda} (r_0 - 1) \right] \sum_{j=0}^{r_0} j p_j + \frac{1}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j j^2 + \frac{r_0 (r_0 + 1)}{4\Lambda}$$

$$B_2 = \frac{r(2r_0 - 1)}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j - \frac{2r}{\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} j p_j$$

és

$$C_3 = \frac{1}{2\Lambda} \sum_{j=0}^{r_0} p_j.$$

2. Az előbbieken a $(0, T)$ időintervallumban bekövetkező rendelések várható számának, v_T -nek, továbbá az ugyanezen időintervallumra eső heverési idő várható értékének, $\int_0^T M(\eta_t) dt$ -nek a meghatározásával foglalkoztunk.

Feladatunk most r értékének a meghatározása oly módon, hogy a rendelési költségek és a felhasználatlan heverő gépalkatrészek okozta népgazdasági kár a minimális legyen.

Általában egy rendelés költsége : $a + br$, összetevődik egy darabszámtól függő és egy tőle független költségből. Így a T időre eső várható rendelési költség

$$v_T (a + br).$$

Ehhez a költséghez hozzá kell még vennünk — egy megfelelően választott c költségfaktoriall súlyozva — a heverési időt, azaz

$$c \int_0^T M(\gamma_t) dt.$$

Végeredményben tehát arra kell törekednünk, hogy adott T -nél

$$v_T(a + br) + c \int_0^T M(\gamma_t) dt$$

a minimális legyen.

Itt az a probléma merül fel, hogy milyen nagyra válasszuk T értékét. Mivel bennünket csupán az érdekel, hogy az átlagos költség legyen minimális, ezért kiszámítjuk az időegységre eső költséget, amely

$$(6) \quad \frac{v_T}{T}(a + br) + c \frac{1}{T} \int_0^T M(\gamma_t) dt.$$

Célszerű T -t minél nagyobbra választani, ezért elvégezzük (6)-ban a $T \rightarrow \infty$ határátmenetet. Ekkor (1) és (2) felhasználásával adódik, hogy az időegységre eső költség

$$(7) \quad \frac{a + br}{u} + \frac{ch}{u}$$

s erről kell eldöntenünk, hogy r milyen értéke mellett lesz minimális.

Helyettesítsük be (7)-be az u -ra és a h -ra kapott (3), illetve (5) értékeket; ekkor r -nek az alábbi függvényét kapjuk:

$$f(r) = \frac{a + br + c(A_2 + B_2r + C_2r^2)}{A_1 + B_1r},$$

vagy másképen

$$f(r) = \frac{A_3 + B_3r + C_3r^2}{D + r},$$

ahol

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{a}{B_1} + \frac{cA_2}{B_1}, & B_3 &= \frac{b}{B_1} + \frac{-cB_2}{B_1}, \\ C_3 &= \frac{cC_2}{B_1}, & D &= \frac{A_1}{B_1}. \end{aligned}$$

Differenciálással nyerjük, hogy $f(r)$ minimumát akkor veszi fel, ha

$$(8) \quad r^* = \sqrt{\frac{A_3 - B_3D + C_3D^2}{C_3}} - D.$$

Megvizsgálva $f(r)$ görbe menetét s szemelött tartva, hogy gyakorlatilag csak pozitív egész r^* értékek jöhetnek számításba, arra az eredményre jutunk, hogy [(8)-ban pozitív gyököt véve] r^* -nak felfelé kerekített egész értékét, azaz az

$$(9) \quad r = [r^*] + 1$$

egész számot kell a készletpótló rendelés darabszámául választanunk.

IRODALOM

[1] Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor: Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségsszámítási meghatározása. Matematikai Lapok. Budapest. 1952. III. évf. 2. sz. 129—139. o.

[2] W. Feller: On the integral equation of renewal theory. Annals of Math. Stat. Vol. 12. (1941). 243—267. o.

[3] Л. пл. Б. В. Гнеденко: Курс теории вероятностей. Москва. 1950. 332. о.

[4] Takács Lajos: Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál. A. M. I. Közl. II. (1953)

ПОПОЛНЕНИЕ ЗАПАСА ДЕТАЛЕЙ НА СКЛАДЕ. II. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАКАЗЫ

М. Цирманн

Резюме

На заводе, где работает несколько однотипных станков, имеющих одинаковые детали, с течением времени некоторые детали ломаются и приходится их заменить. Ввиду этого количество запасных деталей на складе постоянно уменьшается и с целью укомплектования необходима выдача дополнительных заказов.

Вопрос состоит в том, когда и какое количество деталей должно быть заказано, — при соблюдении экономии, — т. е. с одной стороны, чтобы детали не держались долгое время на складе, а с другой стороны, чтобы заказы не были слишком частыми.

Для решение данной проблемы предлагается нижеследующий удовлетворяющий практическим требованиям план дополнительных заказов: Если число запасных частей на складе убывает до r , т. е. до так называемого основного запаса, то немедленно заказывается деталей. Определением r_0 занимается сообщение I. В этой статье автор определяет размер дополнительных заказов, т. е. устанавливает оптимальное значение r количества необходимого для удовлетворения вышеуказанных, в некотором степени противоречащих одно другому экономических требований.

ERGÄNZUNG DES LAGERVORRATES. II. NACHBESTELLUNG

M. ZIERMANN

Zusammenfassung

Betrachten wir einen Betrieb, in dem mehrere gleiche Maschinen arbeiten und in jeder Maschine Bestandteile gleichen Typs zur Verwendung kommen. Die einzelnen Bestandteile gehen früher oder später infolge von Bruch zugrunde und müssen dann durch neue ersetzt werden. Die Anzahl der Reservebestandteile nimmt beständig ab, daher werden Bestellungen zur Auffüllung des Lagerbestandes nötig.

Es erhebt sich nun die Frage, wann und wieviel Bestandteile bestellt werden sollen, um wirtschaftlich zu verfahren, d. h. um zu vermeiden, dass Bestandteile einerseits zu lange im Lager verweilen, andererseits zu oft nachbestellt werden müssen.

Als Grundlage zur Behandlung des Problems dient folgender einfacher und die praktischen Anforderungen gut befriedigender Nachbestellplan : nimmt der Lagervorrat bis zu einem gewissen Stammvorrat r_0 ab, so werden sofort r_0 neue Bestandteile bestellt. r_0 wurde in der gleichbetitelten Abhandlung I. bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird das Ausmass der Nachbestellung bestimmt, also der optimale Wert von r , der die obenerwähnten und einander ziemlich widersprechenden wirtschaftlichen Anforderungen im höchstmöglichen Grade befriedigt.

EGY MINŐSÉGELLENŐRZÉssel KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

SZÉKELY GÁBOR

Összefoglalás

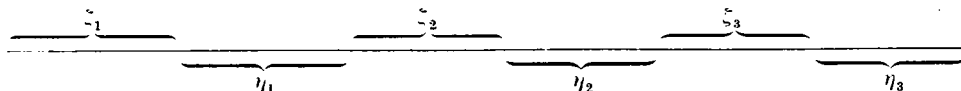
Automata gyártásnál több gépet ellenőriz egy futóellenőr. Bizonyos időközökben (két visszatérés között eltelt idő valószínűségi változó) egy adott géphez visszatér és ha az selejtet gyárt, a gépet megjavítja és újra elindítja. Utóellenőrzésnél mindig egy gép által bizonyos meghatározott idő alatt gyártott gyártmányokat ellenőriznek. A probléma egy sztochasztikus folyamatra vezethető vissza. Meg kell határozni bizonyos t idő alatt gyártott tételben a selejtes darabok számának eloszlását. A tárgyalásnál feltételeztük, hogy a gép selejtmentes gyártási periódusai exponenciális eloszlást követnek, vagyis azt, hogy a gép elomlása nem függ attól, mióta működik a gép. Fenti hipotézis mellett sikerült kiterjeszteni a megoldást arra az esetre is, amikor a selejtgyártási periódusban a gép csak p valószínűséggel gyárt selejtet. A szóbanforgó p valószínűség lehet konstans, vagy valószínűségi változó ismert eloszlásfüggvénnyel.

Automatagépekkel történő sorozatgyártás esetén egy futóellenőr több gépet ellenőriz. Ha valamely gépnél az ellenőr selejtet észlel, azt leállítja és a selejt okának megszüntetése után újból elindítja. A futóellenőrnek egy adott géphez történő egymásutáni két visszatérése között eltelt időtartamokról feltesszük, hogy független valószínűségi változók, $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen továbbá a gép működése közben annak a valószínűsége, hogy a gép elromoljék (selejtet kezdjen gyártani) konstans, azaz független attól, mióta működik a gép. Utóbbi feltétel sok esetben teljesül; ez a helyzet például csavarautomatáknál, ahol a selejtet a kés törése okozza.

Mint ismeretes, ekkor a selejtmentes gyártási szakaszok hossza exponenciális eloszlású, $h(t) = \lambda e^{-\lambda t} (t \geq 0)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy a gép a $t, t + \Delta t$ időszakokban elromoljék.

A kitűzött feladat a következő: Elindul a gép; ha egy időpillanatban elromlik, elkezd selejtet gyártani és mindaddig selejtet gyárt, amíg a visszatérő futóellenőr le nem állítja. Megjavítás után a gép újból elkezd működni és kezdődik a folyamat előlről. Kérdés: t idő alatt gyártott tételben mi a selejtesek számának az eloszlása. A probléma az utóellenőrzés szempontjából fontos, ugyanis ez oly módon történik, hogy bizonyos, pl. 2 óra alatt gyártott tételek kerülnek utóellenőrzésre. Elképzelhető olyan gyártás is, ahol a gép meghatározott tételeket automatikusan csomagol.

A szóbanforgó folyamat sematikusán a következőképpen ábrázolható:



Az ábrán a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók jelentik a futóellenőrnek a géphez történő két visszatérése között eltelt időtartamokat, az τ_1, τ_2, \dots valószínűségi változók pedig a gép selejtgéartási periódusait, és $\zeta_i = \xi_i - \tau_i$ pedig selejtmentes géartási periódusokat. (A rajzon látható esetben $\eta_2 = 0$ $\eta_3 = 0$) ζ_i és τ_i egymástól nem függetlenek, azonban együttes eloszlásfüggvényük éppen a folyamat jellegéből kifolyóan könnyen felírható. Legyen

$$(1) \quad P(\xi_i \leq x; \tau_i \leq y) = G(x, y)$$

a szóbanforgó kétváltozós függvény. Mivel a ζ_i változó (a gép selejtmentes géartási periódusa) exponenciális eloszlású, következik, hogy

$$(2) \quad G(x, y) = \begin{cases} G(x, 0) + \int_0^x \int_0^y \lambda e^{-\lambda(u-v)} g(u) dv du & \text{ha } x \geq y \\ 0 & \text{ha } x < y, \end{cases}$$

ahol

$$G(x, 0) = \int_0^x e^{-\lambda u} g(u) du$$

az eloszlásfüggvény $y = 0$ helyen vett ugrásának nagysága. Ugyanis annak a valószínűsége, hogy a futóellenőr u és $u + \Delta u$ időközben visszatérjen $g(u) \Delta u + o(\Delta u)$; két visszatérési időpont között a gép vagy 1. elromlik vagy 2. nem romlik el; annak a valószínűsége, hogy $(u - v)$ és $(u - v) + \Delta v$ időközben elromoljék a gép $\lambda e^{-\lambda(u-v)} \Delta v + o(\Delta v)$ és annak a valószínűsége, hogy u időpontig nem romlik el $e^{-\lambda u}$. Legyen $\alpha_t = 1$, ha a t időpontban a gép selejtmentesen termel és $\alpha_t = 0$, ha selejtet géart. Az $\{\alpha_t\}$ sztochasztikus folyamat nem Markov-típusú, azonban a futóellenőr visszatérési időpontjai a folyamat regenerációs pontjai (Markov-féle pontjai), ugyanis két visszatérési időpont között akár elromlott a gép, akár nem, a visszatérési időponttól kezdve selejtmentesen géart mindaddig, amíg el nem romlik. A legutolsó visszatérési időponttól az elromlás időpillanatáig eltelt idő viszont exponenciális eloszlású.

Jelentse $\Omega(t, z)$ annak a valószínűségét, hogy t idő alatt a selejtgéartási periódusok összege β_t kisebb vagy egyenlő legyen, mint z . $\Omega(t, z)$ meghatározására az alábbi kétváltozós integrálegyenlet írható fel:

$$(3) \quad \Omega(t, z) = \begin{cases} \int_0^t \int_0^x \Omega(t-x, z-y) \lambda e^{-\lambda(x-y)} g(x) dy dx + \\ + \int_0^t \Omega(t-x, z) e^{-\lambda x} g(x) dx + \\ + e^{-\lambda t} \int_t^\infty g(x) dx & \text{ha } (0 \leq z \leq t) \\ 0 & \text{ha } t < z. \end{cases}$$

Ugyanis, ha a 0 időpontban kezdődik a gyártás, három eset lehetséges :
 1. Az ellenőr először x és $x + \Delta x$ időpontok között tér vissza ($0 < x < t$) és $(x - y)$ és $(x - y) + \Delta y$ közötti időpontban elromlik a gép ($0 < y < x$) és $(y < z)$ ennek a valószínűsége $\lambda e^{-\lambda(x-y)} g(x) \Delta x \Delta y$, ekkor azonban a hátralévő $t - x$ időszakaszban a selejtgéártási periódusok összege kisebb, mint $(z - y)$, aminek a valószínűsége $\Omega(t - x, z - y)$.

2. Az ellenőr először x és $x + \Delta x$ között tér vissza ($0 < x < t$) és eddig az időpontig nem romlik el a gép, ennek a valószínűsége $e^{-\lambda x} g(x) \Delta x$, ekkor a hátralévő $t - x$ szakaszon a selejtgéártási periódusok összege kisebb kell legyen, mint z , aminek a valószínűsége $\Omega(t - x, z)$. Ezeket a valószínűségeket kell integrálnunk 0-tól t -ig és 0-tól z -ig.

3. Az ellenőr a $(0, t)$ időintervallum alatt nem tér vissza és ezalatt nem romlik el a gép ; ennek a valószínűsége $e^{-\lambda t} \int_0^t g(x) dx$.

Az integrálegenletben faltung-jellegű tagok szerepelnek és így kétszeres Laplace-transzformációval könnyen megoldható. Vegyük előbb mindkét oldalnak t -változó szerinti Laplace-traszformáltját :

$$(4) \quad \omega(s, z) = \int_0^x \omega(s, z - y) \Gamma(s, y) dy + \omega(s, z) \gamma(s + \lambda) + \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{s + \lambda},$$

ahol

$$\begin{aligned} \omega(s, z) &= \int_0^\infty \Omega(t, z) e^{-st} dt, \quad \Gamma(s, y) = \lambda \int_y^\infty e^{-xs} e^{-(x-y)\lambda} g(x) dx = \\ &= \lambda e^{\lambda y} \gamma(s + \lambda) - \lambda e^{\lambda y} \int_0^y e^{-x(s+\lambda)} g(x) dx \quad \text{és} \quad \gamma(s) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx. \end{aligned}$$

Az (5) egyenlet z változó szerinti Laplace-transzformációja után kapjuk :

$$(5) \quad \psi(s, w) = \frac{1}{s + \lambda} \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{1 - \gamma(s + \lambda) - A(s, w)},$$

ahol

$$\psi(s, w) = \int_0^\infty w(s, z) e^{-wz} dz = \int_0^\infty \int_0^\infty \Omega(t, z) e^{-st} e^{-wz} dt dz$$

$$\text{és} \quad A(s, w) = \int_0^\infty \Gamma(s, y) e^{-wy} dy = \frac{\lambda}{w - \lambda} \gamma(s + \lambda) - \frac{\lambda}{w - \lambda} \gamma(w + s).$$

Azaz $\Omega(t, z)$ kétszeres Laplace-transzformáltja

$$(6) \quad \psi(s, w) = \frac{1}{s + \lambda} \frac{1 - \gamma(s + \lambda)}{1 - \frac{w}{w - \lambda} \gamma(s + \lambda) + \frac{\lambda}{w - \lambda} \gamma(w + s)}$$

alakban írható, ahonnan $g(x)$ függvény Laplace-transzformáltjának ismeretében, a keresett $\Omega(t, z)$ eloszlásfüggvény kétszeres visszatranszformálással nyerhető.

Megjegyzés: Az $\Omega(t, z)$ függvény bizonyos esetekben az integrálegyenlet segítségével közvetlenül is előállítható. Ugyanis a futóellenőr visszatérési ideje a ξ valószínűségi változó, $\xi = b + \varrho$ összegként fogható fel, ahol b egy adott konstans (a futóellenőr b időn belül nem is térhet vissza, nevezzük ezt a gépek körüljárási idejének) és ϱ pedig valószínűségi változó. Ekkor az $\Omega(t, z)$ függvény az $0 - b$ szakaszon

$$\Omega(t, z) = e^{-\lambda(t-z)} \quad (0 \leq t \leq b).$$

Az integrálegyenletből ismerve a függvény értékét a $(0, b)$ szakaszon, előállítható a függvény értéke szukcesszíve, a $(b, 2b)$, $(2b, 3b)$ stb. szakaszokra. Ez az eljárás sok esetben egyszerűbb a Laplace-transzformált kétszeres visszatranszformálásánál.

Ha a gyártó üzem valamely p átlagos selejtarányt kíván garantálni az átvevőnek, a futóellenőrré legfeljebb annyi gépet kell bízni, hogy

$$\frac{m(t)}{t} = p$$

legyen, ahol $m(t)$ a β_i mennyiség várható értékét jelenti

$$m(t) = \int_0^{\infty} z d\Omega(t, z).$$

(7) segítségével előállítható $m(t)$ Laplace-transzformáltja is. Ugyanis a (7) kifejezés w szerinti deriváltja a $w = 0$ helyen éppen a kérdéses Laplace-transzformáltat szolgáltatja:

$$(7) \quad \mathcal{L}(m(t)) = \left[\frac{\partial \psi(s, w)}{\partial w} \right]_{w=0} = \frac{[1 - \gamma(s + \lambda)] [\gamma(s) - \gamma(s + \lambda) + \lambda \gamma'(s)]}{\lambda(s + \lambda) [1 - \gamma(s)]^2},$$

ahol

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma(s)}{ds}$$

(8) kifejezést s hatványai szerint Laurent-sorba fejtvé és visszatranszformálva, $m(t)$ -re a következő közelítő képletet kapjuk:

$$(8) \quad m(t) = \frac{a}{d}t + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d} \right) + \varepsilon(t) \quad \text{ahol} \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{ha} \quad t \rightarrow \infty$$

és ahol

$$a = 1 + m_0^* (m_0^* - 2) + \lambda m_1 (m_0^* - 1)$$

$$b = (\lambda m_2 + 2m_1^*) (1 - m_0^*) + m_1 (m_0^* - \lambda m_1^* - 1)$$

$$c = [2(1 - m_0^*) - \lambda m_1] m_2^* + 2m_1^* (\lambda m_2 - m_1 + m_1^*) + m_2 (1 - m_0^*)$$

$$d = m_1^2 \lambda^2$$

$$e = m_1 \lambda (m_1 - m_2 \lambda)$$

továbbá

$$m_k = \int_0^{\infty} x^k g(x) dx \quad \text{és} \quad m_k^* = \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} g(x) dx.$$

Legyen τ egy darab gyártmány gyártási ideje. Ekkor t idő alatt $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ darabot gyárt a gép. Annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan s legyen selejtes

$$(9) \quad P(t, s) = \Omega(t, s\tau) - \Omega(t, (s-1)\tau).$$

Tekintsük most azt az esetet, amikor a selejtgymártási periódus alatt nem állandóan selejtet gyárt a gép. Legyen p annak a valószínűsége, hogy ebben a periódusban egy darab gyártmány selejt legyen és $1 - p = q$ annak a valószínűsége, hogy hibátlan.

Ha a szóbanforgó periódusban csak p valószínűséggel keletkezik selejt, annak a valószínűsége, hogy t idő alatt gyártott $\left[\frac{t}{\tau}\right]$ darab gyártmány között k legyen selejtes:

$$(10) \quad \Gamma(t, k) = \sum_{s=k}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} P(t, s).$$

Ha pedig p nem konstans, hanem maga is változó, a (11) valószínűség

$$(11) \quad \Gamma(t, k) = \int_0^1 \sum_{s=k}^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \binom{s}{k} p^k q^{s-k} P(t, s) dF(p)$$

alakban írható, ahol $F(p)$ p -nek az eloszlásfüggvénye.

ОБ ОДНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ СВЯЗАННОМ С КОНТРОЛЕМ КАЧЕСТВА

Г. Секей

Резюме

При автоматическом производстве один контролер проверяет несколько машин. Через некоторые промежутки времени контролер возвращается к каждой машине (время прошедшее между двумя возвращениями является случайной величиной) и если данная машина изготовляет брак, исправляет ее и снова приводит в действие. При контроле готовых продуктов проверяются продукты, изготовленные машиной в течение некоторого определенного времени. Проблема может быть решена с помощью теории стохастических процессов. Нужно определить распределение числа дефектных изделий в партии, изготовленной в течение времени. При этом предполагаем, что безбрачные периоды машины распределяются по показательному закону t , е. что порча машины не зависит от продолжительности хода машины. На основании вышеупомянутой гипотезы удалось распространить решение проблемы и на тот случай, когда в период изготовления брака машина изготовляет брак только с вероятностью p . Упомянутая вероятность p может быть постоянной или случайной величиной с известной функцией распределения.

EIN MIT DER QUALITÄTSKONTROLLE ZUSAMMENHÄNGENDER STOCHASTISCHER PROZESS

G. SZÉKELY

Zusammenfassung

Bei automatischer Erzeugung wird das Produkt mehrerer Maschinen durch einen einzigen Prüfer überwacht. Dieser kehrt in gewissen Zeitabschnitten (die Zufallsvariablen sind) zur Maschine zurück; findet er, dass sie Ausschuss erzeugt, so verbessert sie und setzt sie so wieder in Bewegung. Bei der Nachprüfung werden dagegen immer die während einer bestimmten Zeit von ein und derselben Maschine erzeugten Produkte der Kontrolle unterzogen. Das Problem lässt sich somit auf einen stochastischen Prozess zurückführen. Man hat die prozentuelle Verteilung des Ausschusses in einem während der Zeit t erzeugten Satz zu bestimmen. Bei der Behandlung des Problems wurde angenommen, dass die Perioden, in welchen die Maschine ausschussfrei arbeitet, eine exponentielle Verteilung befolgen, d. h. dass das Verderben der Maschine unabhängig davon ist, seit wann sie sich in Betrieb befindet. Die Annahme ermöglicht die Lösung des Problems auch für den Fall, dass die Maschine in der ausschusserzeugenden Periode Ausschuss nur mit einer Wahrscheinlichkeit p erzeugt. Diese Wahrscheinlichkeit p kann konstant sein, der irgendeine Zufallsveränderliche mit bekannter Verteilungsfunktion.

BESZÁMOLÓ AZ UZSAI KŐBÁNYÁBAN VÉGZETT KÖTÖRÉSI ÉS ENERGIAMÉRÉSI KÍSÉRLETEKRŐL

ARATÓ MÁTYÁS

Összefoglalás

A dolgozatban a következő feladatot oldjuk meg: hogyan kell kötörsénel az utántörő pofanyílását megválasztani, hogy a zúzáshoz felhasznált energia minimális legyen, feltéve, hogy a 65 mm fölé tört kőzetet vissza kell szállítani az utántörőre s újra meg kell törni.

Intézetünk már régebben foglalkozik aprítási folyamatokkal, elsősorban a kötörsé folyamatával. Az első dolgozat, amelyet ezzel kapcsolatban *Rényi Alfréd* írt, [1] a zúzásnál előálló kötörmelék eloszlásának logaritmikus normális-voltára vonatkozó *A. N. Kolmogorovtól* származó eredmény egyszerűsítésével foglalkozik és meghatározza a zúzáshoz szükséges energiát. Ennek folytatásaként *Székely Gábor* az Intézet Közleményeiben megjelent dolgozata [2] foglalkozik a pofás-törők optimális (a zúzáshoz szükséges energiát minimalizáló) beállításának kérdésével. Ezen eredmények ellenőrzése és mérési adatokkal való kiegészítése céljából 1953. június és július hónapokban méréseket végeztünk az »Uzsai Kőbánya« vállalatnál.

Előtörőn végzett kísérleteknél 1 csille anyag töréséhez szükséges energia mérése a motor elé helyezett kilowattóra számláló fordulatának számlálásával, zúzásidejének mérése stopperórával történt. A mérési eredményeket mint a pofanyílás függvényét vizsgáltuk. Az általános szóhasználatnak megfelelően pofanyílás alatt a törőpofák bordaéleinek mm-ben mért távolságát értjük azok legszűkebb helyzetében. (Ez 30 mm-rel kevesebb, mint amit bordaéltól bordatőig mérünk.) Egy pofanyílás mellett 15–25 csille kőzet zúzásához felhasznált energiát mértük s ezen értékeknek vettük a középértékét. A középérték szórása 75 mm-es pofanyílásnál 2,73%, 85 mm-es pofanyílásnál 6,43%, 87 mm-es pofanyílásnál 4,31%, 90 mm-es pofanyílásnál 6,20%. Azt találtuk, hogy az E átlagos energia és p pofanyílás közötti kapcsolat

$E = \frac{c}{p^a}$ alakú képlettel közelíthető. Kiegyenlítő számítás segítségével —

ha E -t kwó-ban mérjük s a p pofanyílást mm-ben — $a = 2,237$ és $c = 10^4 \cdot 1,8436$ értékeket kaptuk. A továbbiakban $E(p)$ -vel jelöljük a kwó-ban mért 1 csille anyag zúzásához felhasznált átlagos energiát, p -vel a mm-ben mért pofanyílást. A következő táblázat a mérési eredményeket s a kiegyenlítéssel nyert értékeket adja:

I. táblázat

p mm	Mért érték kwó	$E(p)$ kwó
75	1.138	1,1260
85	0,911	0,8767
87	0,904	0,8368
90	0,788	0,7820
92,5	0,680	0,7403
93,5	0,769	0,7245
94,5	0,698	0,7093
96,5	0,659	0,6802
100	0,610	0,6334
103	0,581	0,5970

A zúzáshoz felhasznált energiára a Rittinger-törvény, a logaritmikus normális szemcseeloszlás, valamint az eloszlásban szereplő a paraméternek, mint a pofanyílás lineáris függvényének segítségével $\frac{C}{p}$ alakú függvényt kapunk

(lásd Rényi A. [1] és Székely G [2]). Eredményünk ettől eltér, s ez abból adódik, hogy a törési folyamat rövid időtartama miatt a logaritmikus normális eloszlással való közelítés nem pontos az eloszlásgörbe alsó szakaszán, másrészt a Rittinger-törvény olyan megfogalmazásban, hogy a felhasznált energia a keletkező felületkülönbségnek lineáris függvénye nem érvényes minden körülmények között pontosan. Ezeket a kísérleteket nem a Rittinger-törvény igazolására végeztük el, mert ahhoz sokkal pontosabb eszközökre s kísérletekre lenne szükség. Megjegyezzük, hogy az irodalomban szerepelnek hasonló megfigyelések és eredmények, amelyek szintén azt fejezik ki, hogy az energia a pofanyílásnak $\frac{C}{p^a}$ alakú függvénye, ahol $a \neq 1$.

Mértük az egy csille anyag zúzásához szükséges időt is, másodpercekben a pofanyílás függvényében ; ezeket az adatokat a következő táblázat tünteti fel:

II. táblázat

p mm	t (zúzásidő) mp.
75	50,9
85	49,9
87	47,8
90	49,65
92,5	43,7
93,5	43,5
94,5	43,0
96,5	42,2
100	45,75
103	39,1

Utántörőn energiamérést 22 és 38 mm-es pofanyílás mellett végeztünk. A zúzott anyag mennyiségének mérését a szállítószalag sebességének s az 1 méteren szállított anyag mérésének segítségével végeztük.

1 csille anyag (2225 kg) zúzásához felhasznált energiaértékek kwó-ban a következők :

22 mm-es pofanyílás	1,3794 kwó
38 « «	0,8585 «
22 « pofanyílásnál a törő teljesítménye	90 tonna kő/óra
38 « « « «	140 « «

Mind előtörőnél, mind utántörőnél a zúzott anyagból mintát vettünk s megrajzolva a súlyszerinti eloszlásgörbéket meghatároztuk planiméter segítségével az első és második momentumokat, melyeket a következő táblázatban tüntetünk fel :

III. táblázat

Bazalt

p	M_1	M_2
22	34,11	1529,8
38	48,12	2731,4
85	62,31	4926,0
93	73,29	7148,5
94	66,55	5726,0
100	73,39	7019,5

Ezek alapján feltételezve, hogy a szemnagyság szerinti eloszlás logaritmikus normális, meghatároztuk az $a = \frac{M_1^8}{M_2^{7,2}}$ és $b = \ln \frac{M_2}{M_1^2}$ paraméterek értékét.

Mivel b -re közelítőleg konstans értéket nyertünk, M_1 és M_2 -re, $M_1 = c_1 \sqrt{p}$ és $M_2 = c_2 p$ alakban végeztünk kiegyenlítő számítást. Ezen az úton a $c_1 = 7,2641$ és $c_2 = 67,175$ értéket kaptuk, s ezek segítségével

$$a = 3,1207 \sqrt{p}, \text{ és } b^2 = 0,2414 \text{ adódott.}$$

A következő táblázatok M_1 és M_2 mért és kiegyenlítéssel nyert értékeit adják :

IV. táblázat

p	M_1 Mérték érték	$M_1 = c_1 \sqrt{p}$	M_2 Mérték érték	$M_2 = c_2 p$
22	34,11	34,07	1529,8	1477,9
38	48,12	44,78	2731,4	2552,7
85	62,31	66,97	4926,0	5709,9
93	70,29	70,05	7148,5	6247,3
94	66,55	70,43	5726,0	6314,5
100	72,39	72,34	7019,0	6717,5

Eredményeink, mint már az előbbieken is említettük, nem egyeznek meg a régebbi mérésekkel; ennek oka, hogy azokat más jellegű törőkön végzett kísérletek alapján nyerték, másrészt a logaritmikus normális eloszlással való közelítés az eloszlásgörbék alsó szakaszán nem jó. Az, hogy M_1 a pofanyílásnak nem lineáris függvénye, könnyen belátható abból, hogy p bizonyos értékén túl M_1 állandó lesz, mivel a törőbe kerülő közetet igen nagy pofanyílás esetén a törő már nem töri meg, s ezt mindeddig figyelmen kívül hagytuk.

Székelly Gábor [2] dolgozatában felvetette és megoldotta azt a problémát, hogyha két részletben törünk, hogyan kell az előtörő p_1 , ill. az utántörő p_2 pofanyílását megválasztani, hogy a zúzáshoz szükséges energiának s a p^* alá zúzott közet súlyának hányadosa minimális legyen.

A mérések alapján egy kissé módosított problémát vizsgálunk, külön tárgyaljuk az elő- és utántörő esetét. Figyelembe vesszük, hogy jelenleg az előtörő és az utántörőről a $p^* = 65$ mm alá tört anyagot használják fel.

Vizsgáljuk meg az 1 csille anyag zúzásához szükséges $E(p)$ energia s a 65 mm alá tört közet $S_1(p)$ részének hányadosát különböző pofanyílások mellett az előtörőn. 1 csille súlynyi anyagot egységnek véve a zúzás után 65 mm alá tört anyag

$$S_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} b a^3 e^{\frac{9b^3}{2}}} \int_0^{65} x^2 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \ln a}{b} \right)^2} dx$$

lesz, ezt az integrált a következő alakra hozhatjuk:

$$S_1(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{65}{a} - 3b^2}{b\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt.$$

$S_1(p)$ értékét táblázatból meghatározva $\frac{E(p)}{S_1(p)}$ -re a következő értékeket kapjuk:

V. táblázat

Pofanyílás	$E(p)$ kwó	$S_1(p)$	$\frac{E(p)}{S_1(p)}$
105	0,5745	0,4880	1,177
100	0,6334	0,5078	1,247
95	0,7018	0,5286	1,328
90	0,7820	0,5504	1,421
85	0,8767	0,5733	1,529
80	0,9897	0,5974	1,657
75	1,126	0,6226	1,809
70	1,2926	0,6484	1,994

Innen látható, hogy az $\frac{E}{S_1}$ hányados a vizsgált intervallumban a pofanyílásnak monoton csökkenő függvénye. Mivel a törő nem törhet 100–105 mm-es pofanyíláson felül a törés állandó megakadása nélkül, így ilyen pofanyílás mellett lesz »leghatásosabb« a törés.

Utántörőnél megváltozik a helyzet, u. i. a 65 mm fölé tört kőzetet vissza kell szállítani az utántörőre s újból meg kell törni. 1 csille anyagnak szállítószalaggal a vibrátorhoz (rostákhoz) és onnan a törőhöz való visszaszállításhoz kb. 0,75 kwó energia szükséges. (Természetesen ez az érték a szállítószalag hosszától, emelési magasságtól függő állandó, így üzemenként változó.)

$E(p)$ -vel jelöltük 1 csille anyag egyszeri zúzásához szükséges energiát; ezt a mennyiséget mértük meg. Azonban, ahhoz hogy egy csille kőzetet teljes egészében 65 mm alá törjünk, több energia szükséges, mivel a 65 mm fölé tört kőzetet mindig vissza kell szállítani az utántörőre s újból meg kell törni. Ha egy csille anyagnak 65 mm alá való zúzásához szükséges energiát $\varepsilon(p)$ -vel jelöljük (s kwó-ban mérjük $E(p)$ -vel együtt), úgy

$$\varepsilon(p) = E(p) + 0,75 \Phi(p) + E(p) \Phi(p) + 0,75 \Phi(p)^2 + E(p) \Phi(p)^2 + \dots,$$

ahol

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\ln \frac{65}{a}}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

$\varepsilon(p)$ két geometriai sor összege, melyek nyilvánvalóan konvergensek; ennél fogva az

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 - \Phi(p)} + 0,75 \frac{\Phi(p)}{1 - \Phi(p)}$$

összefüggést kapjuk.

Ennek a függvénynek keressük a minimumát, ami létezik, mivel a függvény pozitív és $p \rightarrow 0$, valamint $p \rightarrow \infty$ esetén végtelenhez tart.

Differenciálás helyett megmutatjuk ezen $\varepsilon(p)$ függvény értékeinek táblázatát:

VI. táblázat

Pofanyílás mm	$\varepsilon(p)$ kwó
15	2,2460
20	1,7488
25	1,4710
30	1,3030
35	1,1992
40	1,1348
45	1,0975
50	1,0791
55	1,0752
60	1,0823

Az $\varepsilon(p)$ görbét nemcsak 65, hanem 45, 55, 75, 85 mm-es leválasztás mellett is meghatároztuk.

Az eredmény azt mutatja, hogy a függvények jóval nagyobb pofanyílás mellett veszik fel a minimumukat, mint amilyen pofanyílással a jelenlegi utántörők dolgoznak. Ez azt jelenti, hogy 100 csille anyag 65 mm alá való töréséhez 22 mm-es pofanyílás mellett 55 kwó-val több energia szükséges, mint 45 mm-es pofanyílás mellett. *Ennek figyelembevétele évente (8 óras műszak 400 csille termelése és 300 munkanap mellett) 66 ezer kwó energiamegtakarítást jelentene egy törőműnél.*

Nagyobb pofanyílás esetén a törők teljesítménye is jóval nagyobb lesz óránként s ez is a nagy pofanyílással való törés mellett szól.

IRODALOM

- [1] *Rényi Alfréd*: Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag 2. 1950.
 [2] *Székelly Gábor*: A kőtörés energiaszükségletének minimalizálása az elő- és utántörők legcélszerűbb beállításával. A. M. I. Közleményei I.

ОПЫТЫ ПО ЛОМКЕ КАМНЯ И ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ, ПРОВЕДЁННЫЕ В УЖАЙСКОМ КАМЕННОМ КАРЬЕРЕ

М. Арато

Резюме

В работе решается следующая задача: как выбирается открытие шек дробилки для дробления с целью минимального расхода энергии в процессе толчения, предполагая, что породу, раздробленную на куски, крупнее 65 мм., нужно отвезти обратно на дробилку и подвергать вторичному дроблению.

BERICHT ÜBER KRAFTBEDARFSVERSUCHE IM STEINBRUCHE UZSA

M. ARATÓ

Zusammenfassung

Die Abhandlung löst folgendes Problem: wie ist die Quetschbackenöffnung der Nachbrechmaschine zu ermitteln um die beim Brechen angewandte Kraft minimal zu halten, wobei angenommen wird, dass das Gestein von mehr als 65 mm Grösse zur Brechmaschine zurückgeführt und noch einmal gebrochen werden wird.

GÉPIPARI ÜZEMEK ELEKTROMOS ENERGIASZÜKSÉGLETÉNEK MEGHATÁROZÁSA

SORS LÁSZLÓ

Összefoglalás

A szerző Rényi A. és Szentmártony T. az Intézet közleményei 1952. évi kötetében megjelent tanulmányához kapcsolódva a konstansok meghatározására vonatkozó mérések eredményeit és a mérések kapcsán tapasztalt nehézségeket ismerteti. A nehézségek ellenére az eddigi mérések alapján nyert képletek elég jól megközelítik a valóságot.

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei első kötetében jelent meg Rényi Alfréd és Szentmártony Tibor dolgozata »Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása« címmel. E tanulmányban a szerzők a valószínűségszámítás alkalmazásával, ennek az igen lényeges, de az irodalomban mindeddig elhanyagolt kérdésnek megadták a matematikai megoldását. E tanulmány végeredményét

$$t = P + \frac{II}{\sqrt{n_e}}$$

képlettel lehet összefoglalni, mely képletben

$$t = \frac{N_{sz}}{N_n}; \text{ a szükségleti tényezőt,}$$

N_{sz} az üzem, vagy létesítmény elektromos igénybevételeének csúcsértékét (kw),

N_n az üzembrész, vagy létesítmény beépített elektromos fogyasztóinak névleges összegét (kw),

P és II meghatározandó konstansokat és

n_e az »effektív« gépszámot jelenti.*

* Az effektív gépszám definíciója a következő: ha f_1, f_2, \dots, f_n jelentik az egyes

gépek átlagos fogyasztását működés esetén, akkor $n_e = \frac{\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)^2}{\sum_{k=1}^n f_k^2}$. Az effektív gépszám min-

fdig kisebb a valódi gépszámnál, $n_e < n$, kivéve azt az esetet, amikor a gépek átlagos fogyasztásai egyenlők, $f_n = f$, akkor $n_e = n$.

A képlet gyakorlati alkalmazásba vételének előfeltétele a P és II konstansok meghatározása. Ezeknek a szerzők két összetartozó adatpárból való meghatározását javasolják. A Gépipari Tervező Iroda a Kohó- és Gépipari Minisztérium Normaintézetének segítségével mérési sorozatot kezdeményezett a konstansok meghatározására. Az alábbiakban a mérések közben felmerült nehézségekről és a mérés eredményeiről kívánunk beszámolni.

Mindenekelőtt, tekintettel a mérések várható bizonytalanságára, szükségesnek látszott, hogy a konstansok két adatpár helyett több adatpárból legyenek megállapítva. A mérések előrelátott bizonytalansága a gyakorlat során beigazolódott. Noha a méréseket 4 üzemi forgácsoló részlegeiben végeztük el, ezen az alapon kihozott eredményeket nem tekinthetjük véglegesnek és feltétlenül szükségét látjuk a mérések mielőbbi folytatásának és az eddig ideiglenesen kiszámított konstans értékek esetleges helyesbítésének.

A mérési sorozat megszervezésének első nehézsége a mérésre alkalmas üzemek, illetve üzemszerek kiválasztásánál volt. Miután a cél az első lépésben a forgácsoló üzemek szükségleti tényezőinek meghatározása volt, olyan üzemeket kellett a mérés lefolytatására kijelölni, melyekben a forgácsoló üzemrészek külön elektromos mérőberendezéssel vannak ellátva. A gyakorlat azt mutatta, hogy bár sok üzemünkben egyes üzemszereknek már van külön mérőórája, ugyanarra van kapcsolva az üzemszékben működő daru, vagy elektromos kemence, vagy egyéb nem-forgácsoló berendezés is. Miután pedig ezeknek a várható szükségleti tényezője lényegesen eltér a forgácsolás szükségleti tényezőjétől, igyekezni kellett ezt a zavaró körülményt minél teljesebb mértékben kiküszöbölni. A mérésekre beállított üzemeknél ez, ha nem is teljes mértékben, de nagyrészt sikerült.

A következő nehézség N_{sz} (az üzemszék elektromos szükségletének »csúcsértéke«) meghatározásánál volt.

Az elmélet szerint kétségen kívül, a csúcsértéknek valóban csúcsértéknek kell lennie. Ez azonban azt jelenti, hogy a megfigyeléseknek hosszú hónapokon, esetleg éveken át kellene tartani, mert semmiféle biztosíték arra nézve nincsen, hogy a mérés napjain valóban csúcsigénybevétel történik. Éppen ellenkezőleg, az üzemi naplókhoz és az elektromos energiára vonatkozó feljegyzésekből az derült ki, hogy az elektromos áramfogyasztás rendkívül ingadozó, melynek egyik oka sok vállalatunknál a szokásos hóvégi »rohammunka«, mely feltételezhető módon nemcsak a fogyasztásban, hanem az igénybevételnél is érezteti a hatását.

A mérések napjait ugyan úgy választottuk meg, hogy az egész üzem kihasználási tényezője jó legyen, azonban nem mondhatjuk azt, hogy e napokon a gyakorlatilag várható *legmagasabb* fogyasztás és igénybevétel történt. Így jutottunk el ahhoz a kérdéshez, hogy helyes-e és elegendő-e néhány napi mérés alatt tapasztalt csúcsot a számításokban figyelembe venni, vagy a méréseket hosszú ideig kell-e folytatni. Nem kétséges ugyanis, hogy a szükségleti tényezőt rendkívül sok körülmény befolyásolja, így például az időjárás is, mert kétségtelen, hogy hűvös téli napok reggelén, az üzem beindításakor, mikor még a gépekben lévő kenőanyagok sűrűek, lényegesen több elektromos energiára van egyidejűleg szükség, mint meleg napokon, a műszak közepén, vagy végén. Ha ezt a körülményt is figyelembe kívántuk volna venni, úgy a méréseknek nem kevesebb, mint legalább egy évig kellett volna tartani. Meggondolásaink alapján azonban erre nincsen szükség, mert a szükségleti tényezőt az elosztó-állomás (transzformátor-állomás) kiválasztásánál

és a vezetékhálózat méretezésénél kívánjuk felhasználni és így (az év néhány napján) rövid időre beálló, szokottnál magasabb csúcsértékek a gyakorlat szempontjából alig érdekesek, mert tudvalevőleg a transzformátorok csak bizonyos — elég korlátozott számú — méretben készülnek és a tervező nyilvánvalóan a kiszámított végeredmény közelében fekvő, de mindenképpen *nagyobb* (és nem kisebb) transzformátort fog a létesítménynél alkalmazni. Feltételezhető tehát, hogy a kiválasztott transzformátor az említett rövid ideig tartó túlterheléseket minden zavar nélkül ki fogja bírni. Ugyanez a helyzet a vezetékek méretezésénél is, melynél legfeljebb a számítottnál néhány fokkal nagyobb melegedés fog bekövetkezni. Mellesleg megjegyezve, a vezetékek várható hőfokainak kiszámítása igen labilis alapon nyugszik és a számításhoz szükséges konstansok: hőszugárzás, hőátadás, a környezet hőmérséklete stb. is igen sok bizonytalanságot rejtenek magukban. Mi az elmondottak alapján úgy határoztunk, hogy csúcsérték gyanánt a mérési napokon legfeljebb két esetben bekövetkezett negyedórás átlagban mért legnagyobb értékeket fogjuk tekinteni. Hogy azonban a gyakorlat ezt a feltevést igazolni fogja-e, erre nézve még sok mérést kellene végezni.

A mérések végeredménye gyanánt, az említett módszer szerint kiszámítva

$$P = 0,182$$

$$\Pi = 0,271 \text{ adódott.}$$

Az ily módon nyert konstansokkal ellenőrzés gyanánt kiszámítottuk az üzemszám «elméleti» szükségleti tényezőjét és ebben a valóságtól 6% eltérést találtunk. Ezek az eredmények — amennyire ily kevés számú mérés alapján ítéletet mondani lehet — jóknak mondhatók.

Nagy hiányosságai voltak a lefolytatott mérésnek, hogy csak forgácsoló üzemekre vonatkoztak és így még ma sem tudjuk a képletet egyéb üzemekre, például melegüzemekre, sajtoló üzemekre, de hegesztőgépekre, darukra és egyéb berendezésekre sem alkalmazni. A konstansokat tehát ezekre nézve is meg kellene határozni, hogy végre hazai viszonylatban is megfelelő és a tervezés számára használható képlet rendelkezésre álljon.

Nem nyújtottak a mérések felvilágosítást arra vonatkozóan sem, hogy mit jelentenek a szükségleti tényezők szempontjából az egycélú gépek alkalmazása. Ipari fejlődésünk során tudvalevőleg mindinkább rátérünk az egycélú gépek munkábaállítására, mely a termelés mennyiségi és minőségi növelését segíti elő önköltség csökkentése mellett, de alkalmazásuk az elektromos szükségleti tényezőt minden bizonnyal meg fogja emelni. Mindazokban az üzemekben, melyekben a mérések folytak, ilyen egycélú gépek vagy egyáltalán nem, vagy csak egész elenyésző számban voltak találhatók és így az ottani mérések eredményei nem adnak megnyugtató képet a tervezés alatt lévő egycélú gépekkel jobban ellátott üzemek szükségleti tényezőjére vonatkozóan.

Nem volt mód továbbá a gyártás tömegszerűségének és az elektromos szükségleti tényező összefüggéseinek vizsgálatára sem. Nyilvánvaló ugyanis, hogy most tervezés alatt lévő üzeinkben a gyártási technológia, a kombinált szerszámok alkalmazása, a gépek kihasználása nagyobb fokú lesz, mint amilyenekben a méréseket folytatni tudtuk.

A fentieket szükségesnek tartottuk elmondani, hogy rámutassunk azokra a nehézségekre, melyek néha a legszebben kidolgozott elméleti képletek gyakorlati alkalmazásbavétele elé tornyosulnak.

Gyakorlati konzekvenciaként azt a tanulságot kell levonni, hogy az elmélet és a gyakorlat között gyakran még nagy úr táton, melyet áthidalni a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének egyik feladata, melyben azonban komoly segítségünkre kell legyenek a karöltve dolgozó technikusok és mérnökök.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ЗАВОДОВ

Л. Шорш

Резюме

Автор, присоединяясь к статье А. Реньи и Т. Сентмартони, в I. Томе знакомит с результатом измерений для определения постоянных и описывает встречающиеся в связи с измерениями трудности. Несмотря на эти трудности, формулы, полученные на основании проведенных до сих пор измерений, довольно близки к истине.

BESTIMMUNG DES ELEKTRISCHEN ENERGIEBEDARFES MASCHINENINDUSTRIELLER BETRIEBE

L. SORS

Zusammenfassung

Im Anschluss an die im Bande 1952 erschienene Abhandlung von A. Rényi und T. Szentmártony erörtert der Verfasser die Ergebnisse der zur Bestimmung der Konstanten durchgeführten Messungen und die damit verbundenen Schwierigkeiten. Trotz letzterer stimmen die auf Grund der bisherigen Messungen berechnete Formeln mit der Wirklichkeit gut überein.

KIEGÉSZÍTÉS

»A GALTON-FÉLE DESZKÁVAL KAPCSOLATOS NÉHÁNY PROBLÉMÁRÓL« CÍMŰ DOLGOZATHOZ

MEDGYESSY PÁL

Összefoglalás

A kiegészítés a következőkből áll:

1. A Galton-féle deszka működésére vonatkozó közelebbi vizsgálatok összefoglalása az irodalom alapján. Ezeknek az a lényege, hogy egyszerű szögekből készített Galton-deszkán egy golyó jobbra (balra) térese nem független attól, ami a megelőző szögnél történt. Ennek következtében a golyóval történő események Markov-láncot alkotnak. Az eredő eloszlás közelítőleg normális lesz, csak nagyobb szórással, mint az események függetlensége esetében. Ha a szögeket csatornák helyettesítik, (mint az Intézet készülékén), az események függetlenek.

2. A dolgozat III. tételének általánosítása: Tegyük fel, hogy egy golyó az i -ik tartályba p valószínűséggel jut ($i = 0, 1, \dots, N$) Legyen a készülékbe jutott golyók száma ξ valószínűségi változó és jusson az i -ik tartályba ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) η_i golyó. Ekkor érvényes a következő tétel: Az η_i -k akkor és csak akkor függetlenek, ha ξ Poisson-eloszlású.

Alábbiakban néhány megjegyzéssel kívánjuk kiegészíteni a címben említett dolgozatot: 1. A Galton-féle deszka eredeti alakjában egyszerű szögekből áll, nem csatornákat képező ékekből. Észrevették, hogy az ilyen Galton-deszkával kapott eloszlás szórása az elméletileg kiszámított szórásnál mindig nagyobb. Főleg *W. Seitz—K. Hamacher—Odenhausen* vizsgálataiból [1] kiderült, hogy az ilyen Galton-deszkán a golyók jobbra (balra) téresei, mint események, nem függetlenek, hanem Markov-láncot alkotnak: Ha egyik sorban a golyó jobbra (balra) tér el, ennek megfelelő sodrást kap, amely még akkor is megvan, amidőn a következő sor megfelelő szögéhez ért a golyó, és így annak a valószínűsége, hogy itt is jobbra (balra) tér el, nagyobb mint az ellentett eseményé. Az ezzel a (kísérletileg is igazolt) alapfeltevéssel kiszámított eredő eloszlás szintén tart a normálishoz, csak szórása nagyobb, mint az események függetlenségének esetében. (Ezt először *G. Schulz* tárgyalta [2].) Ez a nagyobb szórás megfelel a kísérletileg kapott értékeknek.

Az említett szerzők az események függetlenségét úgy érték el, hogy a szögekről leguruló golyó szögekből kiképezett csatornában gurult a következő szöghöz. A csatornában a golyó pergése lecsillapodott. Látható, hogy Intézetünk készülékén ugyanez a helyzet és így az események függetlensége biztosított.

A szögek (ékek) alakjától függően tehát binomiális eloszlás, vagy Markov-lánc szemléltetésére alkalmas a Galton-féle deszka.

Az alkalmazások terén megemlítjük még, hogy *F. Bernstein* a készüléket bizonyos módosítással integráltranszformáltak közelítő előállítására használta fel [3].

2. A dolgozat III. tétele a következőkép egészíthető ki: Tegyük fel, hogy egy $N + 1$ tartályú Galton-deszka ékein (pl. a beállítás folytán) a jobbra (balra) térés valószínűsége általában nem $\frac{1}{2}$. Ekkor a golyók eloszlása a tartályokban már nem lesz binomiális; általában csak annyit mondhatunk, hogy egy golyó az i -ik tartályba p_i valószínűséggel jut ($i = 0, 1, \dots, N$,

$$\sum_{i=0}^N p_i = 1).$$

Az így módosított Galton-deszkára öntött golyók száma ξ legyen valószínűségi változó, $P(\xi = k) = Q_k$ ($k = 0, 1, \dots$) és jusson az i -ik tartályba γ_i számú golyó. Fennáll a következő

Tétel: Az γ_i ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó.

A tétel a fenti modellől függetlenül is érdekességgel bír. *Bizonyítás:* Foglalkozzunk először a szükségesség kimutatásával. Legyen $P(\xi = k) = Q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ($k = 0, 1, \dots$), $\lambda > 0$ konstans,

$$P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1} | \xi = k)$$

annak a valószínűsége, hogy a $\xi = k$ feltétel mellett az i -ik ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) tartályba ν_i golyó jut $\left(\sum_{i=0}^N \nu_i = k \right)$,

$$P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1})$$

pedig ugyanezen esemény valószínűsége a $\xi = k$ feltétel nélkül. Nyilván

$$P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1} | \xi = k) = \frac{k!}{\nu_0! \dots \nu_{N-1}! (k - \nu_0 - \dots - \nu_{N-1})!} \times \\ \times p_0^{\nu_0} \dots p_{N-1}^{\nu_{N-1}} (1 - p_0 - \dots - p_{N-1})^{k - \nu_0 - \dots - \nu_{N-1}}$$

A teljes valószínűség tételéből következik, hogy

$$P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1}) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) \cdot P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1} | \xi = k),$$

amibe a vonatkozó valószínűségek kifejezéseit beírva, egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$P(\gamma_0 = \nu_0, \dots, \gamma_{N-1} = \nu_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} e^{-\lambda p_r} \frac{(\lambda p_r)^{\nu_r}}{\nu_r!},$$

vagyis egyenlő $N - 1$ számú, csak az egyes η_i -ktől függő Poisson-eloszlás szorzatával, tehát az η_i -k függetlenek.

Lássuk most az elégségesség bizonyítását. Ha $P(\eta_i = \nu_i)$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) annak a valószínűsége, hogy az i -ik tartályba ν_i golyó jut, a tételben kimondott függetlenség folytán:

$$P(\eta_0 = \nu_0, \dots, \eta_{N-1} = \nu_{N-1}) = P(\eta_0 = \nu_0) \dots P(\eta_{N-1} = \nu_{N-1}),$$

vagyis, egyelőre ismeretlen $P(\xi = k) = Q_k$ -val:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \frac{k!}{\nu_0! \dots \nu_{N-1}! (k - \nu_0 - \dots - \nu_{N-1})!} \times \\ & \times p_0^{\nu_0} \dots p_{N-1}^{\nu_{N-1}} (1 - p_0 - \dots - p_{N-1})^{k - \nu_0 - \dots - \nu_{N-1}} = \\ & = \prod_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \frac{k!}{\nu_r! (k - \nu_r)!} p_r^{\nu_r} (1 - p_r)^{k - \nu_r}. \end{aligned}$$

Ebből kell Q_k -t meghatároznunk. E célból vegyük a $\min(-p_i) + p_i < p_i \nu_i \leq p_i$ -vel definiált ν_i valós számokat. Szorozzuk előző egyenlőségünket $v_0^{\nu_0} \dots v_{N-1}^{\nu_{N-1}}$ -gyel és összegezzünk az összes $\nu_i = 0, 1, 2, \dots$ ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) értékekre; egyszerű átalakítások után a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} Q_k [p_0(v_0 - 1) + \dots + p_{N-1}(v_{N-1} - 1) + 1]^k = \\ & = \prod_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\infty} Q_k [p_r(v_r - 1) + 1]^k \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk, amelyben a sorok a Q_k és v_r -ekre tett feltevések folytán

konvergensek és amely $p_r(v_r - 1) = x_r$ és $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (1 + z)^k$ ($0 \geq z > -1$)

jelölésekkel a $\Phi(x_0 + \dots + x_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} \Phi(x_r)$ -be megy át. Ha ezt a függ-

vényegyenletet meg tudjuk oldani a $(-1, 0]$ intervallum tetszőleges kis rész-intervallumán, megoldása, $\Phi(z)$ ismeretében a Q_k -k meghatározhatók. A függvényegyenlet nem azonos a Cauchy-félével, mert az x_i -ik nem a $(-\infty, \infty)$ -en mozognak, ezért külön kell tárgyalnunk. Követjük a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásának szokásos menetét [4].

Az $I = (\min(-p_i), 0]$ intervallumba eső x_i -kre a függvényegyenlet feltételeink folytán nyilván fennáll; erre az intervallumra fogjuk megoldani.

Ha $y_i \in I$ és $\sum_{i=0}^{N-1} y_i \in I$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$), az I -n értelmezett $\Phi(z)$ -re

$$\Phi(y_0 + \dots + y_{N-1}) = \prod_{r=0}^{N-1} \Phi(y_r); \text{ a } \Phi(z)\text{-t definiáló egyenletből nyerhető}$$

$\Phi(0) = 1$ segítségével könnyen bebizonyítható, hogy akárhány összeadandónál is fennáll a függvényegyenlet. Most már teljesen az idézett munkát követjük, csak a feltételeket választjuk meg dolgozatunk viszonyainak megfelelően. Így $\Phi(z) > 0$ (ha $\Phi(z) \neq 0$) kimutatásánál $\Phi(x)$ -et $\Phi\left[\left(x - \frac{1}{k}\right) + \frac{\alpha}{k}\right]$

alakban írjuk fel, ahol k oly nagy egészszám, hogy $x - \frac{\alpha}{k} \in I$; $\alpha \in I$, feltevés szerint, s így $\frac{\alpha}{k} \in I$, tehát a függvényegyenlet alkalmazható; továbbá $\alpha - \frac{\alpha}{k}$ -k

összegére, bontva fel $\Phi(\alpha) = 0$ -ból $\Phi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 0$ is következik, s ezzel az idézett helyen található bizonyítás minden szükséges elemét megkaptuk.

A későbbiekben az az eltérés, hogy $\Phi(x) = \left[\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)\right]^{mx}$ (m rögzített egészszám, $-\frac{1}{m} \in I$, $x \in I$) fennállását bizonyítjuk be, először $x = -\frac{p}{q}$ -ra ($p, q > 0$, egész), $\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)$ -ben $\left(-\frac{1}{m}\right)$ -et, $\Phi\left(-\frac{p}{q}\right) = \Phi\left(-\frac{mp}{mq}\right)$ -ban pedig $\left(-\frac{mp}{mq}\right)$ -t bontva fel $\left(-\frac{1}{mq}\right)$ -k összegére, különben pedig az idézett bizonyítást alkalmazva; irracionális x -re is ugyanúgy terjesztjük ki, mint ott található; végül tehát azt kapjuk, hogy

$$\Phi(z) = \left[\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)\right]^{mz} = e^{\lambda z} \quad (z \in I, \lambda \text{ valós})$$

aminek segítségével Q_k -ra a $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (1+z)^k$ -ból a

$$Q_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

kifejezést kapjuk. Minthogy Q_k valószínűség, $\lambda > 0$, vagyis a ξ Poisson-eloszlású. Ezzel az elégségességet is bebizonyítottuk.

IRODALOM

1. W. Seitz—K. Hamacher—Odenhausen: Naturw. 22. (1934) 494. o. (cím nélkül a »Kurze Originalmitteilungen« rovatban).
2. G. Schulz: Zur Theorie des Galtonschen Brettes. Zs. Phys. 92. (1934) 747. o.
3. F. Bernstein: Verallgemeinertes Galtonbrett zur Durchführung von Funktionaltransformationen. Zs. Phys. 77. (1932) 104. o.
4. L. Pl. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei. Bp. 1951. I. 387. o.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ
«О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СВЯЗАННЫХ С ПРИБОРОМ ГАЛЬТОНА»

П. Меддешпи

Резюме

Дополнение содержит:

1. Резюме подробных исследований относительно работы прибора Гальтона на основе относящейся сюда литературы: На приборе Гальтона, имеющем простые штифты, отклонение шарика направо (налево) зависит от события на предыдущем штифте. Вследствие этого события, происходящие шариками, образуют цепь Маркова. Результирующее распределение является приблизительно нормальным, но оно имеет большую дисперсию, чем в случае независимости событий. Если штифты заменены канальцами (как на приборе Института), то события независимы.

2. Обобщение теоремы III. упомянутой статьи: Предположим, что шарик попадает в i -й резервуар с вероятностью p_i ($i = 0, 1, \dots, N$). Пусть число ξ шариков, попавших на прибор, является случайной величиной и пусть в i -й резервуар попадает η_i шариков ($i = 0, 1, \dots, N-1$). Тогда имеет силу следующая теорема: Случайные величины η_i независимы тогда и только тогда, если случайная величина ξ имеет распределение Пуассона.

A SUPPLEMENT TO THE PAPER «SOME PROBLEMS CONCERNING GALTON'S
APPARATUS»

P. MEDGYESSY

Summary

In supplementing his paper mentioned in the title

1. author reviews the data in the literature referring to close investigations concerning the operation of Galton's apparatus. In essence, he arrives at the result that on an apparatus simply employing nails the deviation of the ball to the right (left) at a certain nail is not independent of what has happened at the nail before it, in consequence whereof the events happening to the ball form a Markov chain. The resulting distribution will be approximately normal but with a standard deviation larger than that in the case of independent events. If ducts are employed in place of nails (this is the case in the apparatus of the Institute), the events will be independent.

2. Author further generalizes his theorem III as follows: Let us suppose a ball arrives to the i -th receptacle with probability p_i ($i = 0, 1, \dots, N$), the number of balls filled into the apparatus is a random variable ξ , and η_i ($i = 0, 1, \dots, N-1$) balls arrive in the i -th receptacle. Then the η_i -s are independent if and only if ξ has a Poisson distribution.

KIEGÉSZÍTÉS JUVANCZ IRÉNEUSZ DR ÉS LIPTÁK TAMÁS:
»A MATEMATIKAI STATISZTIKA ORVOSI-BIOLÓGIAI
ALKALMAZÁSÁNAK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL« C. DOLGOZATHOZ

Kiegészítésünk a dolgozat 3. részéhez és a mellékelt táblázatokhoz kapcsolódik. Az irodalomban eddig ismeretes szignifikancia-vizsgáló módszerek mind egydimenziósak voltak, abban az értelemben, hogy az eltérés szignifikanciáját a mintákból meghatározott egyetlen érték (pl. t , χ^2 stb.) alapján ítélték meg. Közleményünk 3. részében ismertetett »kétoldali D « (röviden »DD«) kritérium azonban ebben az értelemben kétdimenziós szignifikancia-vizsgáló eljárás, mivel a szignifikanciát a mintákból meghatározott két érték, D^+ és D^- értékei alapján ítéli meg. Ezen új momentum kapcsán a szignifikancia szintjének megállapításánál egy sajátos probléma merül fel, mely a »mozgó« és »álló« szint kérdésével függ össze. Ezt a problémát egy külön közlemény fogja részletesen tárgyalni. E probléma tisztázása annak felismeréséhez vezetett, hogy az előző közleményben adott táblázatok bizonyos korrigálásra szorulnak. Megjegyezzük, hogy e korrekciók a táblázatok nagy részében nem lényegesek. A megfelelően átdolgozott táblázatok alább közöljük, az eredetinél jóval könnyebben kezelhető alakban.

Az eredeti közleményben külön módszert kellett alkalmaznunk azon esetekre, mikor a kísérlet előtt volt, illetőleg nem volt a várható eltérés irányára vonatkozólag előzetes hipotézisünk. Előzetes hipotézis esetére a »kétoldali D «-eljárást, ilyen hipotézis nélküli kísérletre az »abszolút D «-kritériumot ismertettük. Az új táblázatok segítségével mindkét esetben ugyanazt az eljárást alkalmazhatjuk, csak a szignifikancia megítélésére szolgáló D^+ és D^- értékek értelmezése lesz más a két esetben.

A táblázatokot öt különböző szintre dolgoztuk ki, mégpedig 10, 5, 2, 1 és 0,1%-os szintekre. Előzetes feltevés esetén az A) táblázatot, ilyen feltevés hiánya esetén pedig a B) táblázatot kell használnunk. A D^+ és D^- változók értelmezése e két esetben a következő: A) Az első esetben, amikor tehát még kísérlet előtt előzetes hipotézisünk volt a várható eltérés irányára vonatkozóan, a másikhoz képest »lemaradó«-nak feltételezett mintát »első«-nek számozzuk (ennek empirikus eloszlásfüggvényét jelöltük a közleményben $S_n(x)$ -szel, lásd 182. oldal), a másik mintát pedig »második«-nak (empirikus eloszlásfüggvénye $T_n(x)$). A (17) és (18) egyenleteknek megfelelően D^+ az elsőnek számozott minta empirikus eloszlásfüggvényének a másodiké felett elért »maximális kiugrása«-nak értéke, D^- pedig a másodiknak számozott minta empirikus eloszlásfüggvényének az elsőé felett elért »maximális kiugrása«-nak értéke. Ha a kísérlet során a várható eltérés irányára vonatkozó előzetes hipotézisünk valóban

Táblázat a »DD«-kritérium alkalmazásához.

A) Az eltérés irányára vonatkozó előzetes hipotézis esetén.

n	$\frac{P\%}{a}$	10	5	2	1	0,1	n	$\frac{P\%}{a}$	10	5	2	1	0,1	n	$\frac{P\%}{a}$	10	5	2	1	0,1
4	0 1—2	3	4	4	—	—	13	0 1—3 4	5 6 6	6 7 7	7 8 8	8 8 8	9 10 —	24	0 1—4 5 6—8	1 8 8 9	7 9 10 10	9 10 10 10	10 11 11 11	13 13 13 13
5	0 1 2	4 4	4 4	5 —	5 —	—	14	0 1 2—4 5	4 6 7 7	6 7 7 7	7 8 8 8	8 8 8 8	10 10 10 —	25	0 1 2 3 4—8	1 8 8 8 9	7 9 10 10 10	9 10 11 11 11	10 11 11 12 12	13 13 13 13 13
6	0 1 2	4 4 4	4 5 —	5 5 —	6 —	—	15	0 1 2—5	1 7 7	6 7 8	8 8 8	8 9 9	10 10 10	26	0 1 2 3—9	1 8 8 9	7 9 10 10	9 11 11 11	10 12 12 12	13 13 14 14
7	0 1 2 3	4 4 5 —	5 5 5 —	5 6 —	6 6 —	7	16	0 1—2 3—5	1 7 7	6 8 8	8 8 9	9 9 9	10 11 11	27	0 1—2 3—9	1 8 8 9	7 9 10 10	9 11 11 11	10 12 12 12	14 14 14 14
8	0 1—2 3	4 5 5	5 5 —	6 6 —	6 6 —	8	17	0 1 2—6	1 7 7	6 8 8	8 8 9	9 9 9	11 11 11	28	0 1 2—3 4—9	1 8 9 9	7 10 10 10	9 11 11 12	10 12 12 12	14 14 14 14
9	0 1 2 3	4 5 5 5	5 6 6 6	6 6 6 —	7 7 7 —	8	18	0 1—2 3—6	1 7 7	7 8 8	8 9 9	9 9 10	11 11 11	29	0 1 2 3 4—10	1 8 9 9 10	7 10 11 11 11	10 11 11 12 12	11 12 12 12 12	14 14 14 15 15
10	0 1—2 3 4	4 6 6 6	5 6 6 6	6 7 7 —	7 7 7 —	8	19	0 1—2 3—6	1 7 8	7 8 8	8 9 9	9 10 10	11 12 12	30	0 1 2 3 4—10	1 8 9 9 10	7 10 11 11 11	10 11 12 12 12	11 12 12 12 12	14 14 14 15 15
11	0 1 2 3 4	4 6 6 6 4	6 6 6 6 6	7 7 7 7 —	7 7 8 8 —	9	20	0 1 2—7	1 7 8	7 8 9	8 10 10	9 10 10	12 12 12	21	0 1 2—7	1 7 8	7 8 9	8 10 10	10 10 11	12 12 12
12	0 1 2—3 4	4 6 6 6	6 6 7 7	7 7 7 7	7 8 8 8	9	22	0 1 2—7	1 8 8	7 9 9	9 10 10	10 10 11	12 12 13	23	0 1—8	1 8 8	7 9 9	9 10 10	10 11 11	12 13 13

beigazolódott, úgy D^- értéke gyakran 0, de mindenesetre D^- értékénél kisebb lesz. — B) A második esetben, amikor tehát a kísérlet előtt előzetes hipotézisünk nem volt a várható eltérés irányára vonatkozóan, a mintákat tetszés szerint számozhatjuk meg »első«-nek és »második«-nak, de az empirikus eloszlásgörbék egymás felett elért maximális kiugrásai közül a nagyobbikat kell D^+ -nak, a kisebbiket pedig D^- -nak vennünk.

Táblázat a »DD« kritérium alkalmazásához
B) Az eltérés irányára vonatkozó előzetes hipotézis nélkül

n	P% a	10	5	2	1	0,1	n	P% a	10	5	2	1	0,1	n	P% a	10	5	2	1	0,1
4	0 1—2	4	4	—	—	—	12	0 1 2 3—4	6 6 7 7	7 7 7 7	7 8 8 8	8 8 8 8	10 10 10 10	22	0 1—7	7 9	8 10	10 11	11 11	13 13
5	0 1 2	4 4	5 —	5 —	5 —	—	13	0 1—3 4	6 7 7	7 7 7	8 8 8	8 9 10	—	23	0 1 2—8	7 9 9	8 10 10	10 11 11	11 11 12	13 13 13
6	0 1 2	4 5	5 5	6 —	6 —	—	14	0 1—4 5	6 7 7	7 8 8	8 8 8	9 9 9	10 10 —	24	0 1 2—4 5—8	7 9 9 10	9 10 10 10	10 11 11 11	11 12 12 12	13 14 14 14
7	0 1 2 3	5 5 5	5 6 —	6 6 —	6 6 —	7	15	0 1—4 5	6 8 8	7 8 8	8 9 9	9 9 9	11 11 —	25	0 1 2 3—4 5—8	7 9 10 10 10	9 10 10 10 11	10 11 12 12 12	11 12 12 12 12	13 14 14 14 14
8	0 1 2 3	5 5 5	6 6 —	6 6 —	7 7 —	8	16	0 1 2 3—5	6 8 8 8	8 8 8 9	9 9 9 9	9 10 10 11	11	26	0 1 2—9	7 9 10	9 10 11	10 12 12	11 12 13	14 14 14
9	0 1 2 3	5 6 6 6	6 6 6	7 7 7	7 7 —	8	17	0 1 2—5 6	6 8 8 8	8 8 9 9	9 9 9 9	9 10 10 10	11 11 12 —	27	0 1 2—9	7 10 10	9 10 11	10 12 12	12 12 13	14 15 15
10	0 1 2 3 4	6 6 6 6 6	6 6 7 7 —	7 7 7 7 —	7 8 8 —	9	18	0 1 2—6	7 8 8	8 9 9	9 9 10	10 10 10	12 12 12	28	0 1—9	7 10	9 11	11 12	12 13	14 15
11	0 1 2 3 4	6 6 6 6 6	6 7 7 7 —	7 7 8 8 —	8 8 8 —	9	19	0 1—6	7 8	8 9	9 10	10 10	12 12	29	0 1 2 3—10	7 10 11 11	9 11 11 12	11 12 12 12	12 13 13 13	14 15 15 15
							20	0 1 2—7	7 8 9	8 9 9	9 10 10	10 11 11	12 12 13	30	0 1—2 3 4—10	7 10 11 11	9 11 12 12	11 12 12 13	12 13 13 13	15 15 15 15
							21	0 1 2—7	7 8 9	8 9 10	10 10 11	10 11 11	13 13 13							

A D^+ és D^- értékek esetünkben $\frac{1}{n}$ -nek — azaz a minták közös n elemszáma reciprokának — egészszámú többszörösei, tehát ilyen alakúak:
 $D^- = \frac{a}{n}$ és $D^+ = \frac{b}{n}$, ahol a és b nem-negatív egész számok. Tehát az A) esetben is (ha az előzetes feltevés beigazolódott), a B) esetben is a a kisebbik, b pedig a nagyobbik e két egész szám közül.

A táblázatok segítségével a következőképpen ítéldhetjük meg az eltérés szignifikanciáját : attól függően, hogy a várható eltérés irányára vonatkozóan volt előzetes hipotézisünk, vagy sem, az *A*), illetőleg a *B*) táblázatot használjuk. A táblázat első oszlopából kikeressük az adott *n*-nek (a minták közös elemszámának) megfelelő sorokat. Ezek közül a második oszlop alapján kikeressük az aktuális *a*-nak megfelelő sort, majd ezen sorban a választott szintnek megfelelő rubrikát. Ha az aktuálisan szereplő *b* érték ennél a számnál nagyobb vagy vele egyenlő, úgy a választott szinten szignifikánsnak mondhatjuk ki az eltérést. Ha a *b* aktuális értéke az itteni rubrikában szereplő számnál határozottan kisebb, vagy pedig ott »vonás« (—) szerepel, úgy az eredményt nem tekinthetjük szignifikánsnak.

Kiegészítésünk ugyan feleslegessé teszi az eredeti közlemény I. és II. táblázatainak használatát, de a teljesség kedvéért megemlítiük, hogy a II. táblázat fejlécén szereplő képlet második Σ -jában az összegezés nem $\nu = 1$ -től, hanem helyesen $\nu = 2$ -től kezdődik és ugyanez vonatkozik a közlemény 187. oldalán szereplő (32) képletre is. A II. táblázat 3. részében ezenkívül a fejlécben szereplő *b*-rovat hatodik kockájában tévesen 5 szerepel, helyébe helyesen 6 kerül. Ugyanezen táblázati rész első sorának ($a = 0$) hetedik értékétől kezdve minden egyes érték eggyel jobbra tolódik, a hetedik rovatba pedig 0,64 helyébe 1,53 kerül.

ÚJABB KRITÉRIUMOK KÉT MINTA ÖSSZEHAISONLÍTÁSÁRA

RÉNYI ALFRÉD

Összefoglalás

A dolgozat a Wilcoxon-féle próbával foglalkozik, és annak egy olyan módosítását adja meg, amely minden alternatív hipotézissel szemben konzisztens, továbbá egyszerűbb mint a Wilcoxon-féle próbának E. L. Lehmanntól származó, hasonló tulajdonságokkal bíró módosítása. A dolgozatban megadott próba a következő: annak eldöntésére, hogy a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ minták egyforma eloszlású statisztikai sokaságból származnak-e, megszámoljuk, hogy az $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ egyenlőtlenség-párok közül hány teljesül, ha j és k az $1, 2, \dots, n$ számokon, i az $1, 2, \dots, m$ számokon fut végig; jelölje ezt a számot W_1 . Hasonlóképpen megszámoljuk, hogy a $\xi_j < \eta_i$ és $\xi_k < \eta_i$ egyenlőtlenség-párok közül, ahol j és k az $1, 2, \dots, n$ számokon, i az $1, 2, \dots, m$ számokon fut végig; ezt a számot jelölje W_2 . Képezve a $W = \frac{W_1}{m \binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n \binom{m}{2}}$ kifejezést,

megállapítjuk, hogy a hipotézis teljesülése esetén mely α és β határok közé kell W értékének előírt valószínűségi szint mellett esnie. A kritériumunk abban áll, hogy ha $\alpha \leq W < \beta$, akkor a hipotézist elfogadjuk, ha ez az egyenlőtlenség nem teljesül, akkor a hipotézist elvetjük. Ha a ξ_k független valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $F(x)$ és az η_k valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $G(x)$ továbbá $F(x) \not\equiv G(x)$, akkor

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} P(\alpha \leq W < \beta) = 1,$$

vagyis a próba minden alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Ez abból következik, hogy ha $F(x)$ és $G(x)$ két eloszlásfüggvény, úgy

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

és (*)-ban egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $F(x) \equiv G(x)$.

Bevezetés

A matematikai statisztika egyik — a gyakorlatban legtöbbször előforduló — problémája annak a vizsgálata, hogy két minta származhat-e ugyanabból a statisztikai sokaságból. Ez a probléma felmerül például két gyógyszer hatásának, két növénytermesztési eljárás eredményeinek, két automatagép által gyártott árucikkek minőségének összehasonlításánál stb., vagy például annak vizsgálatánál, hogy valamilyen külső tényező (pl. időjárás, hőmérséklet, a levegő nedvességtartalmának megváltozása stb.) befolyással bír-e valamilyen termelési, vagy biológiai folyamatra.

A probléma matematikailag legegyszerűbben abban az esetben oldható meg, ha a szóbanforgó véletlentől függő mennyiségek egyenlő szórású normális eloszlású valószínűségi változók és így a statisztikai vizsgálatnak csak azt kell eldöntenie, hogy a két változó várható értékei megegyeznek-e egymással. Ha ξ és η jelöli a két változót, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ a ξ változó megfigyelt értékeit, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ pedig az η változó megfigyelt értékeit, akkor tehát ebben az esetben $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ teljesen független és egyforma normális eloszlású való-

színűségi változók, közös valószínűségi sűrűség-függvényük $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}$, ha-

sonlóképpen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ egymástól és a ξ_k változóktól független és egyforma normális eloszlású valószínűségi változók, közös valószínűségi sűrűség-

függvényük $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma^2}}$ és az eldöntendő hipotézis az, hogy fennáll-e

$m_1 = m_2$ (ez az úgynevezett »nulla-hipotézis«). Ennek eldöntésére szolgál az ú. n. »Student«-féle t -próba*; ez abban áll, hogy kiszámítjuk a ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$) és

az ($\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$) minták középértékét, vagyis a $\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m}{m}$ és

$\bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n}$ mennyiségeket és a két minta szórásnégyzeteit, vagyis az

$$s_1^2 = \frac{\sum_{k=1}^m (\xi_k - \bar{\xi})^2}{m} \quad \text{és} \quad s_2^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (\eta_k - \bar{\eta})^2}{n}$$

mennyiségeket és ezekből képezzük a

$$(1) \quad t = \frac{(\bar{\xi} - \bar{\eta}) \sqrt{nm(n+m-2)}}{\sqrt{(n+m)(ms_1^2 + ns_2^2)}}$$

hányadost; kimutatható, hogy t $n+m-2$ szabadsági fokú ú. n. »Student«-féle eloszlással bír, vagyis valószínűség-sűrűségfüggvénye

$$(2) \quad s_{n+m-2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n+m-2)}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m-2}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n+m-2}\right)^{\frac{n+m-1}{2}}}$$

* Ez a módszer William S. Gosset angol statisztikustól származik, aki dolgozatait »Student« írói álnév alatt közölte; ennek oka, amint ezt J. Neyman »First course in probability and statistics« (Hold. & Co. New York, 1950.) c. művében (331. o.) közli, az volt, hogy Gosset az A. Guinness, Son & Co. dublini sörgyár szolgálatában állott és statisztikai vizsgálatainak eredményeit a sörgyártásban felhasználták; a sörgyáros kívánsága volt, hogy Gosset álnéven írja meg cikkeit azért, hogy a konkurrens sörgyárosok ne tudják meg abból, hogy a Guinness-cég egy alkalmazottja matematikai cikkeket ír, azt, hogy a statisztikai módszereket a sörgyártásban alkalmazni lehet. Ez ugyanis veszélyeztette volna a dublini sörgyár üzleti érdekeit.

A »Student«-féle eloszlásfüggvény táblázatából megállapítható n és m minden értékére és bármely megadott $P < 1$ valószínűségi szinthez az a t_p érték, amelynél t abszolút értékének P valószínűséggel kisebbnek kell lennie, ha a nullahipotézis helytálló. Ha mármost a két mintából (1) alapján kiszámított $|t|$ -érték t_p -nél nagyobb, úgy a hipotézist mint valószínűtlent elvetjük, ha viszont $|t|$ értéke t_p -nél kisebb, úgy a hipotézist elfogadjuk.

Ez az eljárás valóban kielégítő megoldását szolgáltatja a két minta összehasonlítására vonatkozó problémának, ha az eljárás alkalmazásának előfeltételei teljesülnek. Azonban, ha ezek a feltevések nem teljesülnek, tehát ha a szóbanforgó mennyiségek eloszlása nem normális eloszlás, sőt nem is közelíthető jól normális eloszlással, vagy ha a két eloszlás ugyan normális, de szórásaik erősen eltérnek egymástól, vagy pedig, ha a két minta elemei nem függetlenek egymástól, úgy a Student-féle próba nem alkalmazható. Így tehát a Student-féle próba alkalmazását alapos statisztikai vizsgálatnak kell megelőznie, amely arra irányul, hogy eldöntse, fennállnak-e azok az előfeltételek, amelyek mellett a Student-féle próba alkalmazható, és ha ez a vizsgálat azt mutatja, hogy ezek az előfeltételek nem állnak fenn, úgy más módszert kell keresni.*

Mivel az említett előfeltételek a gyakorlatban az esetek jelentős részében nem teljesülnek, a matematikai statisztika művelőinek érdeklődése olyan kritériumok kidolgozására irányult, amelyek általánosabb feltételek mellett is alkalmazhatók. Érthető, hogy különösen olyan módszerek kidolgozására törekedtek, amelyek »eloszlásmentesek«, vagyis amelyek érvényessége független a ξ_k és η_j változók (a nulla-hipotézis szerint közös) eloszlásának jellegétől. Ha egy kritérium eloszlásmentes, úgy ha $H(x)$ tetszőleges szigorúan monoton növekvő függvény, a kritériumnak ugyanazt az eredményt kell adnia, akár a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, akár pedig a $(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m)$ és $(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_n)$ mintákat hasonlítjuk össze, ha $\xi'_j = H(\xi_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) és $\eta'_k = H(\eta_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Ilyen módon egy eloszlásmentes kritérium nem használhat fel csak olyan a ξ_j és η_k számok közötti relációkat, amelyek bármely $\xi'_j = H(\xi_j)$, $\eta'_k = H(\eta_k)$ transzformációval szemben invariánsak. Márpedig csak azok a relációk ilyenek, amelyek a ξ_j és η_k számok nagyság szerinti elrendeződésére vonatkoznak. Ennélfogva eloszlásmentes kritériumokat csak a ξ_j és η_k mintaelemek közötti rendezési relációk segítségével nyerhetünk. Rendezzük el nagyság szerint egyetlen növekvő sorozatba a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ számokat; ezen $m + n$ szám közül a nagyság szerint k -adikát jelöljük ζ_k -val; a ζ_k számok mindegyike egy ξ_j -vel vagy egy η_j -vel egyenlő; értelmezzük az ε_k indexeket a következőképpen: ha ζ_k a ξ_i számok közül való, úgy legyen $\varepsilon_k = 1$, ha pedig ζ_k a η_j számok közül való, úgy legyen $\varepsilon_k = 0$. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor a szóbanforgó ξ és η változók eloszlásfüggvénye folytonos; ebben az esetben 0 annak a valószínűsége, hogy a ζ_k számsorozatban két egyenlő szám forduljon elő és így ezt a lehetőséget, amely az ε_k számok értelmezését bizonytalanná tehetné, figyelmen kívül hagyhatjuk.

Számos kritérium ismeretes, amelyik az ε_k számok vizsgálata alapján dönti el, hogy a nulla-hipotézist elfogadjuk, vagy elvessük. Jelen dolgozat célja a legjelentősebb ilyen módszerek ismertetése és egy újabb kritérium

* Hogy milyen hibákhoz vezethet a Student-féle próba alkalmazása olyan esetekben, ahol az nem indokolt, kitűnik pl. az Orvosi Hetilap 1950. évi kötetében közölt vitából.

felállítás. Az 1. §-ban az ú. n. Wilcoxon-féle kritériumot tárgyaljuk és megadjuk annak eloszlásának és határeloszlásának az irodalomból ismeretesnél lényegesen egyszerűbb tárgyalását, amely egy Gauss-féle azonosságon alapszik. A Wilcoxon-féle próba abban áll, hogy megállapítjuk, hogy az ε_k számok közül melyek egyenlők 1-gyel, vagyis hogy a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ minta elemei a ξ_i és η_j számok egyesített $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+m}$ sorozatában mely helyeken állnak; ha $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_2} = \dots = \varepsilon_{r_m} = 1$, úgy képezzük az

$$U = r_1 + r_2 + \dots + r_m$$

összeget és ennek nagyságából következtethetünk arra, hogy a nulla-hipotézis fennáll-e vagy nem (lásd [1], [2], [3], [4]). A Wilcoxon-féle kritérium jól használható annak eldöntésére, hogy annak valószínűsége, hogy $\xi > \eta$, egyenlő-e $\frac{1}{2}$ -el (a nulla-hipotézis esetében ez természetesen teljesül) vagy nem. Sok esetben valóban csak erre van szükség, pl. gyógyszerek, tápszerek, növénytermesztési eljárások összehasonlításánál. Azonban vannak esetek, amikor ξ és η eloszlása ugyan különbözik egymástól, azonban $P(\xi > \eta) = \frac{1}{2}$; ez az eset áll fenn például, ha ξ és η normális eloszlásúak, vagy más megegyező szimmetrikus eloszlásúak, és várható értékeik egyenlők, de szórásaik különböznek. Ebben az esetben, amely azért is fontos, mert itt a Student-féle próba nem alkalmazható, a Wilcoxon-féle próba nem ad megbízható eredményt. Ugyanis egy próba akkor megbízható, ha mind az elsőfajú, mind a másodfajú hiba valószínűsége tetszőleges kicsinnyé tehető; elsőfajú hibán értjük azt a tévedési lehetőséget, hogy a nulla-hipotézist a kritérium alapján elvetjük, annak ellenére, hogy helytálló; másodfajú hibán pedig azt a tévedési lehetőséget értjük, hogy a nulla-hipotézist elfogadjuk, annak ellenére, hogy nem helytálló. Mármint egy H_0 hipotézisre vonatkozó próbát egy H_1 a H_0 -tól különböző, lehetséges alternatív hipotézissel szemben konzisztensnek nevezünk, ha az elsőfajú hiba valószínűségét tetszőlegesen rögzítve, a másodfajú hiba valószínűsége a minta elemszámának növelésével tetszőlegesen kicsinnyé tehető. Mármint jelölje $F(x)$ a ξ változó eloszlásfüggvényét, $G(x)$ pedig az η változó eloszlásfüggvényét; a H_0 hipotézis legyen az, hogy $G(x) \equiv F(x)$, a H_1 hipotézis pedig az, hogy $G(x)$ egy meghatározott, $F(x)$ -szel nem azonos eloszlásfüggvény. A H_0 hipotézis mellett

$$\begin{aligned} (3) \quad P(\xi < \eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dG(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dF^2(x) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

míg a H_2 hipotézis mellett

$$(4) \quad P(\xi < \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dG(x) = p$$

értéke $G(x)$ -től függ. A Wilcoxon-próbáról ismeretes (l. [7]), hogy a H_1 hipotézissel szemben konzisztens, ha a (4) alatti p valószínűség értéke $\frac{1}{2}$ -től különbözik, azonban nem konzisztens, ha $p = \frac{1}{2}$, bár $G(x)$ és $F(x)$ nem azonosak.

Ilyen módon felmerül a probléma : hogyan lehet a Wilcoxon-próbát úgy módosítani, hogy bármely alternatív H_1 hipotézissel szemben konzisztens legyen. Egy ilyen módosítást nemrégiben *E. L. Lehmann* adott meg. A 2. §-ban egy másik módosítást adjuk a Wilcoxon-próbának, amely a Lehmann-féle próbához hasonló, de valamivel egyszerűbb. A 3. §-ban néhány problémát vetünk fel. A dolgozat végén közöljük a Wilcoxon-féle U -összeg eloszlásának táblázatát $m \leq 9$ és $n \leq 9$ -re.

A szóbanforgó problémakörnek igen kiterjedt irodalma van. A dolgozatban tárgyalt kritériumokon kívül a szóbanforgó célra számításba jönnek a két minta eloszlásfüggvényeinek összehasonlításán alapuló kritériumok, így elsősorban *N. V. Szmirnov* egy kritériuma és annak különböző általánosításai,* továbbá *Wald és Wolfowitz* egy kritériuma. Az, hogy mikor melyik próba előnyösebb, lényegében nyitott kérdés. Erre vonatkozólag a 3. §-ban teszünk néhány megjegyzést.

1. §. A Wilcoxon-féle próba

Legyen $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ két minta ugyanabból az $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényű statisztikai sokaságból ($m \leq n$). A két minta elemeit rendezzük el egyetlen sorozatba nagyság szerint, legyen ez a sorozat $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \dots \leq \zeta_{n+m}$. Vizsgáljuk meg, hogy ebben a sorozatban a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ számok mely helyeket foglalják el : legyenek ezek a helyek az r_1 -edik, r_2 -edik, \dots r_m -edik, és legyen

$$(1) \quad U = r_1 + r_2 + \dots + r_m.$$

Határozzuk meg az U valószínűségi változó eloszlását. Az r_1, r_2, \dots, r_m számok nyilván a $1, 2, \dots, n+m$ számok egy m -elemű kombinációját alkotják ; feltevésünk értelmében a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, r_1, r_2, \dots, r_n$ változók teljesen függetlenek és egyforma eloszlásúak, ebből következik, hogy az említett kombinációk mind egyenlő valószínűséggel fordulhatnak elő. Mivel az említett kombinációk száma $\binom{m+n}{m}$, tehát mindegyik kombináció valószínűsége

$$\frac{1}{\binom{m+n}{m}} \text{ és így}$$

$$(2) \quad P(U = k) = \frac{N_{m,n}(k)}{\binom{m+n}{m}}$$

ha $N_{m,n}(k)$ -val jelöljük a k nem-negatív egész számnak $k = r_1 + r_2 + \dots + r_m$ ($1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq m+n$) alakban való különböző lehetséges előállításainak a számát. U eloszlásának meghatározását tehát egy számelméleti problémára, mégpedig a »partitio numerorum« egy feladatára vezettük vissza. Mivel U minimális értékét nyilván akkor veszi fel, ha $r_k = k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) maximális értékét pedig, ha $r_k = n+k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), tehát

* Lásd ezekre vonatkozólag Juvancz Iréneusz és Lipták Tamás dolgozatát az AMI Közleményeinek I. kötetében

$$\frac{m(m+1)}{2} \leq U \leq \frac{m(m+1)}{2} + mn.$$

Célszerű bevezetni az

$$U' = U - \frac{m(m+1)}{2}$$

változót; U' lehetséges értékei nyilván $0, 1, 2, \dots, mn$.

Képezzük a

$$(3) \quad C_m^{(m+n)}(x) = \sum_{k=0}^{mn} N_{m,n} \left(\frac{m(m+1)}{2} + k \right) x^k$$

polinomokat. Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$(4) \quad C_m^{(m+n)}(x) = \frac{(1-x^{m+n})(1-x^{m+n-1}) \dots (1-x^{n+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)}.$$

Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be: egyszerűen belátható, hogy

$$(5) \quad \sum_{m=0}^N C_m^{(N)}(x) x^{\frac{m(m+1)}{2}} y^m = \prod_{r=1}^N (1+yx^r)$$

Ugyanis az (5) jobboldalán álló polinomban $y^m x^k$ együtthatója nyilván egyenlő a k számnak $k = r_1 + r_2 + \dots + r_m$ ($1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq N$) alakban való előállításainak számával. Másrészt már Gauss ismerte a binomiális tétel következő általánosítását:

$$(6) \quad \prod_{r=1}^N (1+yx^r) = \sum_{m=0}^N y^m x^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(1-x^N)(1-x^{N-1}) \dots (1-x^{N-m+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)}.$$

(6) legegyszerűbben N -re vonatkozó teljes indukcióval igazolható. (6) a binomiális tétel általánosításának tekinthető; ugyanis az $x=1$ speciális esetben, figyelembevételével, hogy

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{k=1}^m \left(\frac{1-x^{N-k+1}}{1-x^k} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \prod_{k=1}^m \frac{\left(\frac{1-x^{N-k+1}}{1-x} \right)}{\left(\frac{1-x^k}{1-x} \right)} = \binom{N}{m}$$

a (6) azonosság az

$$(8) \quad \prod_{r=1}^N (1+y) = (1+y)^N = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} y^m$$

összefüggésre, vagyis Newton binomiális tételére redukálódik.

Ilyen módon a

$$(9) \quad C_m^{(N)}(x) = \frac{(1-x^N)(1-x^{N-1}) \dots (1-x^{N-m+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)}$$

polinomokat binomiális együttható-polinomoknak nevezhetjük és a binomiális együtthatók általánosításának tekinthetjük. A fentiekre való tekintettel nyerjük, hogy az $U' = U - \binom{m+1}{2}$ valószínűségi változó generátorfüggvénye*

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{m+n} P(j=k) x^k = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} C_m^{(m+n)}(x)$$

* A (10) összefüggésre igen egyszerű, pusztán valószínűség-számítási megfontolásokon alapuló bizonyítást adott Dr. ing. J. Hajek (Prága), akinek bizonyítását szíves hozzájárulásával alábbiakban közöljük:

Válasszuk ki találomra az $1, 2, \dots, n+m$ számok egy tetszőleges Π_{m+n} permutációját, feltéve, hogy az összes permutációk egyenlően valószínűek. Jelentsé J_m az Π_{m+n} permutáció inverzióinak számát, akkor J nyilván valószínűségi változó. J a következőképpen bontható fel: $J_{m+n} = J_m + J_n + U'$, ahol J_m jelenti az $1, 2, \dots, m$ számok egymás közötti inverzióinak számát, J_n az $m+1, m+2, \dots, m+n$ számok egymás közötti inverzióinak számát, U' pedig az $1, 2, \dots, m$ és $m+1, m+2, \dots, m+n$ számsorozatok elemeinek egymással való inverzióinak számát. Más szóval U' jelenti, hogy hány olyan (j, k) ($j > m, k \leq m$) számpár van, hogy j megelőzi k -t, Π_{m+n} -ben.

Világos, hogy U' megegyezik a fentebb definiált $U' = U - \binom{m+1}{2}$ -változóval. Könnyen belátható továbbá, hogy a J_m, J_n , és U' változók függetlenek egymástól, hiszen J_m csak az $1, 2, \dots, m$ számoknak egymáshoz képest való elhelyezkedésétől, J_n csak az $m+1, m+2, \dots, m+n$ számoknak egymáshoz képest való elhelyezkedésétől, U' pedig csak az $1, 2, \dots, m$ számoknak az $m+1, m+2, \dots, m+n$ számokhoz képest való elhelyezkedésétől függ. Ilyen módon ha $G_{m+n}(x)$, $G_m(x)$ és $G_n(x)$ jelölik J_{m+n} , J_m és J_n generátorfüggvényeit és $P_{m,n}(x)$ jelöli U' generátorfüggvényét, úgy

$$G_{m+n}(x) = G_m(x) G_n(x) P_{m,n}(x).$$

Vizsgáljuk most meg az J_m változót. J_m előállítható a következő alakban: $J_m = \sum_{k=2}^{m-1} \xi_{mk}$

ahol ξ_{mk} jelenti, hogy a k szám az $1, 2, \dots, m$ sorozat hány elemével alkot inverziót Π_{m+n} -ben. Π_{m+n} -ben az $1, 2, \dots, m$ számok egymásközt egy Π_m permutációt alkotnak, és ha az összes Π_{m+n} permutációk egyformán valószínűek, úgy az összes Π_m permutációk is egyformán valószínűek; továbbá a Π_m permutáció megválasztása úgy történhet, hogy az $1, 2, \dots, m$ számok mindegyikére vonatkozólag megadjuk, hogy Π_m -ben hányadik helyen áll. Ha meg van adva, hogy Π_m -ben az $1, 2, \dots, k$ számok hányadik helyen állnak, úgy $\xi_{m2}, \xi_{m3}, \dots, \xi_{m,k-1}$ nem függnak ezen helyek indexeitől, csak attól, hogy az $1, 2, \dots, k$ számok rendre melyik helyet foglalják el a k hely közül. Ezzel szemben $\xi_{m,k+1}$ nem függ ettől, csak az említett indexektől. Ilyen módon $\xi_{m,k+1}$ független a $\xi_{m2}, \xi_{m3}, \dots, \xi_{m,k}$ változóktól, ($k = 2, 3, \dots, m-1$) és így a $\xi_{m2}, \xi_{m3}, \dots, \xi_{m,m}$ változók teljesen függetlenek. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy $\xi_{m,k+1}$ a $0, 1, 2, \dots, k$ értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel, és így $\xi_{m,k+1}$ generátorfüggvénye

$$\frac{1}{k+1} \frac{1-x^{k+1}}{1-x}. \text{ Ennélfogva } G_m(x) = \frac{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^m)}{m! (1-x)^m} \text{ továbbá } G_n(x) = \frac{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^n)}{n! (1-x)^n} \text{ és } G_{m+n}(x) = \frac{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^{m+n})}{(m+n)! (1-x)^{m+n}}, \text{ tehát}$$

$$P_{m,n}(x) = \frac{G_{m+n}(x)}{G_m(x) G_n(x)} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} C_m^{(m+n)}(x),$$

amit bizonyítani akartunk.

Az U' változó generátorfüggvénye segítségével kiszámíthatjuk U' várható értékét és szórását:

$$(13) \quad \mathbf{M}(U') = \frac{mn}{2}$$

és

$$(14) \quad \mathbf{D}(U') = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

$\mathbf{M}(U')$ és $\mathbf{D}(U')$ egyébként elemi úton is meghatározhatók a következő megfontolással. Legyen $\varepsilon_{ij} = 1$, ha $\tau_j < \xi_i$ és $\varepsilon_{ij} = 0$, ha $\tau_j > \xi_i$; akkor könnyen belátható, hogy

$$(15) \quad U' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij},$$

vagyis U' egyenlő azon (ξ_i, η_j) párok számával, melyekre $\tau_j < \xi_i$. Mivel $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}$, tehát (15)-ből $\mathbf{M}(U') = \frac{mn}{2}$; (15) alapján meghatározható U' szórása is.

U' generátorfüggvényének ismeretében könnyen meghatározhatjuk U' határeloszlását is. Legyen

$$(16) \quad U^* = \frac{U' - \mathbf{M}(U')}{\mathbf{D}(U')} = \frac{U' - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}$$

az U' változó standardizálásával nyert változó, és számítsuk ki U^* karakterisztikus függvényét, amelyet $\varphi_{m,n}(t)$ -vel jelölünk, vagyis

$$(17) \quad \varphi_{m,n}(t) = M(e^{itU^*}).$$

(10) segítségével könnyen következik,* hogy

$$(18) \quad \varphi_{m,n}(t) = \prod_{k=1}^m \frac{S\left((m+n+1-k)\frac{t}{2\sigma}\right)}{S\left(k\frac{t}{2\sigma}\right)},$$

ahol $\sigma = \mathbf{D}(U')$ és

$$(19) \quad S(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

* A $\varphi_{m,n}(t)$ karakterisztikus függvénynek ez a kifejezése megtalálható már D. van Dantzig [6] dolgozatában.

Felhasználva azt a tényt, hogy

$$(20) \quad S(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4) \quad \text{ha } x \rightarrow 0,$$

következik, hogy

$$(21) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \varphi_{m,n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

eloszlása a normális eloszláshoz konvergál:

$$(22) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \mathbf{P}(U^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

és így U^* eloszlása m és n nagy értékeire közelítőleg normálisnak vehető.

Itt jegyezzük meg, hogy azt a tényt, hogy U (ill. U^*) határértékben normális eloszlású, először *H. B. Mann* és *D. R. Whitney* bizonyították be [4]. Az ő bizonyításuk a momentum-módszeren alapszik és meglehetősen bonyolult, emellett csak arra az esetre vonatkozik, amikor $\frac{m}{n}$ korlátos.

A $\varphi_{m,n}(t)$ karakterisztikus függvény explicit kifejezése alapján megbecsülhető U^* eloszlásának a normális eloszlástól való eltérése is; ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.

A Wilcoxon-féle próba alkalmazása ezek után semmi nehézségbe nem ütközik, ugyanis ha egy tetszőleges megadott 1-hez közeli P valószínűségi szintet írunk elő, adott m és n mellett meghatározhatjuk azokat az u_1 és u_2 határokat, melyekre $P(u_1 \leq U < u_2) = P$ és ha a vizsgált mintából számított U érték u_1 és u_2 közé esik, úgy elfogadjuk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézist, ha pedig nem, úgy elvetjük. A mondottak értelmében, ha m és n nagy számok, úgy

$$\mathbf{P}(-\lambda \leq U^* \leq +\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

és így a P valószínűségi szinthez tartozó határok U -ra nézve

$$\begin{aligned} & \frac{m(m+n+1)}{2} - \lambda_P \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}} \leq \\ & \leq U < \frac{m(m+n+1)}{2} + \lambda_P \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}} \end{aligned}$$

ahol λ_P értékét úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda_P}^{+\lambda_P} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P$$

legyen. Ha m és n értékei kicsinyek, úgy a dolgozat végén közölt táblázatból határozzuk meg u_1 és u_2 értékét.

Mint említettük, a Wilcoxon-féle próba csak olyan alternatív hipotézisekkel szemben konzisztens, amelyek szerint ξ eloszlásfüggvénye $F(x)$, és η eloszlásfüggvénye olyan $G(x)$ függvény, amelyre nézve

$$P(\eta < \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dF(x) \neq \frac{1}{2}.$$

Ilyen módon a Wilcoxon-féle próba tulajdonképpen nem is a $G(x) \equiv F(x)$, hanem az ennél kevesebbet kívánó $P(\eta < \xi) = \frac{1}{2}$ hipotézis ellenőrzésére szolgál, és erre a célra teljesen meg is felel, ennél többet azonban nem várhatunk tőle. Ezt plauzibilissé teszi az, hogy $\frac{U'}{mn}$ nem más, mint a $\eta < \xi$

esemény relatív gyakorisága egy mn (egymástól nem független) kísérlethől álló kísérletsorozatban. Természetesen felmerül az a gondolat, hogy az $m = n$ esetben a $P(\eta < \xi) = \frac{1}{2}$ hipotézist úgy ellenőrizzük, hogy egyszerűen megszámoljuk, hogy az $\eta_k < \xi_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) egyenlőtlenségek közül hány teljesül, vagyis az $(\eta < \xi)$ esemény relatív gyakoriságát n független kísérlethől álló kísérletsorozatban vizsgáljuk. Ez az ú. n. „előjel-próba”, amelyet J. Arbuthnot már 1710-ben alkalmazott [11]. Ez esetben a relatív gyakoriság szórása $\frac{1}{2\sqrt{n}}$, míg a Wilcoxon-féle eljárásnál az $n = m$ esetben

$$\frac{U'}{n^2} \text{ szórása } \sqrt{\frac{2n+1}{12n^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{6n}} = \frac{1}{2,4\sqrt{n}}.$$

A Wilcoxon-féle eljárás előnye tehát nem jelentős. Ha n nagy m -hez képest, úgy a szórások aránya valamivel javul és lecsökken közel 0,57-re. Ha ugyanis $n > m$ és csak független kísérleteket engedünk meg, úgy az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ számok közül csak az első m darabot tartjuk meg és a $\eta_k < \xi_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) egyenlőtlenségek közül vizsgáljuk meg, hogy hány teljesül és ilyen módon információt veszünk.

2. §. A Wilcoxon-féle próba javítása

A Wilcoxon-féle próba, mint láttuk, abban áll, hogy megszámoljuk, hogy az $\eta_j < \xi_i$ egyenlőtlenségek közül hány teljesül, ha i végigfut az 1, 2, ..., m számokon és j az 1, 2, ..., n számokon. Ehelyett most vizsgáljuk meg, hogy az $\eta_j < \xi_i$, $\eta_k < \xi_i$ egyenlőség-párok közül hány teljesül, ha j és

$k \neq j$ végigfutnak az $1, 2, \dots, n$ számokon, i pedig az $1, 2, \dots, m$ számokon; ezt a számot jelöljük W_1 -el. Hasonlóképpen vizsgáljuk meg, hogy a $\xi_h < \eta_j$, $\xi_i < \eta_j$ egyenlőtlenség-párok közül hány teljesül, ha h és $i \neq h$ az $1, 2, \dots, m$ számokon, és j az $1, 2, \dots, n$ számokon fut végig; ezt a számot jelöljük W_2 -vel. Legyen továbbá

$$(1) \quad W = \frac{W_1}{m \binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n \binom{m}{2}}$$

Meghatározva azt a (W_1, W_2) intervallumot, amelybe W értékének P valószínűséggel esni kell, ha az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézis teljesül, egy kritériumot nyerrünk az $F(x) \equiv G(x)$ hipotézisre, ha a következőképpen járunk el: a nulla-hipotézist elfogadjuk, vagy elvetjük aszerint, hogy a két mintából számított W érték az említett (w_1, w_2) intervallumba beleesik vagy nem. Ezt a próbát a rövidség kedvéért W -próbának nevezzük. Mivel $m \binom{n}{2}$ az összes (η_j, η_k, ξ_i) számhármask száma, $n \binom{m}{2}$ pedig az összes (ξ_h, ξ_i, η_j) számhármask száma,

W nem más, mint az $\eta < \xi$, $\eta' < \xi$ egyenlőtlenségek együttes bekövetkezésében álló A esemény és az $\eta < \xi$, $\eta < \xi'$ egyenlőtlenségek együttes bekövetkezésében álló B esemény relatív gyakoriságainak összege, ahol ξ és ξ' független és ugyanazon $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók, η és η' pedig egymástól az ξ és ξ' valószínűségi változóktól független és ugyanazon $G(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók. Mivel

$$(2) \quad P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x)$$

és

$$(3) \quad P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x)$$

tehát

$$(4) \quad M(W) = P(A) + P(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x).$$

Ha $F(x) \equiv G(x)$, úgy nyilván

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dF^3(x) = \frac{1}{3}$$

és így

$$(6) \quad M(W) = \frac{2}{3}.$$

A W mennyiség értékének vizsgálata alapján tehát az

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) = \frac{2}{3}$$

hipotézist lehet ellenőrizni, ugyanúgy, ahogyan a Wilcoxon-féle próbával az

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dF(x) = \frac{1}{2}$$

hipotézist lehet ellenőrizni. A különbség abban áll, hogy míg (8)-ból nem következik $G(x) \equiv F(x)$, addig (7)-ből következik, hogy $G(x) \equiv F(x)$. Ugyanis parciális integrálással belátható, hogy

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dG^2(x) = 1 - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) G(x) dG(x)$$

és így

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (F^2(x) - 2F(x)G(x)) dG(x) + 1.$$

Mivel továbbá

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dG(x) = \frac{1}{3}$$

tehát

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) - \frac{2}{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))^2 dG(x)$$

(12)-ből azonban következik, hogy ha

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) = \frac{2}{3},$$

akkor

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))^2 dG(x) = 0$$

(14) viszont azt jelenti, hogy $F(x) = G(x)$, kivéve esetleg olyan nyílt intervallumok belsejét, melyekben $G(x)$ állandó; mivel az említett intervallumok végpontjaiban $F(x) = G(x)$, tehát egy ilyen intervallum belsejében is fenn kell állni az $F(x) = G(x)$ összefüggésnek, tekintve hogy $G(x)$ és $F(x)$ monoton

nem-csökkenő függvények. Tehát ha (14) teljesül, úgy $F(x) \equiv G(x)$. Ha tehát a W -próbával (13) fennállását ellenőrizzük, ezzel egyben a nulla-hipotézist ellenőrizzük.

Ezen megfontolásból következik, hogy a W -próba minden $G(x) \not\equiv F(x)$ alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Ennek bizonyítását itt nem részletezzük, mivel az lényegében megegyezik *E. L. Lehmann* bizonyításával (l. [7]) arra vonatkozólag, hogy az általa megadott eljárás minden $G(x) \not\equiv F(x)$ alternatív hipotézissel szemben konzisztens. Csak vázoljuk ennek a bizonyításnak a gondolatmenetét. Bebizonyítható, hogy ha $n \rightarrow \infty$ és $m \rightarrow \infty$, úgy $D^2(W) \rightarrow 0$, tekintet nélkül arra, hogy $F(x) \equiv G(x)$ vagy $F(x) \not\equiv G(x)$. Mármost a W -próba abban áll, hogy adott P valószínűségi szinthez meghatározzuk azokat a w_1 és w_2 számokat, melyekre $P(w_1 \leq W < w_2) = P$. A Csebisev-egyenlőtlenségből azonban következik, hogy ha $n \rightarrow \infty$ és $m \rightarrow \infty$, úgy $w_1 \rightarrow \frac{2}{3}$ és $w_2 \rightarrow \frac{2}{3}$, ennél fogva, ha $F(x) \not\equiv G(x)$, úgy $M(W) = M \neq \frac{2}{3}$ és így a $P(w_1 \leq W < w_2)$ valószínűség elég nagy n -re és m -re kisebb lesz, mint a $P(|W - M(W)| > \varepsilon)$ valószínűség, ha csak $\varepsilon < |M - \frac{2}{3}|$, és így újból a Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} P(w_1 \leq W < w_2) = 0$; ebből azonban

már következik, hogy annak a valószínűsége, hogy W a $W < w_1$ és $w_2 < W$ egyenlőtlenségek által definiált kritikus tartományba essék, 1-hez konvergál, ha n és m minden határon túl nőnek, vagyis a W -próba minden, a nulla-hipotézistől különböző alternatív hipotézissel szemben konzisztens.

A Lehmann-féle próba a következő: megvizsgáljuk, hogy a

$$\xi_{i1} < \eta_{j1}, \quad \xi_{i2} < \eta_{j1}, \quad \xi_{i1} < \eta_{j2} \quad \text{és} \quad \xi_{i2} < \eta_{j2}$$

négy egyenlőtlenség hány, az 1, 2, ... m számok közül kiválasztott (i_1, i_2) , és az 1, 2, ... n számok közül kiválasztott (j_1, j_2) kombináció esetében teljesül egyidejűleg; ezen esetek számát jelöljük L_1 -gyel; hasonlóképpen meghatározzuk, hogy a

$$\xi_{i1} > \eta_{j1}, \quad \xi_{i2} > \eta_{j1}, \quad \xi_{i1} > \eta_{j2}, \quad \xi_{i2} > \eta_{j2}$$

négy egyenlőtlenség hány esetben teljesül egyidejűleg; ezt a számot jelöljük L_2 -vel és képezzük az

$$(15) \quad L = \frac{L_1 + L_2}{\binom{m}{2} \binom{n}{2}}$$

hányadost. Meghatározva azt az (l_1, l_2) intervallumot, amelybe L értékének P valószínűséggel esnie kell, ha a $G(x) \equiv F(x)$ nulla-hipotézis teljesül, a nulla-hipotézist elfogadjuk, vagy elvetjük aszerint, hogy a két mintából származott L -érték az (l_1, l_2) intervallumba beleesik, vagy nem.

Azt, hogy a Lehmann-féle kritérium minden alternatív $G(x) \not\equiv F(x)$ hipotézissel szemben konzisztens, a következőképpen láthatjuk be: a Lehmann-féle eljárás tulajdonképpen annak ellenőrzését jelenti, hogy fennáll-e az

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) (1 - F(x)) dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) (1 - G(x)) dG(x) = \frac{1}{6}$$

egyenlőség. Mivel azonban (16) baloldala a következőképpen alakítható át :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) (1 - F(x)) dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) (1 - G(x)) dG(x) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

tehát (16) ekvivalens (13)-mal és így a $G(x) \equiv F(x)$ hipotézissel.

A mi eljárásunk egyszerűbb Lehmann-énál, mivel egyenlőtlenség-párok teljesülésének ellenőrzésén alapszik 4-4 egyenlőtlenség ellenőrzése helyett.

Visszatérve a fent megadott kritériumra, jegyezzük meg, hogy W a következőképpen fejezhető ki explicit alakban : jelentsék r_1, r_2, \dots, r_m azoknak a helyeknek a sorszámain a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ és $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ minták elemeinek egyesített és nagyság szerint rendezett sorozatában, ahol a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintaelemek állnak és s_1, s_2, \dots, s_n azoknak a helyeknek a sorszámain, ahol az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ mintaelemek állnak. Akkor

$$(17) \quad W_1 = \sum_{k=1}^m \binom{r_k - k}{2}$$

és

$$(18) \quad W_2 = \sum_{j=1}^n \binom{s_j - k}{2}.$$

Ennélfogva

$$(19) \quad W = \frac{\sum_{k=1}^m \binom{r_k - k}{2}}{m \binom{n}{2}} + \frac{\sum_{j=1}^n \binom{s_j - j}{2}}{n \binom{m}{2}}.$$

Látjuk, hogy a W mennyiség ugyanúgy függ az r_k mint az s_j számoktól: a W -próbánál egyik minta sincsen kitüntetve.

3. §. Néhány további probléma

Befejezésül néhány megoldatlan problémát említünk meg.

Kíváncos volna a W -próba elméletének részletesebb megvizsgálása. W pontos eloszlásának, határeloszlásának és a határeloszláshoz való konvergenciája sebességének vizsgálata, továbbá a W -próba és a Lehmann-féle próba összehasonlítása. A Wilcoxon-féle próbát újabban többen kiterjesztették kettőnél több minta összehasonlítására is ; itt csak utalunk *Rijkoort* [8] vizsgálataira. Kíváncos volna ugyanezt a W -próba esetében is elvégezni.

A Wilcoxon-féle próba »erejét« alternatív hipotézisekkel szemben, normális eloszlású változók esetére *van der Waart* [9] és *van der Waerden* [10] vizsgálták meg. Hasonló vizsgálatok elvégzése a W -próba esetében is kíváncos volna. Érdekes volna megvizsgálni, hogy a két minta összehasonlítására

vonatkozó különböző próbák mennyire érzékenyek arra nézve, ha a minta elemei nem pontosan vannak megadva, hanem bizonyos mérési hibákkal eltorzítva. Ebből a szempontból össze kellene hasonlítani a *Wilcoxon*-t, a *W*- és az *L*-próbát *Wald* és *Wolfowitz* [5] próbájával. Teljesen nyitott kérdés többdimenziós eloszlásckból vett minták összehasonlításának kérdése, pedig a probléma a gyakorlatban fel szokott merülni. Még az az eset sincsen megvizsgálva, amikor például a változók lehetséges értékei egy zárt sígörbén (pl. körön) fekszenek és így csak a minta elemeinek ciklikus sorrendje adható meg.

Ezeket a problémákat annak dokumentálására említettük meg, hogy a két minta összehasonlításának problémaköre távolról sincs még kellő mértékben feltárva és e téren még sok nyitott probléma vár a kutatókra. A probléma gyakorlati jelentősége kívánatosá teszi, hogy Intézetünk e kérdésekkel behatóan foglalkozzék.

Mellékeljük a *Wilcoxon*-féle próba használatához szükséges táblázatokat arra az esetre, ha a két minta elemszáma 3 és 9 közé esik. Ezeket a táblázatokat *Kósa András* IV. éves alkalmazott matematikus hallgató készítette az Intézetünkben töltött szakmai gyakorlata idején. A táblázatokat *Varga Ottóné* ellenőrizte. Gondos munkájukért ezúton is köszönetet mondok.

IRODALOM

- [1] *F. Wilcoxon*: Individual comparisons by ranking methods, *Biometrics Bulletin* (1945), 1. No. 6. 80—83. o.
- [2] *F. Wilcoxon*: Individual comparisons of grouped data by ranking methods, *Journ. Eeon. Entomology*, 39 (2), 269. o. (1946).
- [3] *F. Wilcoxon*: Probability tables for individual comparisons by ranking methods; *Biometrics Bull.* 3. No. (1947).
- [4] *H. B. Mann & D. R. Whitney*: On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the other, *Ann. Math. Stat.* 18 50—60. o. (1947).
- [5] *A. Wald és I. Wolfowitz*: On a test whether two samples are from the same population, *Ann. Math. Stat.* 11 147—162. o. (1940).
- [6] *D. van Dantzig*: On the consistency and the power of *Wilcoxon*'s two sample test, *Indagationes Math.* 13 1—8. o. (1951).
- [7] *E. L. Lehmann*: Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests, *Ann. Math. Stat.* 22 165—180. o. (1951).
- [8] *P. J. Rijkooort*: A generalization of *Wilcoxon*'s test, *Indagationes Math.* 14 394—404. o. (1952).
- [9] *H. R. van der Waart*: *Proc. Nederl. Akad. Wet.* 53 (1950) 494.
- [10] *B. L. van der Waerden*: Order tests for the two sample problems and their power, *I. Indagationes Math.* 14 453—458. o. (1952) *II. u. o.* 15 303—310. o. (1953) *III. u. o.* 15 (1953) 311—316. l. továbbá *E. L. Lehmann*, The power of rank tests, *Ann. Math. Stat.* 24 23. o. (1952).
- [11] lásd *I. Todhunter*: A history of the mathematical theory of probability, Cambridge 1865, 131. o.

НОВЫЕ КРИТЕРИИ СРАВНЕНИЯ ДВУХ ВЫБОРОК

А. Реньи

Резюме

Работа занимается критерием Вилькоксона и дает некоторую модификацию этого критерия, которая является консистентной относительно всякой альтернативной гипотезы, и которая более проста, чем подобная модификация, принадлежащая Е. Л. Леману. Сообщаемый в работе критерий, состоит в следующем: для решения проблемы, происходят ли выборки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ из статистических совокупностей с одинаковыми распределениями, обозначим через W , число, показывающее сколько из

пар неравенств $\eta_j < \xi_i, \eta_k < \xi_i$ будет выполняться, если j и k пробегает числа $1, 2, \dots, n$, а i — числа $1, 2, \dots, m$. Соответственно, обозначим через W_1 числа показывающее сколько из пар неравенств $\xi_j < \eta_i$ и $\xi_k < \eta_i$ выполнено где j и k пробегает числа $1, 2, \dots, n$, а i — числа $1, 2, \dots, m$; Далее рассматривается выражение $W = \frac{W_1}{m \binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n \binom{m}{2}}$, и

определяются границы α и β , между которыми величина W должна находиться при различных наперед заданных уровнях вероятностей, если гипотеза выполняется.

Критерий состоит в том, что если $\alpha \leq W < \beta$ гипотеза принимается. Если неравенство неверно, то гипотеза отбрасывается.

Если $F(x)$ и $G(x)$ — функции распределения взаимно независимых случайных величин ξ_k соответственно η_k и $F(x) \neq G(x)$ то $\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(\alpha \leq W < \beta) = 1$ т.е. критерий конзистентен относительно всякой альтернативной гипотезы. Это следует из того, что, если $F(x)$ и $G(x)$ функции распределения, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

и равенство имеет место только в случае $F(x) \equiv G(x)$.

NEUE KRITERIEN ZUM VERGLEICH ZWEIER STICHPROBEN

A. RÉNYI

Zusammenfassung

Der Aufsatz behandelt den Wilcoxon'schen Test und liefert eine Modifikation desselben, die gegenüber jeder alternativen Hypothese konsistent, ausserdem einfacher ist, als die von E. L. Lehmann stammende und ähnliche Eigenschaften besitzende Abänderung.

Das in der Abhandlung gelöste Problem ist folgendes:

Zur Entscheidung der Frage, ob die Stichproben $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ und $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ aus Grundgesamtheiten gleicher Verteilung stammen, wird abgezählt, wie viele der Ungleichungspaare $\eta_j < \xi_i, \eta_k < \xi_i$ erfüllt sind, wo j und k die Zahlen $1, 2, \dots, n$, und i die Zahlen $1, 2, \dots, m$ durchlaufen; die Anzahl sei mit W_1 bezeichnet. Auf ähnliche Weise wird abgezählt, wie viele von den Ungleichungspaaren $\xi_j < \eta_i$ und $\xi_k < \eta_i$ erfüllt sind, wo j und k die Zahlen $1, 2, \dots, n$, und i die Zahlen $1, 2, \dots, m$ durchlaufen; diese Anzahl sei mit W_2 bezeichnet. Wir bilden nun den Ausdruck

$$W = \frac{W_1}{m \binom{n}{2}} + \frac{W_2}{n \binom{m}{2}}$$

und bestimmen die Grenzen α und β , zwischen denen im Falle der Erfüllung der Hypothese der Wert von W bei vorgeschriebenem Wahrscheinlichkeitsniveau liegen muss. Unser Kriterium besteht darin, dass wir die Hypothese im Falle $\alpha \leq W < \beta$ annehmen sonst verwerfen.

Ist $F(x)$ die Verteilungsfunktion der unabhängigen Zufallsveränderlichen ξ_k und $G(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen η_k , gilt ferner $F(x) \neq G(x)$, so gilt

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} P(\alpha < W < \beta) = 1$$

somit ist also die Probe gegenüber jeder alternativen Hypothese konsistent. Dies folgt daraus, dass wenn $F(x)$ und $G(x)$ Verteilungsfunktionen sind,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x) dG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(x) dF(x) \geq \frac{2}{3}$$

wo Gleichheit nur im Falle $G(x) \equiv F(x)$ stattfindet.

T Á B L Á Z A T
a Wilcoxon féle próba használatához*
n = 3

k	m=3 n=3	m=4 n=3	m=5 n=3	m=6 n=3	m=7 n=3	m=8 n=3	m=9 n=3
0	0,05000	0,02857	0,01786	0,01190	0,00833	0,00606	0,00455
1	10000	05714	03571	02381	01667	01212	00909
2	20000	11429	07143	04762	03333	02424	01818
3	35000	20000	12500	08333	05833	04242	03182
4	50000	31429	19643	13095	09167	06667	05000
5	65000	42857	28571	19048	13333	09697	07273
6	80000	57143	39286	27381	19167	13939	10455
7	90000	68571	50000	36714	25833	18788	14091
8	95000	80000	60714	45238	33333	24848	18636
9	1,00000	88571	71429	54762	41667	31515	24091
10		94286	80357	64286	50000	38788	30000
11		97143	87500	72619	58333	46061	36364
12		1,00000	92857	80952	66667	53939	43182
13			96429	86905	74167	61212	50000
14			98214	91667	80833	68485	56818
15			1,00000	95238	86667	75151	63636
16				97619	90833	81212	70000
17				98810	94167	86061	75909
18				1,00000	96667	90303	81364
19					98333	93333	85909
20					99167	95758	89545
21					1,00000	97576	92727
22						98788	95000
23						99394	96818
24						1,00000	98182
25							99091
26							99545
27							1,00000

*A táblázat a $P(U' \leq k)$ valószínűségeket tartalmazza ($k = 0, 1, \dots, m \cdot n$)

$$n = 4$$

k	m=4 n=4	m=5 n=4	m=6 n=4	m=7 n=4	m=8 n=4	m=9 n=4
0	0,01429	0,00794	0,00476	0,00303	0,00202	0,00140
1	02857	01587	00952	00606	00404	00280
2	05714	03175	01905	01212	00808	00559
3	10000	05556	03333	02121	01414	00979
4	17143	09524	05714	03636	02424	01678
5	24286	14286	08571	05455	03636	02517
6	34286	20635	12857	08182	05455	03776
7	44286	27778	17619	11515	07677	05315
8	55714	36508	23809	15757	10707	07413
9	65714	45238	30476	20606	14141	09930
10	75714	54762	38095	26364	18384	13007
11	82857	63492	45714	32424	23030	16503
12	90000	72222	54286	39394	28485	20699
13	94286	79365	61904	46364	34141	25175
14	97143	85714	69524	53636	40404	30210
15	98571	90476	76190	60606	46667	35524
16	1,00000	94444	82381	65756	53333	41259
17		96825	87143	73636	59596	46993
18		98413	91428	79394	65859	53007
19		99206	94286	84242	71515	58741
20		1,00000	96667	88485	76970	64475
21			98095	91818	81616	69790
22			99048	94545	85859	74825
23			99524	96363	89293	79301
24			1,00000	97878	92323	83496
25				98788	94545	86993
26				99394	96364	90070
27				99697	97576	92587
28				1,00000	98586	94685
29					99192	96224
30					99596	97482
31					99798	98322
32					1,00000	99021
33						99440
34						99720
35						99860
36						1,00000

$$n = 5$$

k	m=5 n=5	m=6 n=5	m=7 n=5	m=8 n=5	m=9 n=5
0	0,00397	0,00216	0,00126	0,0078	0,00050
1	00794	00433	00253	00155	00100
2	01587	00866	00505	00311	00200
3	02778	01515	00884	00544	00350
4	04762	02597	01515	00932	00599
5	07540	04113	02399	01476	00949
6	11111	06277	03662	02253	01449
7	15476	08874	05303	03263	02098
8	21032	12338	07449	04662	02997
9	27381	16450	10101	06371	04146
10	34524	21429	13384	08547	05594
11	42036	26840	17172	11111	07343
12	50000	33117	21591	14219	09491
13	57936	39610	26515	17716	11988
14	65476	46537	31944	21756	14885
15	72619	53463	37753	26185	18182
16	78968	60390	43813	31080	21878
17	84524	66883	50000	36208	25924
18	88889	73160	56187	41647	30320
19	92460	78571	62247	47164	34965
20	95238	83550	68056	52836	39860
21	97222	87662	73485	58353	44905
22	98413	91125	78409	63792	50000
23	99206	93732	82828	68920	55095
24	99603	95887	86616	73815	60140
25	1,00000	97403	89899	78244	65035
26		98485	92551	82284	69680
27		99134	94697	85781	74076
28		99567	96338	88889	78122
29		99783	97601	91453	81818
30		1,000000	98485	93629	85115
31			99116	95338	88012
32			99495	96737	90509
33			99748	97747	92657
34			99874	98524	94406
35			1,00000	99068	95854
36				99456	97003
37				99689	97902
38				99845	98551
39				99922	99051
40				1,00000	99401
41					99650
42					99800
43					99900
44					99950
45					1,00000

$$n = 6$$

k	n=6 n=6	n=7 n=6	n=8 n=6	n=9 n=6
0	0,00108	0,00058	0,00033	0,00020
1	00216	00117	00067	00040
2	00433	00233	00133	00080
3	00758	00408	00233	00140
4	01299	00699	00400	00240
5	02056	01107	00633	00380
6	03247	01748	00999	00599
7	04654	02564	01465	00879
8	06602	03671	02131	01279
9	08983	05070	02946	01798
10	12013	06876	04063	02478
11	15476	09033	05395	03317
12	19697	11713	07093	04396
13	24242	14744	09058	05674
14	29437	18298	11422	07233
15	34957	22261	14119	09051
16	40909	26690	17249	11189
17	46861	31410	20679	13607
18	53139	36538	24542	16384
19	59091	41783	28638	19421
20	65043	47261	33100	22797
21	70563	52739	37729	26434
22	75758	58217	42591	30350
23	80303	63462	47486	34446
24	84524	68590	52514	38781
25	87987	73310	57409	43197
26	91017	77739	62271	47732
27	93398	81702	66900	52268
28	95346	85256	71362	56803
29	96753	88287	75458	61219
30	97944	90967	79321	65554
31	98701	93124	82751	69650
32	99242	94930	85881	73566
33	99567	96329	88578	77203
34	99784	97436	90942	80579
35	99892	98252	92907	83616
36	1,00000	98893	94605	86394
37		99301	95937	88811
38		99592	97036	90949
39		99767	97869	92767
40		99883	98535	94326
41		99942	99001	95604
42		1,00000	99367	96683
43			99600	97522
44			99767	98202
45			99867	98721
46			99933	99121
47			99967	99401
48			1,00000	99620
49				99760
50				99860
51				99920
52				99960
53				99980
54				1,00000

$$n = 7$$

k	m=7 n=7	m=8 n=7	m=9 n=7	k	m=7 n=7	m=8 n=7	m=9 n=7
0	0,00029	0,00016	0,00009	33	0,87034	0,73209	0,58147
1	00058	00031	00017	34	89569	76830	62115
2	00117	00062	00035	35	91753	80155	65970
3	00204	00109	00061	36	93590	83217	69677
4	00350	00186	00105	37	95134	85952	73199
5	0055	00295	00166	38	96358	88407	76512
6	00874	00466	00262	39	97348	90536	79607
7	01311	00699	00393	40	98106	92401	82447
8	01894	01026	00577	41	98689	93970	85044
9	02652	01445	00822	42	99126	95307	87386
10	03642	02005	01145	43	99446	96395	89475
11	04866	02704	01556	44	99650	97296	91311
12	06410	03605	02089	45	99796	97995	92919
13	08246	04693	02745	46	99883	98555	94292
14	10431	06030	03558	47	99941	98974	95463
15	12966	07599	04537	48	99970	99301	96442
16	15880	09464	05708	49	1,00000	99534	97255
17	19143	11593	07080	50		99705	97911
18	22786	14048	08689	51		99813	98444
19	26748	16783	10524	52		99891	98855
20	31002	19845	12614	53		99938	99178
21	35519	23170	14956	54		99969	99423
22	40239	26791	17552	55		99984	99607
23	45076	30629	20393	56		1,00000	99738
24	50000	34716	23488	57			99835
25	54924	38943	26801	58			99895
26	59761	43326	30323	59			99939
27	64481	47754	34030	60			99965
28	68998	52245	37885	61			99985
29	73252	56674	41853	62			99991
30	77214	61057	45909	63			1,00000
31	80857	65284	50000				
32	84120	69371	54090				

$$n = 8$$

k	m=8 n=8	m=9 n=8	k	m=8 n=8	m=9 n=8
0	0,00008	0,00004	37	0,71313	0,55582
1	00016	00008	38	74732	59260
2	00031	00016	39	77910	62851
3	00054	00029	40	80886	66351
4	00093	00049	41	83590	69708
5	00148	00078	42	86068	72929
6	00233	00123	43	88275	75965
7	00350	00185	44	90256	78828
8	00521	00276	45	91973	81481
9	00738	00395	46	93481	83937
10	01033	00555	47	94755	86170
11	01406	00761	48	95851	88206
12	01896	01032	49	96752	90020
13	02494	01370	50	97506	91641
14	03248	01798	51	98104	93060
15	04149	02320	52	98594	94303
16	05245	02961	53	98966	95364
17	06519	03723	54	99262	96277
18	08026	04636	55	99479	97038
19	09744	05697	56	99650	97680
20	11725	06940	57	99767	98202
21	13932	08359	58	99852	98630
22	16410	09979	59	99907	98967
23	19114	11793	60	99946	99239
24	22090	13830	61	99969	99445
25	25268	16063	62	99984	99605
26	28687	18519	63	99992	99724
27	32269	21172	64	1,00000	99815
28	36045	24035	65		99877
29	39922	27071	66		99922
30	43924	30292	67		99951
31	47956	33649	68		99971
32	52043	37149	69		99983
33	56076	40740	70		99992
34	60078	44418	71		99996
35	63955	48128	72		1,00000
36	67731	51872			

$n = 9$

k	m=9 n=9	k	m=9 n=9
0	0,00002	42	0,56835
1	00004	43	60191
2	00008	44	63478
3	00014	45	66676
4	00025	46	69759
5	00039	47	72715
6	00062	48	75529
7	00093	49	78186
8	00138	50	80675
9	00200	51	82995
10	00282	52	85134
11	00389	53	87096
12	00531	54	88877
13	00710	55	90488
14	00938	56	91925
15	01222	57	93205
16	01573	58	94326
17	01999	59	95304
18	02515	60	96150
19	03126	61	96874
20	03850	62	97485
21	04696	63	98001
22	05675	64	98427
23	06795	65	98778
24	08075	66	99062
25	09513	67	99291
26	11121	68	99470
27	12904	69	99611
28	14866	70	99718
29	17005	71	99801
30	19325	72	99862
31	21814	73	99908
32	24471	74	99938
33	27285	75	99961
34	30241	76	99975
35	33324	77	99986
36	36521	78	99992
37	39808	79	99996
38	43165	80	99998
39	46571	81	1,00000
40	50000		
41	53429		

MÉRÉSI EREDMÉNYEK PONTATLANSÁGÁNAK HATÁSA HISZTOGRAMM FELVÉTELÉNÉL

VINCZE ISTVÁN

Összefoglalás

A cikk azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy ha valamely eloszlásból vett minta elemeit — hisztogramm felvétele céljából — osztályokba soroljuk, milyen hatással van a mérési bizonytalanság az egyes osztályokhoz tartozó relatív gyakoriságokra. Feltevézzük, hogy a mérési eredményekhez olyan hiba adódik, amely független magától a mérés eredményétől.

Ha $f(x)$ jelöli a tényleges mérési eredmények eloszlásának sűrűségfüggvényét, míg a hiba eloszlásának sűrűségfüggvénye $g(x)$ (0 várható értékkel és s szórással), akkor az említett relatív hibára a (3) becslést nyerjük; itt ε és δ jelentését az (1) összefüggés adja. Ha a hiba eloszlása szimmetrikus, akkor a (2) egyenlőtlenség érvényes.

A dolgozat további részében két speciális esetet vizsgál, mindkettőben $f(x)$ normális, míg $g(x)$ norm lis, ill. egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye; végül egy gyakorlatban előfordult numerikus példát, ahol a mérési eredmény tapasztalati eloszlása elméletileg ismeretlen jellegű, míg a mérési hiba eloszlása egyenletes.

1. Gyakori eset, hogy valószínűségi sűrűség-függvények hisztogramm útján való megközelítésénél a mérési eredmények leolvasása maga is bizonyos pontatlansággal történik. Így pl. golyók törési szilárdságának vizsgálatánál az egyik eljárás csupán egy legfeljebb 50 kg-os bizonytalansággal adja az egyes darabokra nézve az eredményt, vagyis ha a törési szilárdság pontos értéke x , akkor tapasztalat szerint ennél a mérési eljárásnál az $(x - 50, x + 50)$ intervallumban bármely értéket egyenlő valószínűséggel olvashatunk le. Egy ilyen szélsőséges esettől eltekintve is a mérési eljárásnál a leolvasás általában hibával jár, amely gyakori esetben normális, vagy ahhoz közelálló eloszlást követ. Az alábbiakban a mérés eredményét és a leolvasás bizonytalansága által okozott hibát mint valószínűségi változókat egymástól függetleneknek tételezzük fel. Meggondolásaink tehát alkalmazhatók mindazon esetekben, amikor e függetlenségi feltétel teljesül. Vannak olyan esetek is, amikor a mérési hiba növekszik a n -ért menyniséggel, azonban legtöbbször a függetlenségi feltevés teljesül, mint azt a tapasztalat felhozott példánk esetében is mutatja.

A hisztogramm felvételénél mármint a változó értékének számbavehető közét intervallumokra osztjuk és megállapítjuk az egyes intervallumokba eső mérési eredmények számát. Kérdés, az említett bizonytalanság milyen mértékben torzítja az egyes intervallumokban a relatív gyakoriságot, vagyis az illető intervallumba eső mérési eredmények várható számának és az összes

mérési eredmények számának hányadosát. — E kérdés jelentőséggel bírhat pl. akkor, ha a χ^2 módszert alkalmazzuk, amikor is az egy-egy intervallumba eső mérések számára megbízható gyakoriság-érték szükséges.

Az alábbiakban bizonyos feltételek mellett megállapítjuk azt az eltérést, amely valamely intervallumba eső tényleges gyakoriság és a mérési bizonytalanság következtében mutatkozó gyakoriság várható értékei között fennáll, majd megbecsüljük ennek és a tényleges gyakoriságnak a hányadosát, másszóval az értékek leolvasásának bizonytalansága következtében fellépő relatív hibát.

A szereplő mennyiségek elméleti értékek és a konkrét számolás ezeknek a mennyiségeknek az adatokból történő megbecslése útján vihető keresztül, ami elegendő nagyszámú mérésnél jó közelítésnek tekinthető.*

2. Jelentse a ξ valószínűségi változó valamely mérés eredményét, jelentse továbbá az η valószínűségi változó a mérési eredmény leolvasásának hibáját. Ekkor a mérés általunk észlelt eredménye $\xi + \eta$. Legyenek ξ és η függetlenek, és jelöljük ξ sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel, amely legyen kétszer differenciálható, az η sűrűségfüggvénye $g(x)$, várható értéke 0, szórása s . Tekintsük továbbá azt a $(-\delta, \delta)$ ($\delta > 0$) intervallumot a 0 körül, amelyben az η változó értékeit $1 - \varepsilon$ valószínűséggel veszi fel, vagyis legyen

$$(1) \quad \int_{-\delta}^{\delta} g(x) dx = 1 - \varepsilon.$$

Fenti jelöléseinkkel a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

Tegyük most fel, hogy N számú értéket mérünk, amelyek valamely (a, b) intervallumban helyezkednek el és osszuk fel az (a, b) intervallumot (pl. ekvidisztans) részintervallumokra. Egy ilyen részintervallum legyen (α, β) , amelybe essék a N közül *ténylegesen* — vagyis ξ -re nézve — n számú mérési eredmény, míg a *leolvasott* értékek — vagyis $\xi + \eta$ értékeinek — száma legyen n' . Ekkor a relatív gyakoriságok várható értékei a következők:

$$M\left(\frac{n}{N}\right) = p = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$M\left(\frac{n'}{N}\right) = P = \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx.$$

* A kérdést gyakorlati feladat kapcsán Kollár Károly vetette fel; az itt tárgyalt általánosabb problémát Rényi Alfréd fogalmazta meg.

A relatív gyakoriságok eltérésének várható értéke

$$P - p = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y) - f(x)] g(y) dy \right) dx.$$

Bontsuk ezt a kifejezést három részre a következő módon:

$$\begin{aligned} P - p &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} [f(x-y) - f(x)] g(y) dy \right) dx + \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\delta}^{\infty} [f(x-y) - f(x)] g(y) dy \right) dx + \\ &+ \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{-\delta}^{\delta} [f(x-y) - f(x)] g(y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Ha most az $f(x)$ sűrűségfüggvény maximumát m -el jelöljük, akkor (1)-re való tekintettel az első két integrál együttes értéke abszolút értékben legfeljebb $m(\beta - \alpha)\varepsilon$.

A harmadik tag megbecslésére fejtsük az $f(x - y)$ függvényt hatvány-sorba y szerint:

$$f(x - y) = f(x) - yf'(x) + \frac{y^2}{2}f''(x^*),$$

ahol x^* valamely alkalmasan választott érték az $(x - |y|, x + |y|)$ intervallumban. Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-y) - f(x)] g(y) dy &= \\ &= f'(x) \int_{-\delta}^{\delta} y g(y) dy + \frac{1}{2} f''(x^*) \int_{-\delta}^{\delta} y^2 g(y) dy. \end{aligned}$$

Itt mindenesetre

$$\int_{-\delta}^{\delta} y^2 g(y) dy < s^2$$

és

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} y g(y) dy \right| \leq \left| \int_{\delta}^{\infty} y g(y) dy \right| + \left| \int_{-\infty}^{-\delta} y g(y) dy \right| \leq s\sqrt{\varepsilon}$$

és felírhatjuk P relatív hibájára a következő becslést :

$$(2) \quad \frac{P-p}{p} < \frac{\beta-\alpha}{p} [\varepsilon \cdot \max f(x) + \\ + s \sqrt{\varepsilon} \max_{(\alpha-\delta, \beta+\delta)} |f'(x)| + \frac{1}{2} s^2 \max_{(\alpha-\delta, \beta+\delta)} |f''(x)|].$$

Ha az η eloszlás szimmetrikus, akkor

$$\int_{-\delta}^{\delta} y g(y) dy = 0$$

és egyenlőtlenségünk a következő egyszerűbb alakot ölti :

$$(2') \quad \frac{P-p}{p} < \frac{\beta-\alpha}{p} [\varepsilon \max f(x) + \frac{1}{2} s^2 \max_{(\alpha-\delta, \alpha+\delta)} |f''(x)|].$$

Megjegyezzük, hogy figyelemmel kell lenni a P relatív gyakoriság szó-
rására is, ami $\sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}$ és ami N növelésével tetszőlegesen kicsinnyé tehető.

3. Rényi Alfréd jegyezte meg, hogy eredményünk alkalmazható abban az esetben is, ha az elkövetett hiba arányos a mérési eredmény nagyságával : $\eta = \xi \eta'$, ahol az η' változó független a mérés hibamentes ξ eredményétől. Ekkor a mérés végső eredménye $\xi + \xi \eta' = \xi (1 + \eta')$. Meggondolásainkat ugyanis alkalmazhatjuk a $\log \xi + \log (1 + \eta')$ független valószínűségi változók összegére.

4. Lássuk, hogyan becsülhető meg konkrét esetben számszerűen a relatív hiba, illetve hogyan tehető a gyakorlati követelményeknek megfelelően kicsinnyé.

Ki kell indulnunk mindenekelőtt az alapintervallum valamely felosztásából. Ez lehet egyenlő hosszúságú intervallumok választása, de megjegyezzük, hogy a fenti egyenlőtlenség is utal arra — amit más meggondolásból is következtetni szoktak, — hogy ahol kis valószínűségű intervallumok lépnek fel (vagyis a gyakorlati esetekben a szélső intervallumok), ezek hosszabbakra választandók, ami által p értéke nem válik túlságosan kicsinnyé. Az intervallumok megválasztása után p értéke P -vel becsülhető, amivel tulajdonképpen az elkövetett hibát a tapasztalati relatív gyakorisághoz viszonyítjuk, s ennek kellő kicsiny volta ugyancsak megnyugtató a felvetett kérdés szempontjából.

Az $|f'(x)|$ és $|f''(x)|$ maximumának megbecslése általában kétféle módon történhet. Ha ismerjük az eloszlás jellegét, akkor elméleti meggondolásokból a tapasztalati paraméterekkel nyerhetünk becslést ; így pl. ha tudjuk, hogy normális, vagy ahhoz közeleső eloszlásról van szó, akkor az átlag és a tapasztalati szórás segítségével ez a becslés könnyen elvégezhető. Ha előttünk ismeretlen eloszlással állunk szemben, akkor a sűrűségfüggvény első közelítésének tekinthetjük azt a függvényt, amely az egyes intervallumok középpontjában a $\frac{P_k}{x_{k+1} - x_k}$ értéket veszi fel. Itt x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, r$) jelöli az intervallumok

osztópontjait, P_k a relatív gyakoriság megfelelő tapasztalati értékét az (x_k, x_{k+1}) intervallumban, és pl. $f''(x)$ értékei közelesnek a következő értékhez :

$$(3) \quad \frac{P_{k+1} - 2P_k + P_{k-1}}{(x_{k+1} - x_k)^3}$$

feltéve, hogy itt a szomszédos közöket egyenlő hosszúságúaknak választottuk. A gyakorlatban előforduló eseteknél a sűrűségfüggvény görbületének túlságosan gyors megváltozásával nem kell számolni, s így az ily módon kapott érték tájékoztat $f''(x)$ nagyságrendje felől.

Az alábbiakban megvizsgáljuk azt az esetet, amikor η normális, majd amikor egyenletes eloszlást követ. Az előző eset a gyakorlatban leginkább előforduló, míg az utóbbira vonatkozó alábbi eredményünk megnyugtató clyan szélsőséges esetek szempontjából, amelyet bevezetésünkben említettünk. Mindkét esetben ξ -t normális eloszlásúnak választjuk. Végül egy, a gyakorlatban előfordult példát ismertetünk, ahol az eloszlás normálistól különböző, ismeretlen jellegű.

5. Legyen ξ normális eloszlású 0 várható értékkel és σ szórással, η ugyancsak normális eloszlású 0 várható értékkel és s szórással. Tekintsünk ezret meg nem haladó mérési eredményt, amelyek — ha s kicsiny σ -hoz képest, ami a tárgyalt probléma gyakorlati vonatkozása szempontjából első sorban bír érdekességgel — nagy valószínűséggel a $(-3\sigma, +3\sigma)$ intervallumba esnek ; osszuk ezt fel 12 egyenként $\frac{\sigma}{2}$ hosszúságú intervallumra.

Ekkor

$$\beta - \alpha = x_{k+1} - x_k = \frac{\sigma}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 11.$$

Válasszuk δ -t 3 s -nek, ekkor $\varepsilon = 0,0027$; tekintsük továbbá azt az esetet, amikor a leolvasási hiba szórásának hatszorosa egy egész intervallumot tesz ki : $6s = \frac{\sigma}{2}$.

Ha (2') formulánk segítségével meghatározzuk a P relatív gyakoriságok viszonylagos hibáinak becslését a 12 intervallumra a következő értéket kapjuk (itt k jelenti balról kezdve az intervallum sorszámát):

k	A relatív hiba kisebb, mint
1 és 12	0,146
2 és 11	0,094
3 és 10	0,019
4 és 9	0,009
5 és 8	0,007
6 és 7	0,009

Az első és utolsó intervallumra kapott 14,6%-os relatív hiba nem jelentős, tekintettel arra, hogy az ide eső értékek száma a gyakorlatban nem haladja meg a 10-et.

Megjegyezzük, hogy ebben az esetben közvetlen (és valamivel pontosabb) becslést kapunk, ha figyelembe vesszük a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét, ami normális eloszlásról lévén szó :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + s^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + s^2)}}$$

6. Tekintsük most azt az esetet, amikor ξ eloszlása normális, míg η eloszlása egyenletes. Legyen η sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq x_0 - \delta \\ \frac{1}{2\delta}, & \text{ha } x_0 - \delta < x \leq x_0 + \delta \\ 0, & \text{ha } x_0 + \delta < x. \end{cases}$$

Ekkor $s^2 = \frac{\delta^2}{3}$. Válasszuk most 2δ -t egy teljes intervallum hosszúságúnak :

$2\delta = \frac{s}{2}$. Ebben az esetben $\varepsilon = 0$.

Kiszámítva az egyes intervallumokban a relatív hibákra a (2') egyenlőtlenségből kapható becsléseket, a következő táblázatot írhatjuk fel :

k	A relatív hiba kisebb, mint
1 és 12	0,103
2 és 11	0,051
3 és 10	0,022
4 és 9	0,010
5 és 8	0,010
6 és 7	0,015

7. Csapágygolyók törőszilárdságára végzett összesen 271 mérés az alábbi táblázatban feltüntetett eredményeket szolgáltatta. Tapasztalat szerint a mérési eljárásnál a valódi értéktől számítva ± 50 kg-ig minden érték leolvasása egyenlő valószínűséggel előfordulhat. Az értékek csoportosításánál a közök hosszát 500 kg-nak választottuk.

Az osztályközök sorszáma	Törőszilárdság értéke 100 kg-ban	Az értékek gyakorisága	Az értékek relatív gyakorisága
1	20 —25	3	0,0111
2	25,1—30	2	0,0074
3	30,1—35	14	0,0516
4	35,1—40	20	0,0738
5	40,1—45	18	0,0664
6	45,1—50	41	0,1513
7	50,1—55	71	0,2620
8	55,1—60	45	0,1661
9	60,1—65	36	0,1328
10	65,1—70	20	0,0738
11	70,1—75	1	0,0037
		271	1,0000

A (2') formula alkalmazásánál $x_{k+1} - x_k = 5$, $\delta = 0,5$, $s^2 = 0,083$. Ha az $f''(x)$ -re nézve a (3) alatt megjelölt közelítést használjuk, akkor azt találjuk, hogy az 1—10-ig terjedő intervallumokban a relatív gyakoriságok viszonylagos hibájának nagyságrendje 1%, míg a 11. intervallumban 4%. Ilyen módon a leolvasási hiba ellenére az értékek itt megválasztott osztályba sorolása és az egyes osztályokban kapott gyakoriságok további felhasználása teljesen indokolt.

ВЛИЯНИЕ НЕТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГИСТОГРАММ

И. Винце

Резюме

Статья рассматривает вопрос, какое влияние оказывает неточность измерения на частоты групп, при группировке элементов выборки с целью построения гистограмм, взятых из некоторого распределения? Предполагаем, что погрешность получающаяся при измерениях не зависит от самого результата измерений.

Если $f(x)$ обозначает плотность распределения фактических результатов измерений, когда плотность распределения погрешности — $g(x)$, со средним значением 0 и дисперсией s то относительно упомянутой погрешности получаем оценку (3); здесь значение ε и δ дается зависимостью (1).

Если распределение погрешности является симметричным, то имеет место неравенство (2).

В дальнейшем работа занимается двумя специальными случаями. В обоих случаях распределение $f(x)$ является нормальным, а распределение $g(x)$ нормальным или равномерным. В заключение рассматривается один, — взятый из практики — пример, где характер распределения $f(x)$ неизвестен, а распределение $g(x)$ является равномерным.

DIE WIRKUNG DER FEHLER VON MESSERGEBNISSEN BEI DER AUFNAHME EINES HISTOGRAMMS

ST. VINCZE

Zusammenfassung

Die Elemente einer Stichprobe seien zwecks Aufnahme eines Histogrammes in Klassen eingeteilt. Dann wird untersucht, welche Wirkung die Messungenauigkeit auf die zu den einzelnen Klassen gehörigen relativen Häufigkeiten hat. Es wird angenommen, dass zu den Messergebnissen ein von ihnen unabhängiger Fehler hinzukommt.

Es bezeichne $f(x)$ die Dichtefunktion der richtigen Messergebnisse; die Dichtefunktion des Fehlers mit dem Mittelwert 0 und Streuung s sei mit $g(x)$ bezeichnet. Wir erhalten für den obenerwähnten relativen Fehler die Abschätzung (3), wobei die Bedeutung von ε und δ aus (1) abgelesen werden kann. Ist die Verteilungsfunktion des Fehlers symmetrisch, so gilt die Ungleichung (2).

Im Weiteren werden zwei Spezialfälle behandelt. $f(x)$ ist in beiden Fällen die Dichtefunktion der normalen Verteilung, $g(x)$ ist in einem Falle die Dichtefunktion der normalen Verteilung, im anderen Falle die Dichtefunktion der Gleichverteilung.

Zum Schluss wird ein numerisches Beispiel aus der Praxis berechnet: $f(x)$ ist eine empirische Verteilung, während $g(x)$ die Dichtefunktion der Gleichverteilung.

A SELEJTARÁNY BAYES-FÉLE VALÓSZÍNŰSÉGI HATÁRAIRA VONATKOZÓ DUALITÁSI ELVRŐL

SARKADI KÁROLY

Összefoglalás

A cikk *Steinhaus* [6] és *Oderfeld* ([3], [5]) cikkeihez kapcsolódik. Ezek a cikkek kritika tárgyává teszik azt az álláspontot, hogy a Bayes-szabály alkalmazásán alapuló módszert ki kell rekeszteni a matematikai statisztikai módszerek közül. Rámutatnak arra, hogy a Bayes-szabály alkalmazása sok esetben ugyanarra az eredményre vezet, mint a megbízhatóság elvén alapuló módszer. Az *Oderfeld* említett cikkeiben tárgyalt dualitási elv is egy ilyen jellegű megállapítást mond ki, a selejtvizsgálatra vonatkozóan. A szerző itt ezt a dualitási elvet általánosítja a hipergeometrikus, polihipegeometrikus, polinomiális és Poisson-eloszlás esetére.

Bevezetés

J. Oderfeld több munkájában (lásd pl. [3] és [4]) foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy adott mintavételi eljárás eredményéből hogyan állapíthatók meg adott valószínűséggel a tétel selejtarányának határai. Ezeket a határokat retrospektív paramétereknek nevezzük szemben az általánosan használt prospektív paraméterekkel, amelyek ismertnek feltételezett selejtarány esetére adnak tájékoztatást a mintavételi eljárás eredményére nézve. *Oderfeld* [3] munkájában kimutatja, hogy a retrospektív paraméterek meghatározása a priori egyenletes eloszlás feltevése mellett visszavezethető a prospektívékére. *Oderfeld* ezt az eredményt dualitás elvének nevezi.

A dualitás elvének gyakorlati jelentőségét jól megvilágítják *Steinhaus* [6] és *Oderfeld* ([3], [4]). Ismeretes, hogy a matematikai statisztika alkalmazásában az adott megbízhatóságú konfidencia-intervallum *J. Neyman*tól származó módszere (a prospektív módszer) szinte teljesen kiszorította a Bayes-tétel alkalmazásán alapuló (retrospektív) módszert. Ennek az az oka, hogy a retrospektív problémára szabatos választ csak akkor lehet adni, ha az a priori eloszlás ismert. Ezen felül olyan esetekben, amikor a meghatározandó mennyiség nem valószínűségi változó, hanem állandó szám, akkor a priori eloszlásról egyáltalában, elvileg nem lehet beszélni, ilyen esetekben tehát csak *Neyman* módszere alkalmazható. A selejtarány esetében azonban nem ez a helyzet, azt joggal tekinthetjük valószínűségi változónak, viszont az a priori eloszlás általában nem ismeretes. A régebben helyesnek tekintett Bayes-szabály szerint abban az esetben, ha az a priori eloszlás nem ismeretes, a priori egyenletes eloszlással kell dolgoznunk. Ez nyilvánvaló önkényesség és joggal kifo-

gásolható. Ezzel szemben a prospektív kérdésre mindig szabatos választ tudunk adni.

Steinhaus és *Oderfeld* említett cikkeikben rámutatnak arra, hogy ennek ellenére a prospektív módszer sem mentes az önkényességtől. A módszer exakt feleletet ad egy bizonyos kérdésre, de az önkényességet azzal követi el, hogy nem az eredetileg feltett kérdésre válaszol. Miután a mintát mindig azért veszik, hogy abból a tételre következtetést vonjanak le, így a mintavétel alkalmából a retrospektív kérdés természetes módon merül fel. Mint-hogy tehát a prospektív módszer sem mentes az önkényességtől, nem lehet azt egyedül helyes módszernek tekinteni.

A prospektív módszer nem körültekintő alkalmazása éppen úgy okozhat hibát, mint a retrospektív módszeré. Az alternatív mintavételnél a gyakorlati szakemberek, különösen az átvető, rendszerint a retrospektív kérdést szokták feltenni: ha az n elemű mintában k selejtes darabot találtam, milyen határok között lehet a tétel selejtaránya? A modern módszer szerint erre a kérdésre nem szabad közvetlenül választ adni, hanem meg kell adni azokat a selejtarányhatárokat, amelyeknél a mintavételi eljárás már majdnem biztosan elfogadással, illetve elutasítással végződik. A gyakorlati szakember így kénytelen ezzel a válasszal beérni és nem teljesen megnyugodva ugyan, de többnyire úgy használja fel a megadott selejtarányokat, mintha azokat az eredeti kérdésre kapta volna válaszul.

Az említett dualitási elvből tudjuk, hogy a priori egyenletes eloszlás feltevése mellett — hacsak n nem nagyon kicsi — a retrospektív paraméterek igen közel megegyeznek a prospektívekkel, az egyszeres tervek esetében. A matematikus tehát a retrospektív problémát megkerülő válaszával a gyakorlati szakembert tulajdonképpen az a priori egyenletes eloszlás alkalmazására készíti. Ez bizonyosan helytelen, mert az a priori egyenletes eloszlás általában távolról sem egyezik meg a valósággal.

A dualitási elv gyakorlati jelentősége kettős: egyrészt rámutat erre a hibára, amely a mintavételi gyakorlatban sűrűn előfordul, másrészt lehetővé teszi módszer kidolgozását ennek a hibának a kiküszöbölésére. Ez a módszer — *Oderfeld* a priori béta eloszláson alapuló módszere — nem önkényes a priori eloszlással dolgozik, hanem az elmúlt átvételek tapasztalatai alapján állapítja meg az a priori eloszlást.

A jelen értekezés 1—5. pontja a dualitási elv kiterjesztésével foglalkozik. Látni fogjuk, hogy az igaz akkor is, ha nem tételezzük fel a minta selejtarányának binomiális eloszlását, hanem a véges tétel esetén valóságban fennálló hipegeometrikus eloszlást vesszük figyelembe. Megmutatjuk továbbá, hogy dualitási elv állítható fel akkor is, ha egyszerű alternatív helyett több osztályozási lehetőség van, végül akkor is, ha a folytonos eloszlású tételben a hibák száma Poisson-eloszlást követ.*

A dualitási elvnek ez a kiterjesztése elvi jelentőségű, rámutat a tétel matematikai alapjára.

A 6. pont a dualitási elvnek a nem egyenletes a priori eloszlás esetére való alkalmazhatóságának kérdésével foglalkozik. *Oderfeld* [3] kimutatta, hogy a priori béta eloszlás esetére alkalmazható a dualitási elv s megállapítja, hogy az a priori béta eloszlás munkahipotézisül a gyakorlatban általában megfelelő.

* Az ebben a cikkben tárgyalt problémákat *Rényi Alfréd* vetette fel.

Itt látni fogjuk, hogy ha az a priori eloszlás béta-eloszlások keveréke, akkor is fennáll a dualitási elvnek egy — bár kissé bonyolultabb — formája. Ha az összetevő béta-eloszlások száma nem nagy, úgy az összefüggés gyakorlati szempontból kezelhető. Ez azért jelentős, mert előfordulhat, hogy a selejtarány tapasztalati eloszlása béta-eloszlással nem közelíthető meg, de elég jól meg tudjuk közelíteni két, illetve három béta-eloszlás keverékével. (Mint ismeretes, bármely folytonos sűrűségfüggvénnyel rendelkező $(0, 1)$ intervallumbeli valószínűségeloszlás tetszés szerinti mértékben megközelíthető véges sok béta-eloszlás keverékével.) Felhasználhatjuk továbbá az eredményt úgy is, hogy figyelembe vesszük a gyártási folyamat megváltozásának a lehetőségét úgy, hogy felteszünk egy eloszlást arra az esetre, ha nem változik a gyártás, egy eloszlást arra az esetre, ha a gyártás megváltozik, megbecsüljük a két lehetőség valószínűségét, képezzük az ezekkel, mint súlyokkal vett keverék-eloszlást és ezt tekintjük a priori eloszlásnak.

1. A dualitás elve

A következőkben azt a mintavételi *eredményt*, hogy n elemű mintában k darab selejtest találtunk, röviden (k, n) eredménynek fogjuk nevezni. Azt a mintavételi *tervet*, amely úgy intézkedik, hogy n elemű mintát kell venni, és a tételt el kell fogadni, ha a mintában legfeljebb k selejtes darab van, ellenkező esetben pedig el kell utasítani, a $k||n$ jellel jelöljük.

Legyen $0 < \beta_2 < \beta_1 < 1$; β_2 0-hoz, β_1 1-hez közeledő szám legyen.

Jelöljük $R_i(k, n)$ -nel ($i = 1, 2$) azt a selejtarányt, hogy β_i legyen annak a posteriori valószínűsége a (k, n) eredmény alapján, hogy a tétel selejtaránya kisebb $R_i(k, n)$ -nél. Ezt a két számot nevezzük a (k, n) eredmény retrospektív paraméterének.

Jelöljük $P_i(k||n)$ -nel ($i = 1, 2$) azt a selejtarányt, amely mellett a k n mintavételi eljárás a tételt β_i valószínűséggel visszautasítja. Ezt a két $P_i(k||n)$ számot nevezzük a $k||n$ terv prospektív paramétereinek.

Oderfeld kimutatta, hogy a priori egyenletes eloszlás feltevése mellett

$$R_i(k, n) = P_i(k || n + 1) \quad (i = 1, 2)$$

és így a retrospektív paraméterek meghatározása visszavezethető a prospektívékére. A fenti összefüggés bizonyítása lényegében a

$$(1) \quad \mathbf{P}(\zeta < p | \kappa_n = k) = \mathbf{P}(\kappa_{n+1} \geq k + 1 | \zeta = p)$$

összefüggés igazolásán alapszik. itt ζ a selejtarány, κ_n az n elemű mintában talált hibás darabok száma; k pozitív egész szám, p 1-nél kisebb pozitív szám. Ez az összefüggés már *Castelnuovo* valószínűségszámításról szóló könyvében is szerepel [1].

Az (1) összefüggést Oderfeld a Bayes-tétel és az

$$(2) \quad \int_0^p (n+1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} dx = \sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i (1-p)^{n+1-i}$$

azonosság felhasználásával mutatja ki. Az utóbbi azonosságot analitikus úton, integrál maradéktagos Taylor-sorral igazolja, *Kendall* nyomán. Megjegyezzük, hogy mint ismeretes, a (2) valószínűségszámítási úton is igazolható. Így tulajdonképpen a (2) azonosságra nincs is szükség, csak a baloldalon lévő kifejezés valószínűségi értelmezésére.

Mint látható, *Oderfeld* feltételezi, hogy a minta darabszáma elhanyagolható kicsiny a tétel darabszámához képest, és így a selejtdarabok számát a mintában binomiális eloszlásúnak tekinthetjük.

A következőkben tehát az (1) összefüggés általánosításával foglalkozunk.

2. Hipergeometrikus eloszlás

Ha a tétel véges, elemeinek száma N , akkor, mint azt az alább bebizonyítjuk, az (1) helyett az alábbi pontosabb összefüggés van érvényben:

$$(3) \quad P\left(\zeta \leq \frac{M}{N} \mid \kappa_{nN} = k\right) = P\left(\kappa_{n+1, N+1} \geq k+1 \mid \zeta = \frac{M+1}{N+1}\right).$$

Itt κ második indexe a tétel darabszámát jelzi, amelyből a mintát vettük, M egész számot jelent, egyébként az előző pontban használt jelöléseket alkalmazzuk. Az a priori feltevés természetesen ebben az esetben az, hogy a selejtarány 0-tól 1-ig bármelyik N nevezőjű tört értékét egyforma valószínűséggel veheti fel.

Ez az összefüggés ebben a formában szerepel már *Simon* minőségellenőrzési kézikönyvében is [5], azzal, hogy *Molina* ezt bebizonyította. Az idézett helyen [2] azonban sem a tétel, sem bizonyítása nem található.

A (3) bebizonyítása céljából először gondoljuk el a következő modellt: egy $N+1$ darabból álló tétel darabjai legyenek 1-től $N+1$ -ig sorszámmal ellátva. Vegyünk ki ebből egy $n+1$ elemű mintát, s jelentsék $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ a minta elemeinek tételbeli sorszámain. Megjegyezzük, hogy minta alatt ebben a cikkben mindig visszatevés nélküli mintát értünk. Tehát a jelen esetben a ξ -k között egyenlők nem fordulhatnak elő. Rendezzük a ξ -ket nagyság szerint s a rendezett minta elemeit jelöljük $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}$ -gyel.

Könnyen belátható, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$(4) \quad P(\eta_{k+1} \leq M+1 \mid \eta_{k+1} = \xi_1) = P(\eta_{k+1} \leq M+1).$$

A ξ_1 ugyanis sem az eloszlása szempontjából, sem az η_{k+1} definíciója szempontjából nincs kitüntetve a többi ξ közül, helyére bármelyiket írhatnánk, a (4) baloldalán álló valószínűség nem változik, tehát ugyanakkora, mint a feltétel nélküli valószínűség.

Bebizonyítható továbbá, hogy

$$(5) \quad P(\eta_{k+1} \leq M+1) = P\left(\kappa_{n+1, N+1} \geq k+1 \mid \zeta = \frac{M+1}{N+1}\right).$$

Előbbi $(N+1)$ elemű sorszámozott tételünkben nevezzük az első $(M+1)$ -et selejtesnek, a többit jónak. Hogy ilyen feltétel mellett a tételből

kihúzott $(n + 1)$ elemű mintában legalább $k + 1$ a selejtes, az ugyanazt jelenti, minthogy a nagyságszerinti $(k + 1)$ -ik, legfeljebb $(M + 1)$ -ik sorszáma az eredeti tételben, tehát még selejtes. Az (5) két oldala azonban ennek a két egymással megegyező eseménynek a valószínűségét tünteti fel. Tehát az (5) igaz, mert természetes, hogy az (5) jobboldalának értéke nem függ attól, hogy azt az így elgondolt tételre, vagy egy tetszőleges, a feltételnek megfelelő $N + 1$ elemű tételre vonatkoztatjuk.

Végül bebizonyítjuk, hogy

$$(6) \quad P(\xi_1 \leq M + 1 \mid \eta_{k+1} = \xi_1) = P\left(\zeta \leq \frac{M}{N} \mid \kappa_{nN} = k\right).$$

Hogy a (6)-ot belássuk, tekintsünk ismét egy $N + 1$ elemű sorszámozott tételt és vegyük ki ebből taláalomra a ξ_1 mintaelemet, s a tételnek maradt még N eleme. Ebben az N elemű tételben nevezzük a ξ_1 -nél kisebb sorszámuakat selejteseknek, a többit jónak. Ezáltal nyertünk egy olyan tételt, amelynek a selejtaránya $\frac{\xi_1 - 1}{N}$ 0 és 1 között bármely N nevezőjű tört értékét

egyforma valószínűséggel veheti fel, tehát a priori feltevésünk szerinti. Ezután kihúzzuk még az N elemű tételből a ξ_2, \dots, ξ_{n+1} n elemű mintát. Akkor egyrészt az az esemény, hogy a ξ_1, \dots, ξ_{n+1} $(n + 1)$ elemű mintában ξ_1 nagyság szerint a $(k + 1)$ -ik lesz, megegyezik azzal az eseménnyel, hogy a ξ_2, \dots, ξ_{n+1} n elemű mintában pontosan k darab lesz selejtes, tehát az $\eta_{k+1} = \xi_1$ esemény megegyezik a $\kappa_{nN} = k$ eseménnyel. Másrészt, mivel a tétel selejtaránya $\frac{\xi_1 - 1}{N}$, tehát az, hogy $\xi_1 \leq M + 1$ azt jelenti, hogy az N elemű tétel selejtaránya $\zeta \leq \frac{M}{N}$. A (6) tehát igaz és természetesen igaz marad

akkor is, ha azt nem modell segítségével képzett tételre, hanem tetszőleges olyan N elemű tételre vonatkoztatjuk, amely az a priori feltevésnek és a feltételnek megfelel.

A (4), (5) és (6) egyenletekből következik a (3). Ezzel tehát a dualizmus elvét bebizonyítottuk véges tétel esetére is. Az (1) a (3)-ból is nyerhető határátmenet segítségével.

A (3) összefüggést még más úton is igazoljuk. Ha a Bayes-tételt alkalmazzuk, arra jutunk, hogy (3) igazolásához a következő azonosság bizonyítása szükséges:

$$(7) \quad \frac{\sum_{i=k}^M \binom{i}{k} \binom{N-i}{n-k}}{\sum_{i=k}^{N-n+k} \binom{i}{k} \binom{N-i}{n-k}} = \frac{\sum_{i=k+1}^{n+1} \binom{M+1}{i} \binom{N-M}{n+1-i}}{\binom{N+1}{n+1}}.$$

Ez az azonosság azonban ugyanazt mondja ki, mint az (5) összefüggés. Tehát a (3)-at a Bayes-tétel alkalmazásával és az (5) egyenlet bizonyításával is igazolhatjuk, a (4)-et és a (6)-ot a Bayes-tétel pótolja.

Ha az *Oderfeld* által követett utat követtük volna, akkor még a (7)-et is aritmetikai úton kellett volna bizonyítanunk. Ez az út igen bonyolultnak látszik.

A következő pontokban látni fogjuk, hogy fentebbi bizonyításunknak az is előnye, hogy könnyen kiterjeszthető.

3. Polihipergeometrikus eloszlás

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha az egyszerű alternatíva helyett általában $s + 1$ osztályozási lehetőség van, a dualizmus elve kiterjeszthető a következő alakban:

$$(8) \quad \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \zeta_i \leq \sum_{i=1}^r \frac{M_i}{N} \right) \middle| \prod_{r=1}^s [\kappa_{rnN} = k_r] \right) = \\ = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \kappa_{i,n+s, N+s} \geq \sum_{i=1}^r k_i + r \right) \middle| \prod_{r=1}^s \left(\zeta_r = \frac{M_r + 1}{N + s} \right) \right).$$

Itt ζ_i jelenti a tételben az i -edik osztályba tartozó elemek részarányát, κ_{inN} jelenti az N elemű tételből vett n elemű mintában az i -edik osztályba tartozó elemek számát. A produktumjel azt jelenti, hogy az utána álló esemény a futó index mindegyik értékére egyidejűleg fennáll.

A (8) a priori Bose–Einstein-eloszlás esetén érvényes, amikor tehát a tétel bármely $s + 1$ osztályba való eloszlása egyenlően valószínű.

Most egy $N + s$ elemű sorszámozott tételt gondolunk el s ebből kivesszük a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+s}$ ($n + s$)-elemű mintát. Legyen

$$\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{n+s}$$

a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+s}$ -ből,

$$\eta_1^* < \eta_2^* < \dots < \eta_s^*$$

a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ -ből alakított rendezett minta. Felírható, hogy

$$(9) \quad \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} \leq \sum_{i=1}^r M_i + r \right) \middle| \prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} = \eta_r^* \right) \right) = \\ = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} \leq \sum_{i=1}^r M_i + r \right) \right).$$

A (9)-et hasonló módon láthatjuk be, mint a (4)-et. Az $n + s$ elemű minta első s eleme nincs kitüntetve, az $\eta_1^*, \dots, \eta_s^*$ -ot képezhetnénk a minta bármelyik s eleméből, a (9) baloldala nem változik, tehát nem változik meg akkor sem, ha a feltételt elhagyjuk.

Továbbá belátható a

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_r \leq \sum_{i=1}^r M_i + r \right) \right) = \\
 (10) \quad & = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \kappa_{i,n+s,N+s} \geq \sum_{i=1}^r k_i + r \right) \middle| \prod_{r=1}^s \left(\zeta_r = \frac{M_r + 1}{N + s} \right) \right)
 \end{aligned}$$

összefüggés érvényessége is, teljesen hasonló módon, mint az (5)-é, csak most az $N + s$ elemű tételnek azokat az elemeit tekintjük r -edik tulajdonságúaknak, amelyeknek sorszáma

$$\geq \sum_{i=1}^{r-1} M_i + r - 1 \quad \text{de} \quad \leq \sum_{i=1}^r M_i + r.$$

Végül a (6)-hoz hasonlóan belátható a

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_r^* \leq \sum_{i=1}^r M_i + r \right) \middle| \prod_{r=1}^s \left(\eta_r = \eta_r^* \right) \right) = \\
 (11) \quad & = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\zeta_i \leq \sum_{i=1}^r \frac{M_i}{N} \right) \middle| \prod_{r=1}^s [\kappa_{r,n} = k_r] \right)
 \end{aligned}$$

összefüggés is. Ha az $N + s$ elemű tételből kivesszük egyelőre a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ s elemű mintát, a megmaradó elemek egy N elemű tételt alkotnak. Ebben r -edik tulajdonságúnak tekintjük azt a $\gamma_r^* - \gamma_{r-1}^* - 1$ elemet (itt $\gamma_0^* = 0$ és $\gamma_{s+1}^* = N + s + 1$ értendő), amelynek eredeti sorszáma $> \gamma_{r-1}^*$, de $< \gamma_r^*$. Ezáltal N elemű tételünk eloszlása Bose–Einstein-féle lesz, vagyis az a priori feltevéssel megegyező. Ugyanúgy tehát, mint előbb az (5)-nél, arra jutunk, hogy ilyen a priori feltevés mellett a (11) áll.

A (9), (10) és (11)-ből következik a (8).

4. Polinomiális eloszlás

Ha N végtelenhez tart, a (8) átmegy a

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \zeta_i \leq \sum_{i=1}^r p_i \right) \middle| \prod_{r=1}^s [\kappa_{r,n} = k_r] \right) = \\
 (12) \quad & = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \kappa_{i,n+s} \geq \sum_{i=1}^r k_i + r \right) \middle| \prod_{r=1}^s [\zeta_r = p_r] \right)
 \end{aligned}$$

képletbe. Itt κ_{rn} jelenti az n elemű mintában talált r -edik tulajdonságú elemek számát. A (12) akkor áll, ha a tétel a priori eloszlása a Bose—Einstein-eloszlásnak megfelelő folytonos eloszlás, az ú. n. intervallum-eloszlás, azaz minden lehetséges $s + 1$ osztályba való eloszlás egyforma valószínűség-sűrűségű.

Ebben a pontban a (12)-t közvetlenül, határátmenet nélkül is be fogjuk bizonyítani.

Most legyenek ξ_1, \dots, ξ_{n+s} a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású független valószínűségi változók, η_i és η_i^* értelmezése legyen ugyanaz, mint az előző pontban; itt az η -k, ill. η^* -ok között egyenlők is lehetnek, de csak 0 valószínűséggel. Felírhatjuk ismét a

$$(13) \quad \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} \leq \sum_{i=1}^r p_i \right) \mid \prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} = \eta_r^* \right) \right) = \\ = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} \leq \sum_{i=1}^r p_i \right) \right)$$

összefüggést. A (13) baloldala most sem változik meg, ha $\eta_1^*, \dots, \eta_s^*$ -et a ξ_1, \dots, ξ_{n+s} sorozat tetszőleges s eleméből képezzük. Ha különböző kombinációkat veszünk, az így adódó különböző feltételek egymást — 0 valószínűségű kivételtől eltekintve — kizárják, tehát a valószínűség nem változik, ha a feltételt elhagyjuk.

Bebizonyíthatjuk továbbá, hogy

$$(14) \quad \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \kappa_{i, n+s} \geq \sum_{i=1}^r k_i + r \right) \mid \prod_{r=1}^s [\zeta_r = p_r] \right) = \\ = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\eta_{\sum_{i=1}^r k_i + r} < \sum_{i=1}^r p_i \right) \right).$$

Annak a valószínűsége ugyanis, hogy bármelyik ξ_i x és $x + p_r$ közé essék, p_r , tehát ugyanaz, mint annak valószínűsége, hogy az $n + s$ elemű minta bármely eleme r -edik tulajdonságú legyen, ha az r -edik tulajdonsághoz tar-

tozó valószínűség p_r . Az viszont, hogy a ξ_i -k közül a nagyságrendben $\sum_{i=1}^r k_i + r$ -edik 0 és $\sum_{i=1}^r p_i$ közé essék, azt jelenti, hogy legalább $\sum_{i=1}^r k_i + r$ esik 0 és

$\sum_{i=1}^r p_i$ közé s ennek ugyanaz a valószínűsége, mint hogy a felírt feltétel mellett az

$n + s$ elemű mintában legalább $\sum_{i=1}^r k_i + r$ első r tulajdonsághoz tartozó elemet

találtunk. Következtetésünk igaz marad akkor is, ha az r különböző értékeire felírt események egyidejű fennállását vesszük tekintetbe. Így tehát a (14) fennáll. Fennáll továbbá, hogy

$$(15) \quad \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\sum_{i=1}^r \xi_i < \sum_{i=1}^r p_i \right) \middle| \prod_{r=1}^s [\kappa_{rn} = k_r] \right) = \\ = \mathbf{P} \left(\prod_{r=1}^s \left(\gamma_r^* < \sum_{i=1}^r p_i \right) \middle| \prod_{i=1}^s \left(\gamma_{\sum_{j=1}^r k_j}^* \right) \right).$$

Az $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_s^*$ -gal ugyanis definiálhatunk egy olyan tételt, amelynek eloszlása intervallum-eloszlás úgy, hogy az r -edik tulajdonsághoz tartozó valószínűségnek $(\gamma_r^* - \gamma_{r-1}^*)$ -ot tekintjük (itt $\gamma_0^* = 0$ és $\gamma_{s+1}^* = 1$). Ebben az esetben mind a feltételben lévő, mind a feltétel előtt írt események a (15) bal- és jobboldalán rendre megegyeznek egymással, tehát a (15) igaz. A (12) tehát a (13), (14) és (15)-ből következik.

Abban a speciális esetben, amikor $s = 1$, eredményünk egy új bizonyítást ad az (1)-re.

5. Poisson-eloszlás

Az eddigiekben láttuk azt, hogy a dualitási elv mind a pontos hipergeometrikus eloszlás, mind a közelítő binomiális eloszlás feltételezése esetén fennáll. Ismeretes azonban, hogy a hipergeometrikus eloszlás bizonyos esetekben Poisson-eloszlással is megközelíthető. Vessük fel tehát azt a kérdést, hogy változatlanul fennáll-e és közvetlenül igazolható-e a dualitási elv, ha feltételezzük azt, hogy a minta selejtes darabjainak száma Poisson-eloszlást követ? Természetesen a határátmenet arra vezet, hogy érvényes, ezért a közvetlen igazolás lehetőségét vizsgáljuk.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban előfordulhat olyan eset, amikor a selejtszám eloszlásául a Poisson-eloszlást nem a binomiális eloszlás megközelítéseként tételezzük fel, pl. mikor szövetből veszünk bizonyos hosszúságú mintát.

Legyen egy bizonyos méretű mintában x a hibák száma, λ a hibák számának várható értéke ugyanolyan méretű mintában. Akkor a dualitás elvének erre az esetre felírt alakja

$$(16) \quad \mathbf{P}(\lambda < l | x = k) = \mathbf{P}(x \geq k + 1 | \lambda = l).$$

Ha n -et végtelenhez közelítjük úgy, hogy $np = l$ legyen, akkor az (1) átmegegy a (16)-ba. A (16) azonban közvetlenül is igazolható. Segédteételünk felhasználása helyett most a jelen esetben egyszerűbb analitikus utat választjuk. A Bayes-formula szerint

$$(17) \quad f(l|k) dl = \frac{l^k}{k!} e^{-l} dl \cdot \frac{l^k}{(k+1)!} e^{-l} dl$$

s ez egyszersmind egyenlő annak a valószínűségével, hogy a $(k+1)$ -edik hiba l és $l+dl$ között van. Így tehát a (17)-et integrálva a (16)-ot kapjuk, mivel az, hogy a $(k+1)$ -ik hiba 0 és l közé esik, ugyanazt jelenti, mint hogy 0 és l között legalább $k+1$ hiba van. Ezzel tehát a dualitás elvét arra az esetre is igazoltuk, ha a hibák száma Poisson-eloszlást követ.

6. Nem egyenletes a priori eloszlás

Ha az a priori eloszlás folytonos, sűrűségfüggvénye $f(p)$, akkor a Bayes-tétel alkalmazásával:

$$P(\zeta < p | \kappa_n = k) = \frac{\int_0^p f(x) x^k (1-x)^{n-k} dx}{\int_0^1 f(x) x^k (1-x)^{n-k} dx}.$$

(Itt és a következőkben adott tételből kivett minta selejteloszlását binomiálisnak tekintjük.)

Ha az a priori eloszlás diszkrét, a w_1, w_2, \dots értékeket p_1, p_2, \dots valószínűséggel veszi fel, akkor

$$P(\zeta < p | \kappa_n = k) = \frac{\sum_{w_i < p} c_i w_i^k (1-w_i)^{n-k}}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i^k (1-w_i)^{n-k}}.$$

Kérdés, hogy mely a priori eloszlások esetére terjeszthető ki a dualitási elv?

Erre a kérdésre itt általánosságban választ adni nem tudunk. Ismeretes azonban *Oderfeld* eredményéből [1], hogy ha az a priori eloszlás béta-eloszlás, tehát ha

$$f(x) = \frac{x^r (1-x)^{s-r}}{B(r+1, s-r+1)},$$

akkor alkalmazható a dualitási elv, éspedig ekkor

$$(18) \quad P(\zeta < p | \kappa_n = k) = P(\kappa_{n+s+1} \geq k+r+1 | \zeta = p).$$

Megjegyezzük, hogy a béta-eloszlás érdekes kapcsolatban van az intervallum-eloszlással: az előbbi az utóbbiból úgy származtatható, hogy az első r tulajdonságú elemet selejtesnek, a többit jónak tekintjük.

Ennek megfelelően, ha a 4. pontban közölt bizonyítást úgy módosítjuk, hogy a produktum-jelet elhagyjuk és az r -nek határozott értéket tulajdonítunk, a (18)-ra jutunk.

Az alábbiakban még egy típusú a priori eloszlást adunk meg, amely mellett fennáll a dualitási elv egy alakja. Legyen az a priori eloszlás béta-eloszlások keveréke, tehát sűrűségfüggvénye legyen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{x^{r_i} (1-x)^{s_i-r_i}}{B(r_i+1, s_i-r_i+1)}.$$

Ebben az esetben kapjuk, hogy :

$$(19) \quad P(\zeta < p | x_n = k) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i (s_i + 1) \binom{s_i}{r_i}}{(s_i + n + 1) \binom{s_i + n}{r_i + k}} P(x_{n+s_i+1} \geq k + r_i + 1 | \xi \doteq p)}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i (s_i + 1) \binom{s_i}{r_i}}{(s_i + n + 1) \binom{s_i + n}{r_i + k}}}.$$

Ha az összetevők száma kicsiny, a (19) képlet alkalmas a számításra, bár nem annyira, mint egyszerű béta-eloszlás esetén, a kész prospektív paraméterek felhasználása itt nem lehetséges.

IRODALOM

- [1] *G. Castelnovo*: Calcolo delle probabilità, Milano, 1919.
- [2] *E. C. Molina*: Bayes Theorem: An Expository Presentation, Bell System Technical Journal, 273. o. (1931)
- [3] *J. Oderfeld*: Statystyczny odbiór towarów klasyfikowanych według alternatywy, Warszawa (1950).
- [4] *J. Oderfeld*: On the dual aspect of sampling plans. Colloquium Mathematicum II. 2. 89. o. (1951)
- [5] *L. E. Simon*: An Engineers' Manual of Statistical Methods, New-York, 184. o. (1941).
- [6] *H. Steinhaus*: Quality control by sampling. Colloquium Mathematicum, II. 2. 98. o. (1951).

О ПРИНЦИПЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВЕРОЯТНОСТНЫМ ГРАНИЦАМ ПРОПОРЦИИ БРАКА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМ ПО БАЙЕСУ

К. Шаркади

Резюме

Статья присоединяется к статьям Штейнхауза [6] и Одерфельда [3], [4]. В упомянутых статьях авторы критикуют ту точку зрения, согласно которой метод, основанный на постулате Байеса —, должен быть исключен из современных методов математической статистики. Указывается что применение постулата Байеса во многих случаях приводит в основном к тем же результатам, как метод доверительных границ.

Принцип двойственности изложенный в упомянутых статьях Одерфелда является результатом подобного типа, относительно исследования брака. В данной статье автор обобщает упомянутый принцип двойственности на случаи гипергеометрического, полигипергеометрического, полиномиального распределения и распределения Пуассона.

ON THE RULE OF DUALISM CONCERNING THE BAYES' PROBABILITY LIMITS OF THE FRACTION DEFECTIVE

K. SARKADI

Summary

This paper departs from the publications of Steinhaus and Oderfeld [6],[3],[4], in which they criticise the view that the method based on Bayes' rule must be excluded from up-to-date mathematical-statistical methods and point out that in many cases Bayes' rule gives the same result as the method of confidence limits. Concerning acceptance inspection, a statement of the same character is also expressed in the «rule of dualism» dealt with in Oderfeld's papers. Author generalizes this «rule of dualism» for the cases of hypergeometric, polyhypergeometric, polynomial and Poisson distributions.

A SELEJTARÁNY A PRIORI BÉTA-ELOSZLÁSÁRÓL

SARKADI KÁROLY

Összefoglalás.

A dolgozat — *Oderfeld* egy értekezéséhez kapcsolódva — a minta selejtarányából a tétel selejtarányára való következtetésnek a Bayes tételen alapuló módszerével foglalkozik, pontosabban azzal a kérdéssel, hogyan lehet bizonyos tapasztalatok alapján az a priori valószínűségi eloszlás paramétereit meghatározni, ha azt béta-típusúnak tesszük fel. A szerző itt rámutat az *Oderfeld* által megadott eljárás egy hibájára és helyesbíti az eljárást; továbbá javasol egy másik módszert is az a priori eloszlás meghatározására, amely szerint a második momentum helyett a selejtarány maximális értékét kell felhasználni. Ez utóbbi módszerhez táblázatot is ad.

1. Ez a cikk — mint ugyanezen kötet megelőző cikke is — olyan selejtellenőrzési módszerrel foglalkozik, amely a Bayes-tétel alkalmazásán alapul. Az ilyen módszereket, mint ott említettük, ma már alig alkalmazzák; olyan esetben azonban, amikor az a priori eloszlás ismert, a Bayes-tétel alkalmazása ellen nem emelhető kifogás. *Oderfeld* a priori béta-eloszláson alapuló módszere [1], amelyről már ez az előző cikk is említést tesz, az a priori eloszlást az elmúlt átvételek tapasztalatai alapján állapítja meg.

Az a gondolat, hogy a gyártási folyamatról információt kell szerezni, és ezt a végellenőrzés alkalmával fel kell használnunk, mind általánosabban elfogadott elv a minőségellenőrzés gyakorlatában. Ez az információ történhet közvetlenül, ha erre mód van, de történhet közvetve is az átvételek eredményeiből.

Hogy a gyártási folyamatról való információ tekintetbe nem vétele hibára adhat alkalmat, azt mutatja a következő, *Kolmogorovtól* származó példa:

Tegyük fel, hogy egy gyártmányból alkotott tételekről tudjuk, hogy bennük a hibás darabok száma binomiális eloszlást követ. Akkor — mint ez könnyen kimutatható — az egyes tételekből kivett minta semilyen további információt nem nyújt a tétel megmaradt részére vonatkozóan. Ugyanez a helyzet általában akkor, ha azok az események, hogy az egyes gyártott darabok selejtesek legyenek, egymástól független események.

Egy másik példa: tegyük fel, hogy egy bizonyos mintavételi eljárással folyamatosan vizsgálunk meg egy bizonyos helyről származó tételeket és majdnem valamennyit visszautasítják, szórványosan azonban néhányat átvesznek. Ha a mintavételi utasítást kritika nélkül alkalmazzuk, az átvett tételeket megfelelőeknek kell tartanunk. A valóságban pedig sokkal több okunk van

feltenni, hogy a tételek valamennyien nem megfelelők, hiszen néhány átvétel szükségképpen bekövetkezik ilyen esetben is.

Általában szokásos módja az elmúlt átvételek tapasztalatai tekintetbe vételének az, hogy időnként intézkedés történik az átvételi tervek szigorítására, vagy enyhítésére ezek alapján. *Oderfeld* a priori eloszlás formájában veszi figyelembe az elmúlt átvételeket. Megállapítja, hogy a selejtarány eloszlása gyakorlati szempontból jól megközelíthető a béta-eloszlással. Ez azért fontos, mert a priori béta-eloszlás esetén az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye is aránylag egyszerűen felírható. A béta-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$(1) \quad \frac{x^r (1-x)^{s-r}}{B(r+1, s-r+1)}.$$

Ilyen a priori eloszlás mellett az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye

$$(2) \quad \frac{x^{r+z} (1-x)^{n+s-r-z}}{B(r+z+1, n+s-r-z+1)},$$

ha az n elemű mintából z darab volt selejtes.

Az s és r paramétereket az eddigi átvételek tapasztalati eredményéből számítjuk ki, a momentumok egyeztetésének módszerével.

Az alábbiakban *Oderfeld* idézett művének a fentiekre vonatkozó részét kívánjuk egy-két megjegyzéssel kiegészíteni.

2. Az első megjegyzés az a priori eloszlás egy más értelmezésére vonatkozik.

Ha s és r egész szám, akkor az (1) a priori egyenletes eloszlás feltételezése esetén a selejtarány a posteriori eloszlása, ha a tételből kivett s elemű mintában r darab selejteset találtunk. Ez világossá teszi az a priori béta-eloszlás szerepét: tulajdonképpen az a priori béta-eloszlás feltételezését úgy is tekinthetjük, hogy az a priori egyenletes eloszlás feltételezésén felül még feltételeztük, hogy a tényleges mintavétel előtt már egy s darabból álló mintát kivettünk és abban r darab selejteset találtunk. Azaz egy olyan elképzelt mintát feltételeztünk, amely éppen azt az információt adja, amelyet mi más úton kaptunk. Ez érthetővé teszi azt az eredményt, hogy a tényleges minta kivétele után úgy kell számolnunk, mint ha egyenletes a priori eloszlás mellett az $n+s$ kihúzott darabban $z+r$ lett volna a selejt.

Ha s vagy r nem egész szám, akkor természetesen a fentieknek nincs értelme. A fenti terminológiát azonban használhatjuk akkor is, amint azt *Oderfeld* is használja. Ilyenkor a »mintavétel« eredményén olyan információt értünk, amelyet az eloszlásfüggvény képlete jelent.

3. Az s és r meghatározásánál a szerző nem veszi figyelembe, hogy a minta selejtarányának eloszlása nem azonos a tétel selejtarányának eloszlásával. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez az elhanyagolás, éppen a könyvben példaként közölt numerikus táblázatrészeket tekintve is, nem jelentéktelen. Ha a selejtarány tapasztalati eloszlására nézve T darab n elemű minta eredményével rendelkezünk, akkor az ebben lévő selejtes darabok számának eloszlását az (1) által jellemzett a priori béta-eloszlás feltételezésével

kiszámíthatjuk : annak a valószínűsége, hogy az n elemű mintában κ darab hibás legyen :

$$\int_0^1 \frac{x^r (1-x)^{s-r}}{B(r+1, s-r+1)} \binom{n}{\kappa} x^{\kappa} (1-x)^{n-\kappa} dx = \frac{(s+1) \binom{s}{r} \binom{n}{\kappa}}{(s+n+1) \binom{s+n}{r+\kappa}}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$(3) \quad \mathbf{M}(\kappa) = \frac{n(r+1)}{s+2}$$

$$\mathbf{M}(\kappa^2) = \frac{n(n-1)(r+1)(r+2)}{(s+2)(s+3)} + \frac{n(r+1)}{s+2}.$$

Egyeztetve a momentumokat, felírjuk, hogy

$$\mathbf{M}(\kappa) = \frac{\sum_{i=1}^T z_i}{T} = \frac{S_1}{T}$$

$$\mathbf{M}(\kappa^2) = \frac{\sum_{i=1}^T z_i^2}{T} = \frac{S_2}{T}$$

ahol z_i jelenti az alapul vett i -ik n elemű mintában talált hibás darabok számát; ebből kapjuk, hogy

$$(4) \quad s = \frac{S_1(n-1)(nT-S_1)}{(S_2-S_1)Tn-(n-1)S_1^2} - 3$$

$$r = \frac{S_1(S_1n-S_2)}{(S_2-S_1)Tn-(n-1)S_1^2} - 1,$$

vagy némi elhanyagolással

$$(5) \quad s = \frac{S_1 n T}{(S_2 - S_1) T - S_1^2} - 2$$

$$r = \frac{S_1^2}{(S_2 - S_1) T - S_1^2} - 1$$

Összehasonlítással lássuk az *Oderfeld* által közölt képleteket :

$$(6) \quad r = \frac{2S_1^2 - TS_2 - \frac{S_1 S_2}{n}}{TS_2 - S_1^2}$$

$$s = \frac{2S_1^2 + S_1 T n - 3S_2 T}{TS_2 - S_1^2},$$

illetve

$$(7) \quad r = \frac{S_1^2}{TS_2 - S_1^2} - 1$$

$$s = \frac{T n S_1}{TS_2 - S_1^2} - 3.$$

Közelítő számításra tehát az (5) képlet alkalmas a (7) képlet helyett.

Ha az [1] 88. lapján lévő példát ezek szerint újra átszámoljuk,

$$S_1 = 27 \quad S_2 = 65 \quad T = 20 \quad n = 40$$

adatokból $r = 3,26$, $s = 127$ adódik,

szemben az ott közölt $r = 0,27$, $s = 35$ eredménnyel.

A pontosabb számítások elvégzéséhez *Oderfeld* bevezeti az

$$(8) \quad \eta = \frac{100 S_1}{nT}$$

$$\lambda = \frac{10\,000 S_2}{n^2 T}$$

segédváltozókat, ezek segítségével a (6) alatti képletek a következőképpen alakulnak :

$$(9) \quad r = \frac{2\eta^2 - \lambda - \frac{n\lambda}{100}}{\lambda - \eta^2}$$

$$s = \frac{2\eta^2 + 100\eta - 3\lambda}{\lambda - \eta^2}.$$

A (9) alatti képleteket nem kell megváltoztatnunk, ha λ definícióját megváltoztatjuk úgy, hogy a (8) helyett az

$$(10) \quad \eta = \frac{100 S_1}{nT}$$

$$\lambda = \frac{\frac{10\,000 S_2}{nT} - 100\eta}{n - 1}$$

helyettesítést alkalmazzuk.

Ennélfogva a szerző által kidolgozott táblázatok is érvényben maradnak, csak a λ értékét a (8) helyett a (10) képlettel kell kiszámítani.

Hasonlóképpen használhatók a 93—95. lapon közölt táblázatok is, amelyek mindjárt a mintavételi eredmény retrospektív paramétereit adják meg.

Hogy milyen különbséget jelent e táblázatok használatánál az, hogy a λ értékét a (8) vagy a (10) képlettel számítjuk ki, példaképpen lássuk a következő táblázatot az i. m. 93. lapjáról:

W_1 táblázata ($n = 40$ drb, $\eta = 3\%$)				
$z \backslash \lambda$	10	12	14	16
0	4,3	4,5	4,4	4,3
1	4,7	5,6	6,1	6,4
2	5,0	6,6	7,6	8,3
3	5,4	7,6	9,1	10,2
4	5,8	8,6	10,5	11,9
5	6,2	9,6	11,9	13,6

w_1 jelenti azt a határselejtarányt, amely alá esik a tételselejt aránya a posteriori 95%-os valószínűséggel.

Ha λ -t a (10) képlet helyett a (8) képlettel számítjuk, akkor értéke 7,5-el eltolódik, vagyis a táblázat egész terjedelmével. Tehát egyáltalában nem közömbös, hogy a (8) vagy a (10) képletet használjuk-e, még a táblázat használatának a lehetősége szempontjából sem.

4. A fentiekből látható, hogy az eredeti eljárás csak akkor használható, ha n elég nagy, és a tételek selejtarányának ingadozása is nagy. Ellenkező esetben nem ad jó közelítést. Az itt ismertetett eljárás általában mindig megbízhatóbb eredményt ad.

Meg kell azonban jegyezni azt, hogy még az így módosított eljárás sem alkalmazható minden esetben. Általában ugyanis a momentumok egyeztetése módszerének csak akkor van jogosultsága, ha nagyszámú megfigyelési adatunk van, jelen esetben tehát akkor, ha T nagy szám. Ez ellen ugyan lehet azt az ellenvetést tenni, hogy nem szükséges a nagy pontosság, mert az a priori eloszlás csak közvetve gyakorol befolyást a végeredményre. Ez az ellenvetés nem mindig helytálló. Gondoljuk meg azt, hogy például ha a momentumok egyeztetése olyan eredményre vezet, hogy $s > n$, akkor az a priori eloszlásnak már mindenestre nagyobb befolyása van a végső ítéletre, mint magának az aktuális tételből vett mintának. Lehetséges azonban az is, hogy teljesen használhatatlan eredményre vezet az eljárás: r és s értékre végtelent vagy negatív számot kapunk. Ez az eset áll elő akkor, ha a véletlen folytán valamennyi mintában egyforma a selejtarány, vagy legalább is ennek szórása nem nagyobb, mint amennyi homogén tételsokaságból vett minták esetén a szórás várható értéke.

A fenti megfontolás arra mutat, hogy kis T esetén szükséges a momentumok egyeztetésének módszerét valahogyan módosítani, vagy más módszert alkalmazni, hogy helytelen eredményre ne jussunk.

Itt felmerülhetne először az a gondolat, hogy az így adódható hibát úgy korrigáljuk, hogy visszatérünk az [1]-ben ismertetett eredeti eljárásra, és ezzel mindjárt biztosítjuk is magunkat a túlságosan kedvező előzetes fel-

tételezés és az azzal járó csalódások ellen. Könnyen meggyőződhetünk arról azonban, hogy ez az út elvileg helytelen volna: nem akkor nyújtana nagyobb biztonságot, mikor a kiküszöbölendő bizonytalanság is nagyobb, tehát T kis értékeire, hanem n kis értékei esetén tenné ezt meg, függetlenül T értékétől.

A kérdés exakt megoldása az volna, hogy úgy határoznánk meg az aktuális tétel selejtarányának a posteriori selejteeloszlását, hogy nem határozott a priori eloszlásból indulnánk ki, hanem csak abból, hogy bizonyos statisztikai adataink vannak az a priori eloszlás paramétereinek meghatározására. Ennek a módszernek kidolgozásával járó munka nem látszik sem könnyűnek, sem gazdaságosnak. Magának az a priori béta-eloszlás feltevésének is az az egyik indoka, hogy a vele való számolás egyszerű; nem volna értelme tehát bonyolulttá tenni. Másrészt a túlzott pontosságnak egyébként sincs értelme, egyrészt azért, mert az a priori eloszlás tényleg csak közvetve gyakorol befolyást a tétel selejtarányára, tehát elég arra vigyáznunk, hogy durva hiba ne adódjék a módszer alkalmazásánál, másrészt azért, mert az a lehetőség, hogy a gyártási körülmények esetleg megváltozhatnak, olyan dolog, amit nem vettünk még számításba, és egyáltalán nem is lehet bizonytalanságtól mentes módon számításba venni.

Igy tehát az látszik célszerűnek, hogy valamilyen önkényes megállapodással dolgozzunk, ha a momentumok módszere használhatatlan, vagy olyan adatokat szolgáltatna, amelyek bizonytalansága értékükből látszik. Például önkényesen alsó határt szabunk λ -ra, vagy felső határt s számára, s ha a számított adat a határt átlépi, a határt tekintjük kiinduló adatnak (az utóbbi esetben természetesen a (3a) egyenlet alapján számítjuk ki r értékét s -ből). Pontosabban pl. megállapodhatunk abban, hogy s nem lépheti túl n értékét, mert egyébként is indokoltnak látszik, hogy ne bízzuk magunkat erősebb mértékben az a priori feltevésre, mint az aktuális tételből vett mintára. Vagy tehetünk olyan megállapodást, amely s maximális figyelembevehető értékét a T értékétől is függővé teszi.

A fentebb ismertetett indokokra való tekintettel azonban felvetjük az egész módszer további egyszerűsítésének gondolatát is. Ismeretes, hogy méretellenőrzéseknél is a gyakorlatban általában a szórást csak olyan helyen szokták kiszámítani, ahol nagy pontosságot követelnek meg, egyébként a range mérése az általános. Véleményünk szerint az itt megkövetelt pontosság sem teszi indokolttá a szórás kiszámítását és nem várható, hogy azt az üzemek elfogadják végezni.

5. A következőkben egy olyan eljárási módot fogunk ismertetni, amely egyszerűbb számítással jár, sőt számítási adatok nélküli becslésre is alkalmas.

Általában sokszor előfordul, hogy az átlagos selejtarányt amúgy is mérik, vagy az a tapasztalatból számítás nélkül is megbecsülhető s ugyancsak a tapasztalat alapján — számítással vagy becsléssel — meg tudnak adni egy olyan határt, amely fölé a selejtarány csak kis valószínűséggel mehet.

Tegyük fel tehát, hogy meg akarjuk határozni azt a béta-eloszlást, amelynek várható értéke p_0 , eloszlásfüggvényének értéke a β helyeken p_β , ahol p_0 , p_β és β adott értékek.

A béta-eloszlás r és s paraméterei ismeretlenek.

Fennáll, hogy

$$(11) \quad p_0 = \frac{r+1}{s+2}$$

és

$$\beta = \int_0^{p_\beta} x^r (1-x)^{s-r} dx.$$

(12)

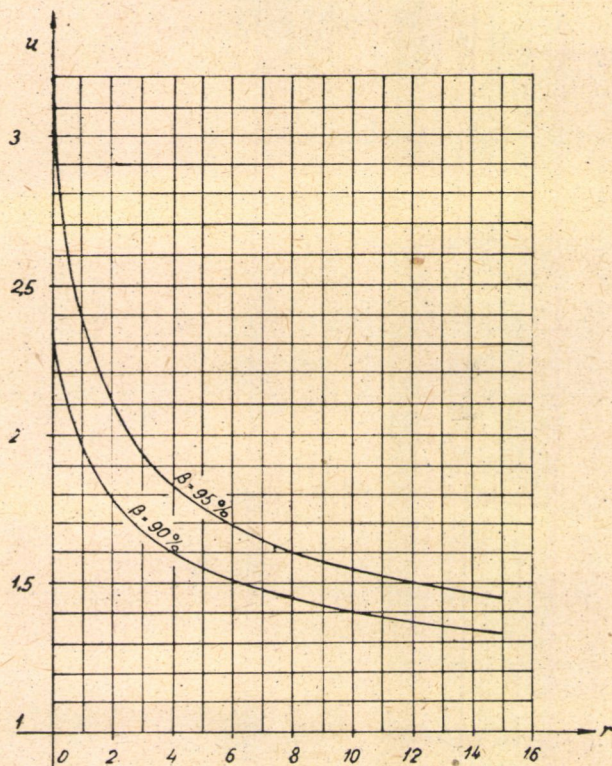
Ha megelégszünk a Poisson-közelítéssel, akkor az utóbbi egyenlet helyett ezt írhatjuk:

$$\beta = \int_0^C \frac{x^r}{r!} e^{-x} dx,$$

ahol

(13)

$$C = (s+1) p_\beta.$$



1. ábra

A (11)-ből és (13)-ból

$$\frac{p_\beta}{p_0} = \frac{C}{r+1-p_0}$$

r pozitív szám, p_0 kis pozitív szám, tehát $r+1$ mellett elhanyagolható és így

$$\frac{p_\beta}{p_0} \approx \frac{C}{r+1}$$

β értékét rögzítve C értéke r bármely értékéhez meghatározható a Poisson-táblázatból és így meghatározható az $u = \frac{C}{r+1}$ hányados értéke is. Ha ezt az u és r közötti összefüggést ábrázoljuk vagy táblázatba foglaljuk, akkor adott esetben r értékét is megkaphatjuk az u értékéből. A mi esetünkben éppen ez a feladat, mert p_0 és p_β ismert és így $u = \frac{p_\beta}{p_0}$ is annak tekinthető.

Az összefüggést $\beta = 90\%$ és $\beta = 95\%$ esetére az 1. ábrán ábrázoltuk. Ennek segítségével tehát p_0 és p_β ismeretében $\frac{p_\beta}{p_0} = u$ -tól r értéke meghatározható. Ezután s -et a (11)-ből nyert

$$s = \frac{r+1}{p_0} - 2$$

képlettel kiszámíthatjuk.

Ha pontosabb közelítést akarunk, az így kapott s -ből számított $\frac{s+1}{s+2}$ -vel megszorozzuk $\frac{p_\beta}{p_0}$ -t, ezt tekintjük u -nak és az eljárást megismételjük. Még pontosabb közelítést nyerhetünk a (12) képlet felhasználásával.

A gyakorlatban azonban általában megfelelő lesz az első közelítés is. Így tehát a fenti eljárással a paramétereket igen egyszerűen meg lehet határozni. Ezután az aktuális tétel selejtarányát dualitási elv segítségével igen egyszerűen meghatározhatjuk. Könnyebb lesz a számítás, ha r értékét egész számra kerekítjük le (természetesen s kiszámítása előtt). A gyakorlatban ez a kerekítés nem fog számbavehető változást okozni.

Ha $\frac{p_\beta}{p_0}$ tapasztalati értéke nagyobb lenne, mint u -nak a legnagyobb ($r = 0$ -hoz tartozó) értéke, u_0 , akkor ez azt jelenti, hogy nincs olyan béta-eloszlás, amilyent keresünk. Ilyenkor azt tehetjük, hogy p_0 értékét önkényesen megnöveljük úgy, hogy $p_0 = p_\beta \cdot u_0$ legyen, vagyis rosszabb átlagszelejtet tételezünk fel az a priori eloszláshoz, mint ami tudomásunk szerint a valóságban fennáll.

A függelékben az u diagrammjának adatait táblázat formájában is közöljük.

1. Példa:

Legyen $p_0 = 1\%$, $p_\beta = 2\%$ ($\beta = 95\%$).

Megkeresendők az a priori eloszlás r és s paraméterei.

A jelen esetben $u = 2$, tehát a diagrammból $r = 2,5$. Ebből a (11) szerint

$$s = 348$$

adódik.

Ha r -et lefelé kerekítjük vagyis $r = 2$ -t vesszük, akkor $s = 298 \approx 300$.

Tegyük fel, hogy az új tételből vett 500 elemű mintában 3 selejtes darabot találtunk. Akkor a tétel retrospektív selejtaránya a dualitás elve értelmében megegyezik az 5 || 801 átvételi terv prospektív paramétereivel. Az 5-höz

tartozó $C \stackrel{!}{=} (n+1)w$ határselejtarány értékek pl. az [1] 2. sz. táblázatából 2,61 és 10,51, ebből 801-gyel osztva kapjuk, hogy a tétel selejtaránya 90%-os valószínűséggel 0,33% és 1,31% között van.

Összehasonlításul közöljük, hogy egyenletes a priori eloszlás esetén 0,27%-ot és 1,55%-ot kapunk határselejtarányokul.

2. példa:

Legyen $p_0 = 1,5\%$, $p_\beta = 5\%$ ($\beta = 90\%$). A jelen esetben $\frac{p_\beta}{p_0} = 3,33$, ezzel szemben a diagrammban u legnagyobb értéke 2,3. Ezért p_0 -t önkényesen megnöveljük 2,08%-ra, így $r = 0$ lesz és

$$s = \frac{0+1}{0,0208} - 2 = 46.$$

Tegyük fel, hogy az új tételből 50 darabos mintát vettünk és abból 2 volt hibás. Ebben az esetben az előbbi példában már ismertetett módszerrel kapjuk, hogy tételünk selejtaránya 90%-os valószínűséggel 0,88% és 6,56% közé esik, míg a priori egyenletes eloszlás feltételezésével 1,68% és 12,5% határselejtarányokat kapunk.

További egyszerűsítést jelentene az eljárásra, ha nomogramokat készítenénk. Az egyik nomogramm r -et és s -et adná meg, mint p_0 és p_β függvényét, másik pedig a selejtarány határait mint r és s függvényeit. Így a felhasználó munkája a két nomogrammon két-két érték meghatározására és két egyszerű összeadásra (ahol az egyik összeadandó egész szám) korlátozódna.

A nomogrammok pontos megszerkesztéséhez hosszabb számítások szükségesek, amelyek elvégzését tervbe vettük.

6. Az előző pontban ismertetett módszert használhatjuk akár egyszerű becsléssel, akár konkrét tapasztalati adatokból nyert pontos számítással határoztuk meg p_0 és p_β értékét.

Hogy becslés útján hogy lehet meghatározni p_0 -t és p_β -t, arról sokat nem kell beszélünk, hozzávetőleges érték szinte minden esetben van rájuk. Magától értetődik, hogy bizonytalanság esetén inkább gyengébb feltételezést alkalmazunk, vagyis növeljük p_0 és p_β értékeit.

Ha p_0 és p_β értékeit a tapasztalati adatokból nyert számítással nyerjük, akkor is célszerű megnövelni őket (legalább is p_β -t), ha figyelembe akarjuk venni az esetleg kevés adat bizonytalanságát, továbbá a gyártási folyamat megváltozásának lehetőségét. Hogy mennyivel növeljük meg, ez inkább gyakorlati kérdés, megjegyezzük azonban, hogy semmi értelme sincs itt teljesnek látszó bizonyosságra törekedni, tekintettel arra, hogy maga a mintavételi eljárás sem nyújt teljes biztonságot. Elég, ha arra ügyelünk, hogy a p_0 és p_β értéke inkább valamivel nagyobb, mint kisebb legyen a valószínűnek látszó értéknél.

7. Ha p_0 és p_β értékeit a rendelkezésre álló minták eredményeiből állapítjuk meg, akkor, mint ezt a 3. pontban tárgyaltuk, a minta selejtarányának eloszlása nem egyezik meg a tételével.

A megkövetelt pontosság megengedi azonban azt, hogy ezt az utóbbi eloszlást is béta-eloszlásnak tekintsük. Épen ezért feltételezzük, hogy ha az

a priori eloszlás paramétereit az előző pont alapján a minták selejteloszlásából határoztuk meg, ugyanazt a hibát követtük el, mint ha a (4) képlet helyett az (6)-ot alkalmaztuk volna. A két képlet összehasonlításából nyerjük, hogy ha r^* a minta selejtarány eloszlása alapján az (6) szerint meghatározott paraméter, akkor a tétel selejtarány-eloszlás helyes r paramétere a közelítő

$$(14) \quad r = \frac{\frac{n-1}{n} - \frac{1}{r^* + p_0 + 1}}{\frac{1}{p_0}} - p_0 - 1$$

képletből, és ebből s a (13) képlettel számítható ki.

A (14) gyakorlati szempontból pótolható az egyszerűbb

$$(15) \quad r = \frac{1}{\frac{1}{r^* + 1} - \frac{1}{np_0}} - 1$$

képlettel, sőt ha n elég nagy és r nem túlságosan kicsi, akkor e helyett még az

$$(16) \quad r = r^* + \frac{(r^* + 1)^2}{np_0}$$

képletet is használhatjuk.

A megfordított képletre akkor lehet szükségünk, ha van a priori feltevés, de közben ellenőrizni akarjuk, hogy az újabb adatok nem mondanak-e ellent a feltevésnek. A (14) pontos megfordítása

$$r^* = \frac{n}{\frac{n-1}{r + p_0 + 1} + \frac{1}{p_0}} - p_0 - 1$$

s ehelyett, ha p_0 kicsi, az

$$(17) \quad r^* = \frac{1}{\frac{1}{r+1} + \frac{1}{np_0}} - 1$$

s ha ezenfelül n nagy és r nem túl kicsi, az

$$(18) \quad r^* = r - \frac{(r+1)^2}{np_0}$$

képletet is használhatjuk.

Ha megkaptuk r^* -ot, a Poisson-függvény vagy táblázat segítségével megállapíthatjuk a minta selejt kontrollhatárát.

Egyébként a (15), illetve (17) képletet is egyszerű a számolás, ha reciprok-táblázatot használunk. Így a számítás a táblázat használatán kívül egyszerű összeadásra korlátozódik. Könnyen készíthető alkalmas nomogramm is.

IRODALOM

1. J. Oderfeld: Statystyczny odbiór towarów klasyfikowanych według alternatywy. Warszawa, (1950)

F Ü G G E L É K

Táblázat az a priori béta-eloszlás r paraméterének meghatározására [1. 5. pont]

r	u	
	$(\beta = 95\%)$	$(\beta = 90\%)$
0	3,00	2,30
0,2	2,80	2,20
0,4	2,66	2,12
0,6	2,54	2,05
0,8	2,45	2,00
1	2,37	1,95
2	2,10	1,77
3	1,94	1,67
4	1,83	1,60
5	1,75	1,55
6	1,69	1,50
7	1,64	1,47
8	1,60	1,44
9	1,57	1,42
10	1,54	1,40
11	1,52	1,39
12	1,50	1,37
13	1,48	1,35
14	1,46	1,34
15	1,44	1,33

АПРИОРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА β ПРОПОРЦИИ БРАКА

К. Шаркади

Резюме

Работа, присоединяясь к одной работе Одерфельда, занимается определением с помощью метода Байеса распределения пропорции брака всей партии по распределению брака в выборке, то есть в ней исследуется вопрос, каким образом можно на основании некоторого опыта определить параметры априорного распределения вероятностей, если считать последнее распределением типа β . Здесь автор указывает на одну ошибку в работе Одерфельда и дает поправку. Затем предлагает другой способ определения априорного распределения, по которому вместо второго момента нужно воспользоваться максимальным значением пропорции брака. Таблицы нужные для применения метода, тоже даны в работе.

ON THE A PRIORI BETA DISTRIBUTION OF FRACTION DEFECTIVE

K. SARKADI

Summary

Starting from one of Oderfeld's publications, this paper deals with the method resting on Bayes' theorem which aims at concluding the fraction defective of the lot, from the fraction defective of the sample, more precisely with the question of determining on the basis of certain experiences the parameters of the a priori probability distribution assuming this to be of beta type. An error in the method given by Oderfeld is pointed out and corrected, and an other method proposed for the determination of the a priori distribution in which the maximal value of the fraction defective is to be utilised instead of the second moment. A table required for the application of this last-mentioned method is added.

OSZTÁLYKÖZÖK MEGVÁLASZTÁSA MINTÁK ELEMEINEK OSZTÁLYBASOROLÁSÁNÁL

SARKADI KÁROLY

Összefoglalás

A szerző adott $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel bíró eloszlásra nézve kimutatja, hogy a (3) egyenletrendszer teljesülése szükséges ahhoz, hogy az osztálybasorolással és a pontos módon kiszámított középérték közötti eltérés négyzetének várható értéke minimális legyen. Ha az egyenletrendszernek csak egy megoldása van, a feltétel elegendő is. Az ellenkező esetre ellenpéldát ad. Kimutatja továbbá, hogy ha $\log f(x)$ konkáv, akkor a megoldás egyértelmű. A normális eloszlás esetére a táblázatot is megadja különböző számú intervallumokra.

A problémának csillagászati vonatkozása is van, mert a Smidt-elmélet szerint a bolygóknak a Naptól való távolságát meghatározó egyenletrendszer pontosan meg-
egyezik a (3) egyenletrendszerrel.

1. Ha nagy minták középértékét vagy szórását ki akarjuk számítani, a számítások pontos elvégzése az adatok nagy száma miatt igen nagy munkát jelent. Ezért ilyenkor az egymáshoz közeleső értékeket össze szoktuk foglalni úgy, hogy a számegyenest, vagy azt a tartományát, amely a valószínűségi változó lehetséges értékeit magában foglalja, több intervallumnak a közép-pontjával (vagy más meghatározott belső pontjával) helyettesítjük, amelybe az adat esik.

Természetesen, önként felmerül a kérdés, hogyan legcélszerűbb az intervallumok határait, valamint az egyes meghatározott pontokat kiválasztani?

Ebben a dolgozatban ennek a kérdésnek egy speciális változatára fogunk választ adni. A célszerűség alatt azt fogjuk érteni, hogy a mintabeli adat eltérésének négyzete az öt helyettesítő értéktől minimális legyen. Feltesszük, hogy az elméleti eloszlásfüggvényt ismerjük; feltesszük azt is, hogy az intervallumok határai, és a »helyettesítő« pontok megválasztásánál egyéb szempontok nem játszanak közre.

2. Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, sűrűségfüggvénye $f(x)$, legyen továbbá

$$(1) \quad -\infty = c_0 < a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < \dots < a_{k-1} < c_{k-1} < a_k < c_k = \infty$$

és foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy adott k esetén a minta középértékének kiszámítása szempontjából az (1) sorozat tagjainak milyen megválasztásánál követünk el legkisebb hibát avval, hogy ξ helyett mindig azzal az

a_i -vel számolunk, amelyekkel közös (c_{i-1}, c_i) intervallumban van. Keressük az így számított $(\xi - a_i)^2$ várható értékének minimumát; ez ugyanakkor lesz minimum, amikor a közelítéssel és a pontosan kiszámított közép eltérése négyzetének várható értéke. Az utóbbi az előbbi várható értéknek n -edrésze, ha n a megfigyelések száma, tekintve, hogy $\xi - a_i$ megfigyelésből származó értékei függetlenek egymástól.

Tehát vizsgáljuk, hogy

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k \int_{c_{i-1}}^{c_i} (x - a_i)^2 f(x) dx$$

az (1) sorozat tagjainak milyen értékei mellett lesz minimális.

Analitikus módszerrel megállapíthatjuk, hogy a (2) alatti kifejezésnek az értelmezési tartomány olyan belső pontjában lehet csak szélső értéke, ahol

$$(3) \quad a_i = \frac{\int_{c_{i-1}}^{c_i} xf(x) dx}{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx} \quad \text{és} \quad c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \\ (i = 1, 2, \dots, k-1). \\ (i = 1, 2, \dots, k)$$

Hogy lokális minimum általában csak ilyen pontban lehet, az elemi úton is belátható.

Ha $f(x)$ -nek nincs azonosan eltűnő szakasza, akkor, ha a (3) egyenletrendszer nem teljesül, a (2) valamelyik paraméter megváltoztatásával mindig csökkenthető. Éspedig ha a baloldali egyenletek közül pl. az i -edik nem teljesül, változtassuk meg a_i értékét úgy, hogy teljesüljön (ez nyilván mindig lehetséges és csak egyféleképpen), ezáltal a (2) i -edik tagja csökken, a többi változatlan marad. Ha viszont a (2) jobboldali egyenletei közül valamelyik, pl. az i -edik nem teljesül, akkor c_i értékét változtassuk meg úgy, hogy teljesüljön s ekkor a (2)-ben az integrálnak c_i régi és új értéke közé eső részén az integrandus csökken.

Tehát ha $f(x)$ nem tűnik el valamilyen intervallumban, akkor a (3) szükséges feltétele annak, hogy a (2) minimális értéket vegyen fel.

Ha $f(x)$ eltűnik valamilyen szakaszban, akkor a fenti következtetés nyilván úgy módosul, hogy ha van minimum, akkor azt a (2) egy olyan pontban is felveszi, ahol a (3) teljesül; de bármelyik c_i szabadon változtatható olyan intervallumon belül, ahol $f(x)$ azonosan 0, a nélkül, hogy ezáltal a (2) alatti érték megváltoznék.

Mivel a (2) összes paramétereinek folytonos függvénye, van minimuma vagy az értelmezési tartomány belsejében, vagy annak határán. Az értelmezési tartományt az (1) szabja meg; határpontjaira (1) azzal a módosítással áll fenn, hogy egy vagy több $<$ jel helyébe egyenlőségi jel lép. Az értelmezési tartomány határpontjaiban (3) nem állhat fenn; könnyen utána számolhatnánk, hogy ez a feltevés arra vezetne, hogy az a_i és c_i számok mind egyenlők,

ami lehetetlen. Tehát az előbbieket szerint minimum sem lehet határpontban; ezek szerint (2)-nek tehát az (1) által meghatározott értelmezési tartományban van minimuma és azt olyan helyen veszi fel, ahol (3) teljesül.

Kimutatható még, hogy az ilyen helyen nemcsak a (2) alatti kifejezés értéke lesz minimális, hanem a pontosan számított és az osztálybasorolással számított minta középérték eltérése négyzetének várható értéke. Jelöljük a mintaadatokat $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -nel és legyen i_j annak az intervallumnak a sorszáma, amelybe a ξ_j esik ($j = 1, 2, \dots, n$), vezessük be továbbá az $\eta_j = \xi_j - a_{i_j}$ jelölést. Az η_j valószínűségi változók nyilván egyforma eloszlásúak és egymástól függetlenek, tehát

$$\mathbf{M} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} - \frac{\sum_{j=1}^n a_{i_j}}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{M} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \right)^2 = \frac{1}{n} \mathbf{M}(\eta^2) + \frac{n-1}{n} \mathbf{M}^2(\eta).$$

Az első tag a (2) alatti kifejezés $\frac{1}{n}$ -szerese. Ez minimális értékét olyan helyen veszi fel, ahol a (3) teljesül. Ugyanakkor azonban a második tag is felveszi minimális értékét. Ugyanis a (3) baloldali egyenleteinek fennállása esetén $\mathbf{M}(\eta) = 0$, tekintve, hogy η -nak bármelyik intervallumhoz tartozó feltételes várható értéke 0. Tehát a fenti összeg második tagja ilyenkor 0, negatív pedig sohasem lehet. Így tehát az összeg is ugyanott veszi fel minimumát, ahol a (2).

3. A (3) alatti feltételek az (1) alatti értékeket nem mindig határozzák meg egyértelműen.

Erre lássuk az alábbi ellenpéldát:

Legyen $k = 2$ és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{ha } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{18}, & \text{ha } 1 < |x| \leq 7 \\ 0, & \text{ha } |x| > 7 \end{cases}$$

A $c_1 = -1, 0, 1$ értékek mindegyike meghatározza (3) egy-egy megoldását. A három megoldás közül a $c_1 = \pm 1$ értékek valóban minimummá teszik (2)-t $\left(\frac{61}{18}\right)$, a $c_1 = 0$ -hoz tartozó megoldás nem $\left(\frac{100}{27}\right)$.

4. A következőkben egy elégséges feltételt adunk arra, hogy (3)-ból az a_i -k és c_i -k egyértelműen meghatározhatók legyenek, és pedig bebizonyítjuk, hogy az előállítás egyértelmű, ha $f(x)$ a következő tulajdonsággal rendelkezik:

(4) $f(x)$ vagy mindenütt pozitív, vagy egy véges vagy végtelen intervallumban pozitív, másutt 0; és ahol $f(x)$ pozitív, ott $\log f(x)$ konkáv.

Megjegyzendő, hogy a (4) feltételnek a normális eloszlás és több fontos eloszlás eleget tesz.

A bizonyításhoz a következő *segédtelepre* lesz szükségünk :
Ha az $f(x)$ a (4) feltételnek eleget tevő függvény és $\gamma_1 \leq \gamma_2$ továbbá

$$(5) \quad \alpha_i = \frac{\int_{\gamma_i}^{\delta_i} xf(x) dx}{\int_{\gamma_i}^{\delta_i} f(x) dx} \quad (i = 1, 2)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geq \gamma_2 - \gamma_1$$

(itt $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$ értendő, ha $\gamma_2 = \gamma_1 = -\infty$) — akkor, ha δ_1 véges,

$$(6) \quad \delta_2 - \delta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1.$$

Az egyenlőségi jel (6)-ban csak abban az esetben állhat fenn, ha az (5)-ben is fennáll, vagy ha $\gamma_1 = \gamma_2 = -\infty$, és ezekben az esetekben is csak akkor, ha $\log f(x)$ lineáris a (γ_1, δ_2) intervallumban. Ugyanez a feltétele annak is, hogy δ_1 végtelen lehessen.

Bizonyítás: (4)-re való tekintettel $h > 0$ esetén

$$\log f(\alpha_1 - h) + \log f(\alpha_2) \leq \log f(\alpha_1) + \log f(\alpha_2 - h)$$

(7) és

$$\log f(\alpha_1 + h) + \log f(\alpha_2) \geq \log f(\alpha_1) + \log f(\alpha_2 + h).$$

Mindkét egyenlőtlenség abból következik, hogy a konkáv ív minden pontja a húr felett van.

Ha a (7) alatti egyenlőtlenségek közül az elsőben a jobboldalon a $\log f(x)$ függvény helyébe $(\alpha_1 - h, \alpha_2)$ intervallum feletti húrjának megfelelő ordinátákat írjuk, a jobboldal csökkentésével egyenlőségre jutunk s ez az egyenlőséget igazolja. Ugyanígy módon igazolható az alsó egyenlőtlenség is. A mondottakból az is következik, hogy az egyenlőség a (7) egyenlőtlenségeiben csak akkor állhat fenn, ha $\log f(x)$ lineáris $\alpha_1 - h$ és α_2 , illetve α_1 és $\alpha_2 + h$ között.

Ha a (7)-ben h helyébe $(\alpha_1 - x)$ -et, majd $(x - \alpha_1)$ -et írunk és a

$$g(x) = \frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)} f(x + \alpha_2 - \alpha_1)$$

jelölést vezetjük be, akkor a (7)-ből következik, hogy

$$g(x) \geq f(x), \text{ ha } x < \alpha_1$$

és

$$g(x) \leq f(x), \text{ ha } x > \alpha_1.$$

Itt egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha $f(x) = e^{mx+b}$ alakú x és a_2 , illetve a_1 és $x + a_2 - a_1$ között. Nyilván

$$\frac{\int_{\gamma'_2}^{\delta'_2} xg(x) dx}{\int_{\gamma'_2}^{\delta'_2} g(x) dx} = \alpha_1,$$

ahol

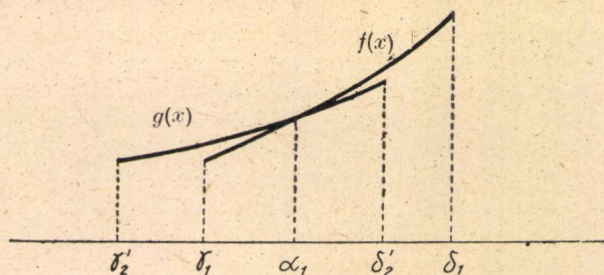
$$\gamma'_2 = \gamma_2 + \alpha_1 - a_2$$

és

$$\delta'_2 = \delta_2 + \alpha_1 - a_2$$

és így az (5) szerint $\gamma'_2 \leq \gamma_1$.

Az $j(x)$ görbe alatti (γ_1, δ_1) intervallumba eső terület súlypontjának abszcisszája megegyezik a $g(x)$ görbe alatti γ'_2, δ'_2 terület súlypontjával. Ha az előbb említett területet a súlyponttól balra eső pozitív területrésszel kiegészítjük,



1. ábra

szítjuk, jobboldalt pedig pozitív területrészt elveszünk belőle, a súlypont balra tolódik el, tehát nem maradhat ugyanaz. Éppen ezért a fentiek figyelembevételével lehetetlen, hogy $\delta'_2 < \delta_1$ legyen (l. az ábrát), sőt $\delta_1 = \delta'_2$ is csak abban az esetben lehetséges, ha a két terület teljesen megegyezik egymással, vagyis $\gamma'_2 = \gamma_1$ és $f(x) \equiv g(x)$ ($\gamma_1 < x < \delta_1$). Mindebből pedig következik bebizonyítandó segédtevéletünk.

Most áttérünk eredeti állításunk bebizonyítására. Tegyük fel, hogy a (3)-nak két különböző gyökrendszere van, a_{i1}, c_{i1} , illetve a_{i2}, c_{i2} . Ha $a_{11} = a_{12}$ volna, akkor a többi ismeretlenek a (3)-ból rendre egyértelműen meghatározhatók volnának, így a két gyökrendszer nem volna különböző. Tehát feltehetjük, hogy $a_{11} < a_{12}$. Ekkor segédtevéletünk értelmében $c_{12} - c_{11} \geq a_{12} - a_{11}$, vagyis a (3)-at alkalmazva $a_{22} - a_{21} \geq c_{12} - c_{11}$. Erre ismét alkalmazhatjuk a segédtevéletet s. i. t. Az ismételt alkalmazások során a k -adik lépésben segédtevéletünk értelmében az eredeti feltételezés szerinti $c_{k1} = c_{k2} = \infty$ értékekre csak akkor juthatunk, ha $\log f(x)$ lineáris $-\infty$ és ∞ között. Ekkor

azonban az $f(x)$ alatti terület véges nem lehet, mert $\int_{-\infty}^{\infty} e^{mx+b} dx$ semilyen

m, b értékpár esetén sem korlátos. Tehát ilyen sűrűségfüggvény nincsen. Ezzel ellentmondásra jutottunk, s így állításunk igaz.

5. Normális eloszlás esetére kiszámítottuk az intervallumok határait és súlypontjait, a (3) egyenletrendszer megoldása útján, $k = 2$ -től $k = 15$ -ig. A számítás közelítő módszerrel történt. A normális eloszlás esetén egyszerűbb a probléma, mint az általános esetben, egyrészt mert az eloszlás szimmetrikus,

másrészt mert normális eloszlás esetén $\int_{-\infty}^x xf(x) dx = -f(x)$ és ennek a

függvénynek, valamint az eloszlásfüggvénynek az értékei táblázatokba vannak foglalva. További egyszerűsítést a módszerben úgy értünk el, hogy milliméterpapiroson ábrázoltuk az $f[F^{-1}(x)]$ függvényt, ahol $F(x)$ az eloszlásfüggvény, ennek segítségével a (3) baloldali egyenleteinek a megoldása sokkal gyorsabban történhetik, mert az ábrázolt függvénynek a c_i, c_{i+1} ívhez tartozó differenciahányadosa a_i -vel egyenlő. A differenciahányados mérése állítható vonalzóval történt.

A számításokat intézetünkben Tekse Kálmán alkalmazott matematika szakos hallgató termelési gyakorlati munkájaként végezte, a számítás egyszerűsítéséhez néhány ötlettel hozzájárult. A kiszámított értékeket a függelékként közölt táblázat tartalmazza. Ezeket alkalmazhatjuk abban az esetben, ha normális eloszlásból veszünk ki nagy mintát. Ha ennek várható értékére és szórására a számítások elvégzése előtt még tájékoztató adatunk sincsen, akkor a két szélső értékből nyerhetünk ezekre előzetes becslést.

Az esetek nagy részében azonban a gyakorlati alkalmazást bizonyos körülmények egyelőre még megnehezítik. Így pl. nehézséget jelent az, hogy feltételeztük az elméleti eloszlás ismeretét, továbbá, hogy az így kapott értékek nem kerek számok. A további feladat lesz tehát a módszernek a gyakorlati alkalmazás megkönnyítése irányában való továbbfejlesztése.

6. Mint érdekes ténytet megemlíjtük, hogy az itt tárgyalt probléma egy csillagászati problémával is kapcsolatban áll.

O. J. Smidt szovjet akadémikus ismert kozmogóniai elméletében [2] többek között foglalkozik a bolygótávolságok törvényével is. Ismeretes, hogy elmélete szerint a bolygók a Nap által befogott meteoritrajból keletkeztek. Felteszi, hogy a raj befogás utáni q fajlagos impulzusnyomatékának sűrűségfüggvénye valamilyen $f(q)$ függvény volt. Megállapítja, hogy ebben az esetben az i -edik bolygó fajlagos impulzusnyomatékát q_i -vel jelölve:

$$(8a) \quad q_i = \frac{\int_{c_{i-1}}^{c_i} qf(q) dq}{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(q) dq},$$

ahol

$$(8b) \quad c_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}.$$

q_i -ből az i -edik bolygónak a Naptól való távolsága kiszámítható. ($R_i = kq_i^2$, ahol k adott állandó.) Smidt azt írja, hogy minden egyes eloszlási törvénynek, azaz minden $f(x)$ függvénynek megfelel a bolygótávolságoknak egy törvénye.

Az intervallumok határai és súlypontjai 0 várható értékű és egységnyi szórású normális eloszlás esetére.

k	Az intervallumok határa (<i>dőlt szedéssel</i>) és súlypontjai																			
1	0																			
2	—0,71 0 0,71																			
3	—1,22 —0,61 0 0,61 1,22																			
4	—1,52 —0,99 —0,45 0 0,45 0,99 1,52																			
5	—1,72 —1,24 —0,76 —0,38 0 0,38 0,76 1,24 1,72																			
6	—1,90 —1,46 —1,02 —0,67 —0,32 0 0,32 0,67 1,02 1,46 1,90																			
7	—2,04 —1,62 —1,20 —0,88 —0,56 —0,28 0 0,28 0,56 0,88 1,20 1,62 2,04																			
8	—2,13 —1,73 —1,33 —1,04 —0,75 —0,50 —0,25 0 0,25 0,50 0,75 1,04 1,33 1,73 2,13																			
9	—2,23 —1,84 —1,45 —1,17 —0,89 —0,66 —0,43 —0,22 0 0,22 0,43 0,66 0,89 1,17 1,45 1,84 2,23																			
10	—2,33 —1,95 —1,57 —1,31 —1,05 —0,83 —0,61 —0,40 —0,20 0 0,20 0,40 0,61 0,83 1,05 1,31 1,57 1,95 2,33																			
11	—2,42 —2,05 —1,68 —1,43 —1,18 —0,97 —0,76 —0,57 —0,38 —0,19 0 0,19 0,38 0,57 0,76 0,97 1,18 1,43 1,68 2,05 2,42																			
12	—2,50 —2,15 —1,80 —1,55 —1,30 —1,10 —0,90 —0,72 —0,53 —0,35 —0,18 0 0,18 0,35 0,53 0,72 0,90 1,10 1,30 1,55 1,80 2,15 2,50																			
13	—2,57 —2,23 —1,89 —1,65 —1,41 —1,21 —1,02 —0,84 —0,66 —0,50 —0,34 —0,17 0 0,17 0,34 0,50 0,66 0,84 1,02 1,21 1,41 1,65 1,89 2,23 2,57																			
14	—2,65 —2,31 —1,97 —1,74 —1,51 —1,31 —1,12 —0,95 —0,78 —0,62 —0,46 —0,31 —0,15 0 0,15 0,31 0,46 0,62 0,78 0,95 1,12 1,31 1,51 1,74 1,97 2,31 2,65																			
15	—2,71 —2,37 —2,04 —1,81 —1,58 —1,40 —1,21 —1,05 —0,89 —0,73 —0,58 —0,43 —0,29 —0,14 0 0,14 0,29 0,43 0,58 0,73 0,89 1,05 1,21 1,40 1,58 1,81 2,04 2,37 2,71																			

Megjegyzés: A táblázat k -adik sora rendre a megfelelő $a_1, c_1, a_2, c_2, \dots, c_{k-1}, a_k$ értékeket adja meg, a c_i értékeket *dőlt szedéssel* ($c_0 = -\infty, c_k = \infty$). Például $k = 4$ esetén $c_0 = -\infty, a_1 = -1,52, c_1 = -0,99, a_2 = -0,45, c_2 = 0, a_3 = 0,45, c_3 = 0,99, a_4 = 1,52, c_4 = \infty$.

A Magyar Tudományos Akadémia által a Smidt-elméletről rendezett ankéton Rényi Alfréd hozzászólásában [1] bebizonyította, hogy bizonyos $f(x)$ függvények esetén a bolygótávolságoknak nem egy, hanem több különböző törvénye lehet. Bebizonyította továbbá, hogy bizonyos esetekben [ha $f(x) = Cx^\alpha$, ahol $\alpha < 0$, továbbá, ha $f(x)$ monoton növekvő és konkáv függvény] a bolygótávolságok törvénye egyértelműen meghatározott. Felvetette a kérdést, hogy általában mi a szükséges és elégséges feltétele az $f(x)$ függvényre nézve, hogy a (8) megoldása egyértelmű legyen.

Látható, hogy (8) megegyezik (3)-mal, bár a határfeltételek különbözőnek az (1)-ben megadott határfeltételektől. Smidt felteszi ugyanis, hogy a két szélső helyzetű bolygó fajlagos impulzusmomentuma adott. Ez a feltevés nyilván önkényes a számítás egyszerűbbé tétele céljából; hiszen a szélső bolygók fajlagos impulzusnyomatéka sem lehet az eredeti eloszlástól független. Mindenesetre több joggal tehetjük fel az (1)-ben foglalt határfeltételt, természetesen egyidejűleg feltételezve, hogy $f(x)$ csak egy véges intervallumban lehet pozitív, egyébként 0.

Tehát a jelen dolgozat 4. pontjában közölt eredmény a Smidt-elméletre is alkalmazható.* Megjegyezzük azonban, hogy segédteételünk akkor is alkalmazható, és ugyanarra az eredményre vezet, mint eredetileg, ha a határfeltételeket Smidt tárgyalásának megfelelően módosítjuk.

Eredményünkéből tehát következik, hogy ha $\log f(x)$ konkáv, akkor a bolygótávolság egyértelműen meghatározott.

Ez az eset magában foglalja azt az esetet is, mikor $f(x) = cx^\alpha$, ahol $\alpha > 0$, továbbá azt az esetet is, ha $f(x)$ konkáv, függetlenül attól, hogy monoton-e vagy nem.

Továbbra is eldöntetlen marad azonban az a probléma, hogy mi a szükséges és elegendő feltétele a (3) egyértelmű megoldhatóságának az $f(x)$ függvényre nézve.

IRODALOM

- [1] Ankét O. J. Smidt: »Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről« c. könyvről. Rényi Alfréd hozzászólása. MTA. III. oszt. Közleményei. III/4. (1953) 595. o.
[2] O. J. Smidt: Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről. Akadémiai Kiadó, 1952.

ВЫБОР ИНТЕРВАЛОВ ПРИ ГРУППИРОВКЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫБОРКИ

К. Шаркади

Резюме

В работе доказано, что для того, чтобы среднее значение квадрата отклонения между средними значениями, вычисленными путем группировки и путем точного расчета, было минимальным, необходимо выполнение системы уравнений (3). Если эта система уравнений имеет только одно решение, то это условие является также достаточным. На примере показано, что в противном случае это не имеет места. В дальнейшем

* Nyilvánvaló, hogy teljesen mellékes, hogy az $f(x)$ függvény az $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ feltétellel normálva van-e vagy nem.

доказывается, что если $\log f(x)$ — вогнутая, то решение однозначно определено. Для случая нормального распределения даны также таблицы для различного числа интервалов.

Проблема связана также с астрономией, так как — по теории О. Ю. Шмидта — система уравнений, определяющая расстояние между планетами и солнцем в точности совпадает с системой уравнений (3).

CHOICE OF INTERVALS FOR GROUPING OF DATA

K. SARKADI

Summary

The following statement is proved: the expected value of the square of the difference between the averages calculated by grouping of data and by the exact method cannot be minimal unless the system of equations (3) is fulfilled. If (3) has only one solution, the condition itself is sufficient. An example for the opposite case is given. Furthermore, it is stated that if $\log f(x)$ is concave the solution is unique. To cover the case of normal distribution a table for several numbers of intervals is constructed.

The problem also has some astronomical bearings, since the system of equations, which according to the theory of O. J. Schmidt determines the distance of the planets from the sun, agrees exactly with the system of equations (3).

A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉNEK ALKALMAZÁSA A STATISZTIKAI MINŐSÉGELLENŐRZÉSSEN

FONTÁNYI ÁGOTA, SARKADI KÁROLY ÉS VAS GYÖRGYNE

Összefoglalás

A cikk az ipari gyártásközbéli minőségellenőrzés új statisztikai módszerét tárgyalja, mely a rendezett minták elméletén alapszik.

A statisztikai minőségellenőrzés számára — melynek fő eszközei az ú.n. ellenőrzőkártyák — sokszor jelent nehézséget az ellenőrzőkártyákon vezetni kívánt statisztikai jellemzők (pl. átlag, terjedelem) kiszámításával járó munkatöbblet. Így merült fel a szükséglet egy olyan módszer iránt, mely nem igényel számítást az ellenőrtől, mégis biztos matematikai alapjai vannak. — Ilyennek kínálkozik *Braginszkij* ötlete: a rendezett mintákkal való ellenőrzés, ahol a mintában mért értékeket közvetlenül visszük fel az ellenőrző diagrammra, melyen azok »maguktól rendeződnek« nagyság szerint. — A nagyság szerint k -adik elemek mindegyikére megadhatók az ú. n. ellenőrzőhatárok, melyeken belül 1-hez közeleső valószínűséggel kell elhelyezkedniök akkor, ha a gyártásban semmi rendellenesség nincsen. Az ellenőrnek csak azt kell figyelnie, hogy az elemek ezen határok között vannak-e. — A cikk tárgyalja a módszer elméleti alapjait és közli a számításokhoz szükséges segéd táblázatokat, melyeket Intézetünk dolgozott ki.

1. A matematikai statisztika szerepe az ipari minőségellenőrzésben

A minőségellenőrzés azon módszereit, amelyek a matematikai statisztika elméletének felhasználásával minta alapján következtetnek a teljes gyártmány mennyiségre, statisztikai ellenőrző módszereknek nevezzük. A statisztikai ellenőrzésnek több gyakorlati megvalósításmódja ismeretes, melyeket különböző üzemi és gazdasági követelmények alakítottak ki. Ezen módszerek egyrésze gyártásközbéli ellenőrzés során nyer alkalmazást, más része viszont a kész termékek ellenőrzésénél. E két csoporton belül még különböző lehetőségek nyílnak az ellenőrzés formájának megválasztására.

Így például a gyártásközi statisztikai minőségellenőrzés legismertebb fajtáinál a gyártásközből vett minták következő jellemzőit kísérik figyelemmel:

- a minta egyes darabjain mért értékek átlagát és ugyanakkor terjedelmét (a legkisebb és legnagyobb érték különbsége),
- a minta értékeinek átlagát és szórását,
- a mintában talált selejtes darabok számát, stb.

E módszerek közül az első kettő és még számtalan további módszer kisebb-nagyobb számítási feladatokat ró az azt alkalmazó ellenőrre. Az alábbiakban olyan módszert ismertetünk, melynek alkalmazásához semmiféle számolásra nincs szükség, de mint később látni fogjuk, további előnyökkel is rendelkezik. E módszert *Braginszkij*[1] szovjet szerző ötlete nyomán — szí-

gorú elméleti alapokra támaszkodva — Intézetünk dolgozta ki és hazánkban való gyakorlati alkalmazását először kezdeményezte [5].

Az alábbiakban foglalkozunk e módszer elméleti alapjaival, a gyakorlatba való bevezetés munkájához szükséges tudnivalókkal és alkalmazásának első tapasztalataival, továbbá közöljük az alkalmazáshoz szükséges — Intézetünk által kidolgozott — táblázatokat.

2. Rendezett mintaelemekkel való statisztikai minőségellenőrzés valószínűségszámítási alapjai

E módszer a rendezett minták elméletére támaszkodik. Ez az elmélet feleletet ad arra a kérdésre, hogy ha egy ismert eloszlású sokaságból n elemű mintát veszünk és a minta elemeit nagyság szerint rendezzük, akkor milyen lesz a k -adik elem eloszlása ($k = 1, 2, \dots, n$). Minthogy pedig valamely minta nagyságszerint rendezett elemeinek — pl. az elsőnek (legkisebbnek) — határozott eloszlása van, ennél fogva megadható két olyan határ, amely határok között a minta ezen eleme pl. 99%-os valószínűséggel fog elhelyezkedni. Ha tehát a minta nagyság szerint első, második, stb. elemei részére ezeket a határokat elő tudjuk írni, akkor a gyártás során figyelemmel kísérhetjük, hogy a megfelelő mintaelemek valóban az előírt határok közé esnek-e. Ez teszi lehetővé, hogy a rendezett mintaelemek figyelemmel kíséréseivel minőségellenőrzési módszert építsünk ki.

Tekintsük valamely gyártmány egy mérhető tulajdonságát. Ennek mértéke stabilis gyártás során egy bizonyos meghatározott eloszlást fog követni. Jelöljük az eloszlás sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel, eloszlásfüggvényét $F(x)$ -szel, az n elemű minta k -adik elemének sűrűségfüggvényét $f_{nk}(x)$ -szel, és eloszlásfüggvényét $F_{nk}(x)$ -szel ($k = 1, 2, \dots, n$).

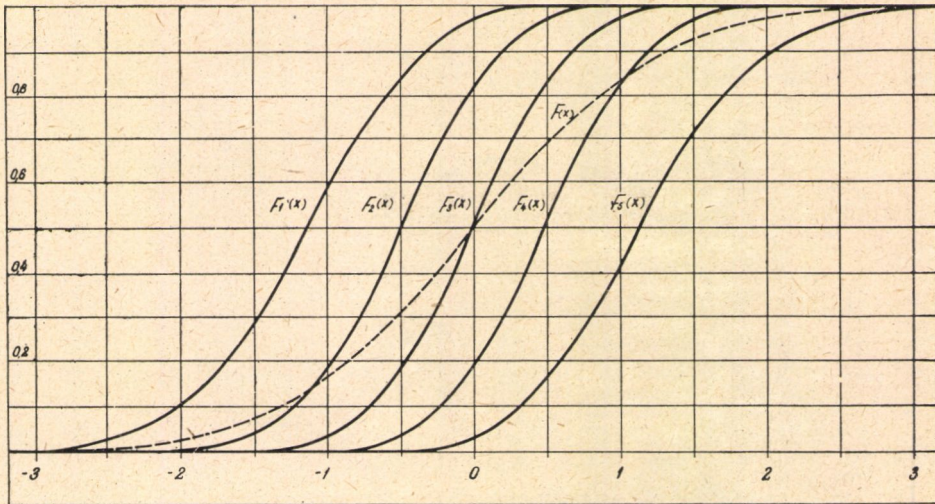
Ezen eloszlás-, illetve sűrűségfüggvények között a következő összefüggések állnak fenn [2]:

$$F_{nk}(x) = \sum_{r=k}^n \binom{n}{r} (F(x))^r (1 - F(x))^{n-r} \quad (1)$$

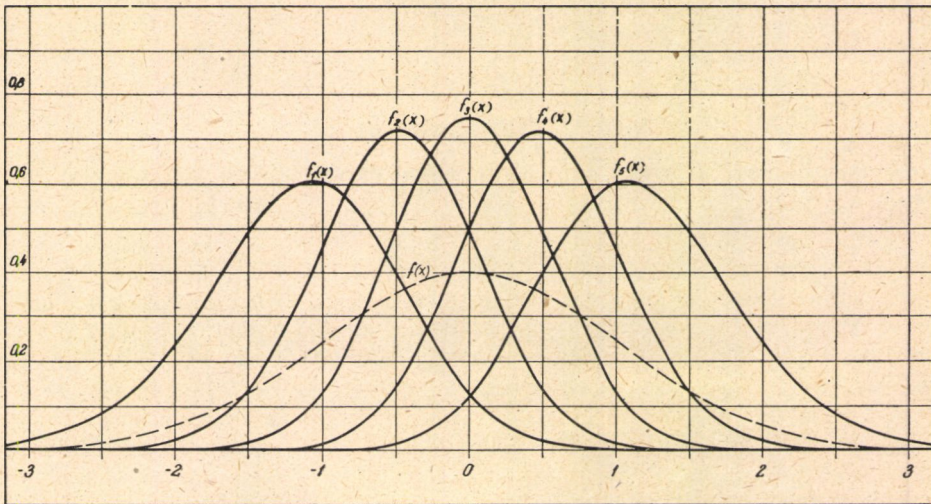
$$f_{nk}(x) = k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x).$$

Ezen összefüggések lehetővé teszik, hogy az eredeti eloszlásból meghatározzuk a rendezett mintaelemek bármelyikének sűrűségfüggvényét, illetve eloszlásfüggvényét. Nevezetesen meghatározható $F(x)$ -nek két határozott x_1 és x_2 helyhez tartozó $F(x_1)$ és $F(x_2)$ függvényértékéből az $F_{nk}(x_1)$ és $F_{nk}(x_2)$ érték, tehát különbségük is, vagyis annak a valószínűsége, hogy a k -adik elem x_1 és x_2 közé esik. Ha tehát valamely n elemű minta k -adik elemére nézve valamely $F(x)$ alapeloszlásfüggvényből kiindulva meghatározzuk azon x_1 és x_2 értékeket, melyeken belül kell esnie a k -adik elem eloszlásának pl. 99%-os valószínűséggel, akkor ha a k -adik elem kívülesik ezen a 99%-os ún. ellenőrzőhatáron — ez igen nagy valószínűséggel arra enged következtetni, hogy az eredeti eloszlás már nem áll fenn a mért tulajdonság értékére nézve.

Az 1/a. sz. ábra szemléltető példaként normális eloszlású alapsokaságból vett ötelemű minták nagyság szerint rendezett elemeinek eloszlásfüggvényét



1/a. ábra



1/b. ábra

ábrázolja, az alapsokaság eloszlásfüggvényével együtt. Az 1/b. sz. ábra ábrázolja ugyanezek sűrűségfüggvényét.

Ha például megállapodunk abban, hogy 99%-os ellenőrzőhatárokat választunk, és az ellenőrzőhatár túllépését minden alkalommal jelnek tekint-

jük arra, hogy a gyártás megváltozott, akkor hibátlan gyártás esetén 99%-os valószínűsége van annak, hogy nem avatkozunk be indokolatlanul a gyártás menetébe, azaz 100 eset közül általában csak egyszer fog előfordulni, hogy a gyártásmenet megváltozására következtetünk, holott az ellenőrzőhatár túllépését csak a véletlen okozta.

A mondott 99%-os valószínűség arra vonatkozik, ha csak egyetlen elem »99%-os« ellenőrzőhatárát figyeljük. Tehát pl. a 3. elemre határozzuk meg azon x_1 és x_2 értéket, melyen belül kell esnie az esetek 99%-ában. Miután azonban egyszerre több elem ellenőrzőhatárát figyeljük, tudnunk kell azt is, hogy mi annak az együttes valószínűsége, hogy a figyelt elemek közül bármelyik túllépje az ellenőrzőhatárát; ennek valószínűsége természetesen nagyobb, mint annak, hogy csak egy bizonyos elem lépje azt túl. Az együttes valószínűség kiszámításának módjával a függelékben foglalkozunk.

A gyakorlatban általában nem valamennyi, hanem csak bizonyos kiválasztott mintaelemeket kísérünk figyelemmel, és igen sokszor ezeknek is csak vagy az alsó, vagy a felső határát.

Ahhoz, hogy dönteni tudjunk abban a kérdésben, hány elem ellenőrzőhatárát figyeljük meg és melyeknek az alsó, melyeknek a felső határát, szükséges itt röviden foglalkoznunk valamely minta különböző elemeinek egymástól való függőségével, illetve függetlenségével.

A rendezés nélküli minta elemeit egymástól függetleneknek tekinthetjük, ami azt jelenti, hogy ha az egyik mintaelem pontos értékét ismerjük, ezzel még nem tudunk semmivel sem többet a többi mintaelem eloszlásáról. Nem mondható el ugyanez a rendezett minta elemeiről. A függelékben kimutatjuk, hogy a minta rendezett elemei között pozitív korreláció áll fenn. Ez annál szorosabb, minél közelebbi elemekről van szó. Mennél nagyobb a korreláció, annál könnyebben fordul elő, hogy két mintaelem egyszerre »jelez«: egyszerre lépik át felső vagy egyszerre alsó ellenőrzőhatárukat.

A korreláció megmarad akkor is, ha az eredeti eloszlás eltolódik, vagy megváltozik. Ezért, ha nem minden egyes mintaelem viselkedését figyeljük, két egymástól távolabb eső elem ellenőrzése érzékenyebb eljárás, mint két szomszédos elemé, ha azonos oldali ellenőrzőhatárokat kísérünk figyelemmel.

Tehát úgy kell megválasztanunk az ellenőrzendő mintaelemeket, hogy azok — bár egymástól függetlenek nem lehetnek — mégis közel függetlenek legyenek egymástól. Éppen ez a körülmény igen egyszerű közelítő számítást tesz lehetővé az együttes valószínűségekre nézve. Ha a számítást úgy végezzük, hogy feltesszük, hogy a vizsgált mintaelemek egymástól függetlenek, akkor annak a valószínűsége, hogy a vizsgált mintaelemek egyike se lépje át ellenőrzőhatárát, egyenlő azoknak a valószínűségeknek a szorzatával, hogy az egyes vizsgált mintaelemek külön-külön nem lépik át ellenőrzőhatáraikat. Bár ez a feltevés és a számítás is csak közelítő, annál inkább elfogadható lesz, mennél nagyobb a minta darabszáma (ugyanannyi megvizsgált elem esetén) és az egyes elemek mennél távolabb esnek egymástól. A függelékben ezt a kérdést is részletesen megvizsgáljuk. A numerikus számítások azt mutatják, hogy már ötelemű mintánál, ha a két szélső elem külső ellenőrzőhatárát és a középső elem mindkét ellenőrzőhatárát figyeljük, a két számítási módszerrel kiszámított értékek közti különbség nem lesz nagyobb, mint a számítási hiba határa, a gyakorlat által megkövetelt számítási pontosság mellett. Ez azt jelenti, hogy a gyakorlati számítások szempontjából majdnem mindig fel lehet téte-

lezni a függetlenséget. Így pl. ha a mondott esetben a két szélső elemre nézve 97,5%-nál választjuk a valószínűségi határt, míg a középső elemre 95%-nál, akkor annak valószínűsége, hogy egyik vizsgált elem sem lép ki ellenőrzőhatárai közül, közelítőleg $0,975^2 \cdot 0,95 \approx 0,903$ lesz. Az exakt módszerrel kapott eredmény 0,907, ahol azonban az utolsó számjegy a számítási hiba-határ következtében már nem megbízható.

3. Eddig alkalmazott módszerek, amelyeknél a rendezett minták elméletét felhasználták

Olyan statisztikai ellenőrző módszereket, amelyek rendezett minta-elemek valamelyikének figyelemmel kísérésén alapulnak, már régebben alkalmaznak.

Így igen elterjedt a minta mediánjának ellenőrzése, amely mellett általában valamely más természetű jellemző (pl. a terjedelem) megfigyelése is szokásos. A medián alkalmazását elsősorban az indokolja, hogy szimmetrikus eloszlás esetén nem ad sokkal rosszabb felvilágosítást a sokaság elhelyezkedéséről, mint a minta átlaga, ugyanakkor nem igényel semmiféle számítást.

A rendezett minták elemeinek eloszlását használja fel az a minőség-ellenőrzési módszer is, amelynél a minta legnagyobb és legkisebb elemét kísérik figyelemmel. — Említi ezt a módszert a szovjet irodalom is. — Széleskörben alkalmazzák a maximum-minimum rendszerű kártyákat a cseh ipari minőség-ellenőrzésben. Az erre vonatkozó gyakorlati utasítások, valamint az ellenőrzőhatárok kiszámításához szükséges táblázat fontos részt foglal el pl. *J. Uchytíl* és a cseh Nehézipari Kutatóintézet statisztikai minőségellenőrzésről szóló könyvében [3] [4].

Azt a gondolatot, hogy a rendezett minta bármely elemének valószínűségi határait fel lehet használni az ipari minőségellenőrzésben, *Braginszkij* vetette fel.

Könyvében az ilyen módszerrel vezetett ellenőrzőkártyának több változatát ismerteti és részletes, gyakorlati szempontból értékes útmutatásokat ad azok vezetésére.

A rendezett minta elemeinek valószínűségi határaitra táblázatokat ad és leírja, hogy ezeket a határokat hogyan számította ki. Ez az eljárás meg-egyezik az általunk követett és fentebb ismertetett eljárással abban, hogy x -nek azt a két értékét, amely közé a k -adik mintaelemnek bizonyos valószínűséggel esnie kell, úgy számítja ki, hogy előbb meghatározza a keresett x értékekhez tartozó két $F(x)$ értéket.

Ezen értékek kiszámítását azonban *Braginszkij* nem az exakt matematikai összefüggések alapján oldotta meg. Számításainak alapjait a következőkben ismertetjük röviden:

Az $F(\xi_k^*)$ várható értékét $\frac{2k-1}{2n}$ -nek tekinti (ξ_k^* -gal jelöltük a nagyság szerint rendezett k -adik mintaelem értékét, amely valószínűségi változó). Szórás-négyzetének becsléséül pedig az $\frac{F(\xi_k^*)[1-F(\xi_k^*)]}{n}$ kifejezést adja meg. Ezután az ellenőrzőhatárokat úgy állapítja meg, hogy a várható értéktől való távolságuk a szórás háromszorosa legyen.

Ez az eljárás többféle szempontból kifogásolható : a háromszoros szórás határ használata csak normális eloszlás esetében indokolt és $F(\xi_k^*)$ eloszlása nem az ; továbbá nem indokolt a szórás helyett az ellenőrzőhatártól függő szórásbecsléssel dolgozni. A szórásbecslésre és a várható értékre adott kifejezések még csak nem is megfelelő közelítések.

Ezért, a *Braginszkij* által megadott módszer alap gondolatának és egyes gyakorlati utasításainak megtartása mellett, az ellenőrzésnél alkalmazandó határokat *Braginszkij* eljárásától eltérően a rendstatisztika ismert eredményeinek felhasználásával exakt módon számítottuk ki.

4. Az ellenőrzőhatárok kiszámításának módja, gyakorlati segéd táblázataink ismertetése

Minthogy a rendezett elemű mintákkal való minőségellenőrzés azon alapszik, hogy valamely többelemű minta egyes rendezett elemeire nézve megfigyeljük, hogy azok az ellenőrzőhatárok közé esnek-e, első feladat ezen ellenőrzőhatároknak a kiszámítása, illetve erre vonatkozó módszer kidolgozása.

Annak érdekében, hogy az ellenőrzőhatárok kiszámítását megkönnyítsük, táblázatot készítettünk, amelynek segítségével meghatározhatók tetszőleges — valamely gépre és gyártmányra adatfelvétel alapján megállapított — eloszláshoz a minták rendezett elemeire vonatkozó ellenőrzőhatárok.

Az ellenőrzőhatárok megállapításánál a gyártás körülményeinek figyelembevétele alapján kell határozni a felett, hogy ezen határok közé a k -adik elem milyen valószínűséggel essék. Táblázatainkat 99 és 95 százalékos valószínűségi határokkal készítettük el oly módon, hogy mind a felső, mind az alsó határra nézve annak a valószínűsége, hogy a mintaelem az illető határon kívülesik, az első esetben 0,5—0,5%, a második esetben 2,5—2,5%. Ez tehát azt jelenti, hogy olyan x_1 , illetve x_2 értékeket keresünk, amelyekre nézve $F_{nk}(x_1) = 0,005$, illetve 0,025 és $F_{nk}(x_2) = 0,995$, illetve 0,975. A 99%-os valószínűségi határok jobban védenek a gyártás menetébe való felesleges beavatkozással szemben. Ugyanakkor azonban gyakrabban minősítik a minta alapján megfelelőnek a ténylegesen selejtes gyártást, mint a 95%-os határok. — A gyakorlatban tehát akkor fogunk a szigorúbb, 95%-os határokkal dolgozni, ha nagy biztonsággal akarunk a selejt megjelenése ellen védekezni. Ha azonban a gyártás menetébe való felesleges beavatkozás elkerülése nagyobb érdek, akkor a 99%-os kevésbé szigorú határok választása célszerű.

Meg kell jegyeznünk, hogy a táblázatokon feltüntetett 99%-os, illetve 95%-os valószínűségi szint csak az egyes mintaelemekre vonatkozik, és pedig arra az esetre, ha mindkét oldali ellenőrzőhatárt figyeljük.

Az I. táblázat azokat az értékeket tartalmazza, amelyekből egy adott gyártási eljárásnál tapasztalatilag meghatározott eloszláshoz kiszámíthatjuk a különböző darabszámú minták egyes elemeinek alsó és felső ellenőrzőhatárait. A minták darabszámát n -nel, a nagyság szerint rendezett minták sorsszámát pedig k -val jelöltük. A táblázat baloldali 95%-os, jobboldali 99%-os valószínűségi határokhöz tartozó értékek találhatók.

Ezen értékeket a gyakorlatban elegendőnek látszó n és k számokra dolgoztuk ki, mégpedig $n = 4 - 15$ -ig minden egyes mintára és minden elemre, ezen felül $n = 29$ -ig pedig csak kiválasztott mintadarabszámokra és ezen belül is csak meghatározott elemekre.

Az ellenőrzőhatárok megállapításánál tehát arról van szó, hogy adott $F_{nk}(x)$ értékekhez tartozó x értékeket keresünk. Ezt nem tudjuk közvetlenül megtenni. Amint az előzőkből azonban már láttuk, az $F_{nk}(x)$ értékek meghatározzák az ugyanezen x -hez tartozó $F(x)$ értékeket. Az x -hez tartozó $F(x)$ érték ismeretében viszont — ha ismerjük az eloszlásfüggvényt — az x értéke meghatározható.

A I. sz. táblázat első oszlopa tartalmazza $F(x)$ -nek azokat az értékeit, amely értékekhez tartozó x_1 , illetve x_2 -re vonatkozóan az $F_{nk}(x_1) = 0,005$, illetve $0,025$ (alsó ellenőrzőhatárok) és az $F_{nk}(x_2) = 0,995$, illetve $0,975$ (felső ellenőrzőhatárok). Hogy ezen értékekből miképpen határozhatjuk meg a gyakorlatban, egyszerű eszközökkel bármilyen eloszlás esetén a keresett x_1 , illetve x_2 értékeket, annak szemléltetésére egy konkrét példát adunk.

Az túloldali 1. sz. táblázat egy adagból származó csapágygolyók törőere-jének tapasztalati eloszlását tartalmazza. Az első oszlop tartalmazza a mért értékeket, a második oszlop ezek gyakoriságát, a harmadik oszlop pedig az illető értéknél nem nagyobb darabok számát, a negyedik oszlop ezen utóbbiak arányát az összes darabok számához viszonyítva, vagyis a tapasztalati eloszlás-függvény értékeit.

Vegyük például az ötelemű minta esetét és határozzuk meg a második mintaelem 95%-os valószínűségű alsó és felső ellenőrzőhatárát. Az I. sz. táblázat 1. oszlopából látjuk, hogy az $F(x_1) = 0,052$, és az $F(x_2) = 0,717$. Az 1. sz. táblázat negyedik oszlopában megnézzük, hogy ezen értékeket melyik ott szereplő $F(x)$ értékek közelítik meg legjobban. Látjuk, hogy az $F(x_1) = 0,052$ értéket az $F(x) = 0,054$ érték, az $F(x_2) = 0,717$ értéket az $F(x) = 0,720$ érték. Tehát az ezekhez tartozó $x_1 = 3800$ képezi a második elem alsó és az $x_2 = 5600$ a második elem felső ellenőrzőhatárát.

Ha valamely gyártási eljárásnál a tapasztalat is alátámaszt valamely elvileg indokolt, ismert eloszlást $F(x)$ -re nézve, akkor ezen eloszlásnak táblázatban kidolgozott adataira támaszkodhatunk, vagyis az I. táblázat 1. oszlopából megállapított $F(x_1)$, illetve $F(x_2)$ -höz tartozó x_1 és x_2 értékeket ebből a táblázatból keressük vissza.

A normális eloszlásra vonatkozóan ezen visszakeresést elvégeztük, mivel az ipari minőségellenőrzés gyakorlatában az esetek igen nagy részében normális, vagy ahhoz igen közelálló eloszlású sokaságok fordulnak elő. A 2. oszlop értékei a 0 átlagos értékű és egységnyi szórású normális eloszlás megfelelő elemeinek ezen visszakeresett ellenőrzőhatárait tartalmazzák. Ezekből az úgynevezett »kontrolltényező«-ből a tényleges eloszlás ellenőrzőhatárait a következőképpen kapjuk meg: a kontrolltényezőt szorozzuk az adott gyártóberendezésre és gyártmányra vonatkozó adatfelvételtől kapott szórással, és az így kapott értékeket hozzáadjuk — természetesen az előjel figyelembevételével — a műszaki követelmények által megszabott legkedvezőbb átlaghoz. A legkedvezőbb átlag normális eloszlás esetén a tűrésmező közepén van akkor, ha a tűréshatárok távolsága kb. egyenlő 6σ -val, vagy annál kisebb. (Az utóbbi esetben szükség szerint az átlag a javítható selejt irányába eltolható.)

Amennyiben a tűréshatárok egymástól való távolsága nagyobb, mint 6σ , úgy gyakorlatilag a gyártás selejtmentes lesz mindaddig, amíg az átlag mindkét tűréshatártól legalább 3σ -nyi távolságra van. Nem szükséges tehát, hogy az átlag a tűrésmező közepén helyezkedjék el, hanem e sávon belül eltolódhat. Ebben az esetben a felső ellenőrzőhatárokat úgy kapjuk meg, ha

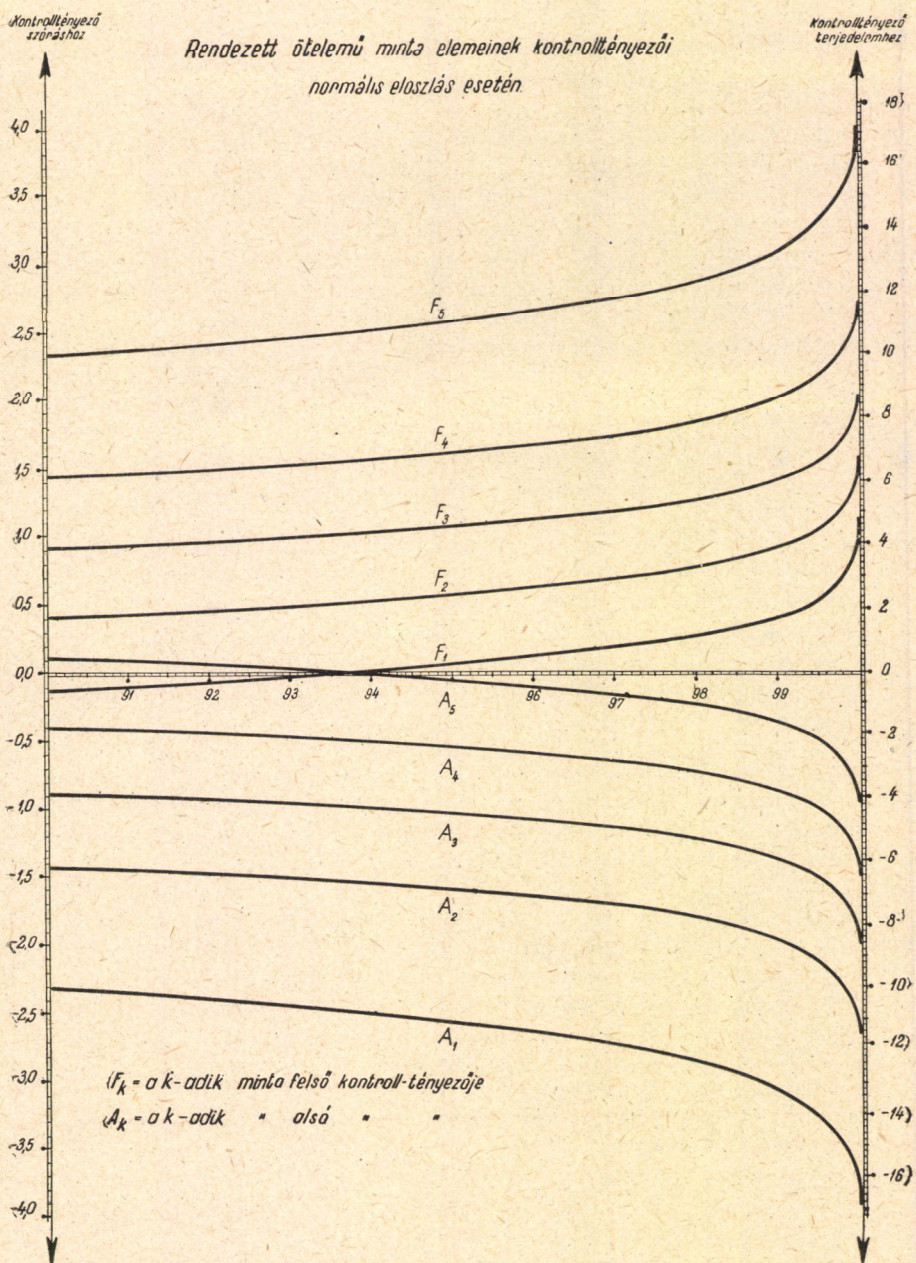
a lehető legnagyobb megengedhető átlaggal számolunk, — amely a felső tűréshatártól lefelé 3σ -nyi távolságra van — az alsó határokat pedig úgy, hogy a legkisebb megengedhető átlaggal számolunk, amely az alsó tűréshatártól felfelé van 3σ -val.

1. táblázat

i	1.	2.	3.	4.
	x_i	f_i	$\sum_{i=1}^k f_i$	$\sum_{i=1}^k f_i$
	kg	db.		$F(x) = \frac{\sum_{i=1}^k f_i}{N}$
1	3300	1	1	0,004
2	3400	1	2	0,008
3	3500	2	4	0,017
4	3600	3	7	0,029
5	3700	2	9	0,038
6	3800	4	13	0,054
7	3900	5	18	0,075
8	4000	3	21	0,088
9	4100	2	23	0,096
10	4200	3	26	0,109
11	4300	4	30	0,126
12	4400	6	36	0,151
13	4500	5	41	0,172
14	4600	9	50	0,209
15	4700	11	61	0,255
16	4800	11	72	0,301
17	4900	9	81	0,339
18	5000	14	95	0,397
19	5100	13	108	0,452
20	5200	17	125	0,523
21	5300	15	140	0,586
22	5400	11	151	0,632
23	5500	12	163	0,682
24	5600	9	172	0,720
25	5700	12	184	0,770
26	5800	8	192	0,803
27	5900	7	199	0,833
28	6000	8	207	0,866
29	6100	3	210	0,879
30	6200	7	217	0,908
31	6300	6	223	0,933
32	6400	4	227	0,950
33	6500	3	230	0,962
34	6600	2	232	0,971
35	6700	3	235	0,983
36	6800	2	237	0,992
37	6900	1	238	0,996
38=n	7000	1	239	1,000

x_i = mért érték

f_i = előfordulási gyakoriság. $\sum_{i=1}^n f_i = N = 239$.



2. ábra

A tűréshatárok és a szórás viszonyának figyelembevétele az ellenőrzőhatárok megállapításakor egyéb minőségellenőrzési módszereknél is szokásos.

A szórás ismeretében alkalmazandó kontrolltényezők mellett kidolgoztuk azokat a kontrolltényezőket is, amelyekből az átlagos terjedelem segítségével nyerhetjük az ellenőrzőhatárokat, mivel a gyakorlatban valamely adatfelvétel alapján az átlagos terjedelem kiszámítása egyszerűbb, mint a szórás meghatározása. Ezeket a kontrolltényezőket a 3. oszlop tartalmazza.

Visszatérve az I. sz. táblázat 1. oszlopára, megjegyezzük, hogy az abban foglalt értékek tekinthetők egyúttal az $F(x) = x$ ($0 \leq x \leq 1$) eloszlásfüggvényű egyenletes eloszlás kontrolltényezőinek is. Azonban az ipari minőségellenőrzés során ilyen eloszlással nemigen találkozhatunk, — tehát ezen oszlop közvetlen felhasználására a gyakorlatban általában nem nyílik alkalom.

Tekintettel arra, hogy a gyártásközi statisztikai minőségellenőrzés gyakorlatában igen gyakran fordul elő, hogy ötelemű mintákkal folyik az ellenőrzés, kidolgoztuk és diagrammba foglaltuk az ötelemű minták minden elemének a 90%-ot meghaladó tetszőleges biztonsághoz tartozó kontrolltényezőit (2. sz. ábra) normális eloszlású alapsokaságra. A kontrolltényezők a diagrammból közvetlenül leolvashatók mind a szórás, mind az átlagos terjedelem egységében.

5. A minták darabszáma, az ellenőrzendő mintaelemek és ellenőrzőhatárok kiválasztásának szempontjai

Az eddigiekből látható, hogy n elemű minták esetében meghatározhatók a nagyságszerint rendezett elemek mindegyikének ellenőrzőhatárai, a gyakorlatban azonban legfeljebb 5—6 elem figyelemmel kísérése látszik megvalósíthatónak. Előfordulhat természetesen, hogy igen nagy gazdasági érdek fűződik valamely gyártmány alapos ellenőrzéséhez, amikor ügyelni kell arra is, hogy a mért adat eloszlása semmiféle elváltozást ne mutasson. Ilyenkor több elem figyelemmel kísérése érdekében kerülhet sor. Ez azonban nyilván kivételes eset.

Felmerül azonban a kérdés, hogy ha meghatároztuk a figyelemmel kísért elemek számát és azt pl. ötnél választottuk, akkor vajon egy ötelemű minta minden elemét kísérjük-e figyelemmel, vagy pedig nagyobb darabszámú minta elemei közül válasszuk ki az ellenőrzőkártyán vezetendő öt elemet.

Ennek eldöntésénél figyelembe kell vennünk a rendezett minta elemeinek egymástól való függőségéről mondottakat. Nagyjából azt mondhatjuk, hogy nagyelemű mintának szomszédos elemei kb. ugyanarra figyelmeztetnek, tehát nagyelemű mintából az egymástól távolabb eső elemek figyelemmel kísérése ajánlatos. Pl. 13 elemű mintánál a nagyság szerint első, negyedik, hetedik, tizedik és tizenharmadik mintaelem választása célszerű, ha öt elemet kívánunk figyelni.

Tehát az ötelemű minta két szomszédos elemének függősége nagyobb, mint ha egy nagy elemszámú mintából öt elemet úgy választunk ki, hogy azok egyenlő távolságra és minél messzebb essenek egymástól. Ezért, ha nagyobb biztonsággal akarunk dolgozni, nagy elemszámú mintából válasszuk ki a megfigyelendő öt mintaelemet. Ha a sok munkadarab mérése technikai nehézséget okoz, akkor természetesen kisebb mintát választunk, esetleg csak éppen akkorát, ahány elemet figyelni akarunk, példánkban öteleműt.

Azt mondhatjuk azonban, hogy ezen kiválasztott elemek egy diagrammon való figyelemmel kísérése még mindig rendkívül bonyolult akkor, ha ezen elemek mindkét ellenőrzőhatárát berajzoljuk. A sok határ a diagrammot áttekinthetatlenné teszi, márcsak azért is, mert az ellenőrzőszávok (az egyes elemek ellenőrzőhatárai között lévő területek) általában egymásbanyúlnak. Ennek elkerülését teszi lehetővé, ha nem figyeljük minden kiválasztott elem mindkét ellenőrzőhatárát, hanem a középső elemnél kisebbeknek csak az alsó, a középső elemnél nagyobbaknak csak a felső ellenőrzőhatárát. Az így elhagyott belső ellenőrzőhatárok figyelmen kívül hagyása nem jelenti az ellenőrzés hatásosságának számbajövő csökkenését, hiszen ezek túllépése — abban az esetben, ha egyidejűleg minden adat a külső ellenőrző határokon belül van — csupán azt teszi valószínűvé, hogy az eloszlás még jobban az átlag körül sűrűsödik. Természetesen a mediánnak célszerű mind az alsó, mind a felső határát vezetni.

A mintaelemek kiválasztásánál tekintetbe kell venni azt a körülményt, hogy a statisztikai minőségellenőrző módszerek célja annak felderítése, hogy az eloszlásban nem állt-e be olyan változás, amelynek következtében a selejt megnövekszik. A leggyakrabban előforduló ilyen változás az, amikor az eloszlás jellege ugyan nem változik lényegesen, de átlaga eltolódik, vagy szórása megnövekszik, esetleg mindkettő egyszerre. Ha az átlag eltolódik, akkor minden egyes mintaelem elhelyezkedése megváltozik ugyan, azonban az eltolódást legérzékenyebben a medián jelzi, amely túllépi az eltolódás irányába eső ellenőrzőhatárát. Ha a szórás növekszik meg, úgy erre legérzékenyebben a szélső elemek reagálnak külső ellenőrzőhatáruk túllépésével. A külső elemeknek legalább valamelyike ezenkívül jelezni fog minden olyan egyéb változást is, amely a selejt megnövekedésével jár.

Fenti szempontok alapján ajánlatos a minta szélső elemei külső ellenőrzőhatárainak feltétlen figyelése és ezek mellett páratlan mintadarabszám esetén a középső elem mindkét határának, páros darabszám esetén a két középső elem mindegyike külső ellenőrzőhatárának figyelése.

Ha az ellenőrzést így végezzük, akkor a 2. pontban mondottak szerint az egy elemre vonatkozó 99%-os valószínűségi szint 98%-os, a 95%-os valószínűségi szint 90,3%-os valószínűséget jelent a valóságban arra nézve, hogy megfelelő gyártási folyamat esetén nem történik felesleges beavatkozás.

* 6. *Maximum-minimum-rendszerű ellenőrzés*

Mint már említettük, speciális esete a rendezett elemű mintákkal történő minőségellenőrzésnek az úgynevezett »maximum-minimum-kártyák« használata. Ennek a módszernek alkalmazásánál az ellenőrzőhatárok kiszámítása nem az általunk előbbiekben ismertetett módon szokott történni, bár így is elvégezhető. Ugyanis általában nem az alapsokaság eloszlásának jellemzőit használják fel, hanem a legkisebb, ill. legnagyobb mintaelem eloszlásának átlagát, ami az ellenőrzés hibaforrásait csökkenti. A szélső értékek átlagának megállapításához olyan adatfelvétel szükséges, amelynél sok akkora elemszámú mintát veszünk, amekkora minták alapján ellenőrizni akarunk.

Az ellenőrzőhatárok kiszámítását úgy végezzük, hogy a szélső elemek eloszlásának átlagát adatfelvételek alapján határozzuk meg és ehhez adjuk

hozzá — maximum esetében —, illetve vonjuk le — minimum esetében — az ugyancsak adatokból nyert átlagos terjedelem értékét, megszorozva egy — a minta darabszámától függő — táblázatban megadott konstanssal.

Intézetünkben a szélső elemek figyelemmel kísérésén alapuló ellenőrzési módszert több szempontból továbbvittük. Két — *Uchytíl* könyvében használttól különböző — valószínűségi szintre dolgoztuk ki a kontrolltényezőket, és pedig az ott találhatónál nagyobb mintaelemszám esetére is, valamint meghatároztuk a szélső értékeknek mind alsó, mind felső ellenőrzőhatárát is, normális alapeloszlás feltételezése mellett. Természetesen a gyakorlatban el lehet tekinteni a belső határok vezetésétől itt éppúgy, mint több mintaelem ellenőrzése esetében. Az ellenőrzőhatárok meghatározásánál a szélső értékek adatfelvételnél kapott átlagát egybevetjük az egész eloszlás minőség szempontjából legmegfelelőbb átlagával.

Módszerünk kidolgozásánál arra törekedtünk, hogy az a gyakorlati szakemberek kezében könnyen kezelhető maradjon. Ezt a célt szolgálja a II. sz. táblázat. Ez a táblázat tartalmazza a legnagyobb és legkisebb mintaelem kontrolltényezőit. A kontrolltényezők az ellenőrzőhatároknak a maximum, illetve minimum átlagától való távolságát adják meg — a feltüntetett valószínűségi szint mellett — az átlagos terjedelem egységében.

Tehát a táblázatból az ellenőrzőhatárokat a következőképpen kapjuk meg;

$$\text{a maximum felső ellenőrzőhatára : } \overline{x_{\max}} + K_m \overline{R}$$

$$\text{a maximum alsó ellenőrzőhatára : } \overline{x_{\max}} - B_m \overline{R}$$

$$\text{a minimum felső ellenőrzőhatára : } \overline{x_{\min}} + B_m \overline{R}$$

$$\text{a minimum alsó ellenőrzőhatára : } \overline{x_{\min}} - K_m \overline{R}$$

ahol $\overline{x_{\max}}$ = a maximum átlaga,

$\overline{x_{\min}}$ = a minimum átlaga,

\overline{R} = az átlagos terjedelem,

$$\overline{x_{\max}} - \overline{x_{\min}} = \overline{R}.$$

7. Kísérleti adatfelvétel és a gyakorlati alkalmazás első tapasztalatai

A rendezett minták elméletén alapuló statisztikai minőségellenőrzési módszer gyakorlati üzemi alkalmazása előtt kísérleti adatfelvételekkel ellenőriztük, hogy a tapasztalati adatok mennyire tesznek eleget feltevéseinknek. Méréseket végeztünk a Csepel Autógyárban, továbbá a Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárában. A gyártmány megválasztásánál az volt az irányadó, hogy a rendelkezésünkre álló mérőműszerekkel tűréshatárokon belül legalább 10—15 különböző értéket mérhessünk. Így a kapott eloszlás mellett egy-egy mintán belül a különböző elemek ritkán estek össze. Az adatfelvételt oly módon végeztük, hogy a kiválasztott gépen, minden egyes gyártmánydarabot az elkészülés sorrendjében mértünk le és jegyeztünk fel. A gyártásba történt külső beavatkozást mindenkor feltüntettük és feldolgozáskor csak azokat az adatokat tekintettük egy alapsokaságból származóknak, melyek beavatkozás nélkül készültek. Az egymásután következő adatokból akkora csoportokat

Kísérleti adatfelvétel

Készült: RM Művek Kerékpárgyárában

Gép: Skoda 40 egyorsós forgácsoló automata

Gyártmány: Kormány alsókúp

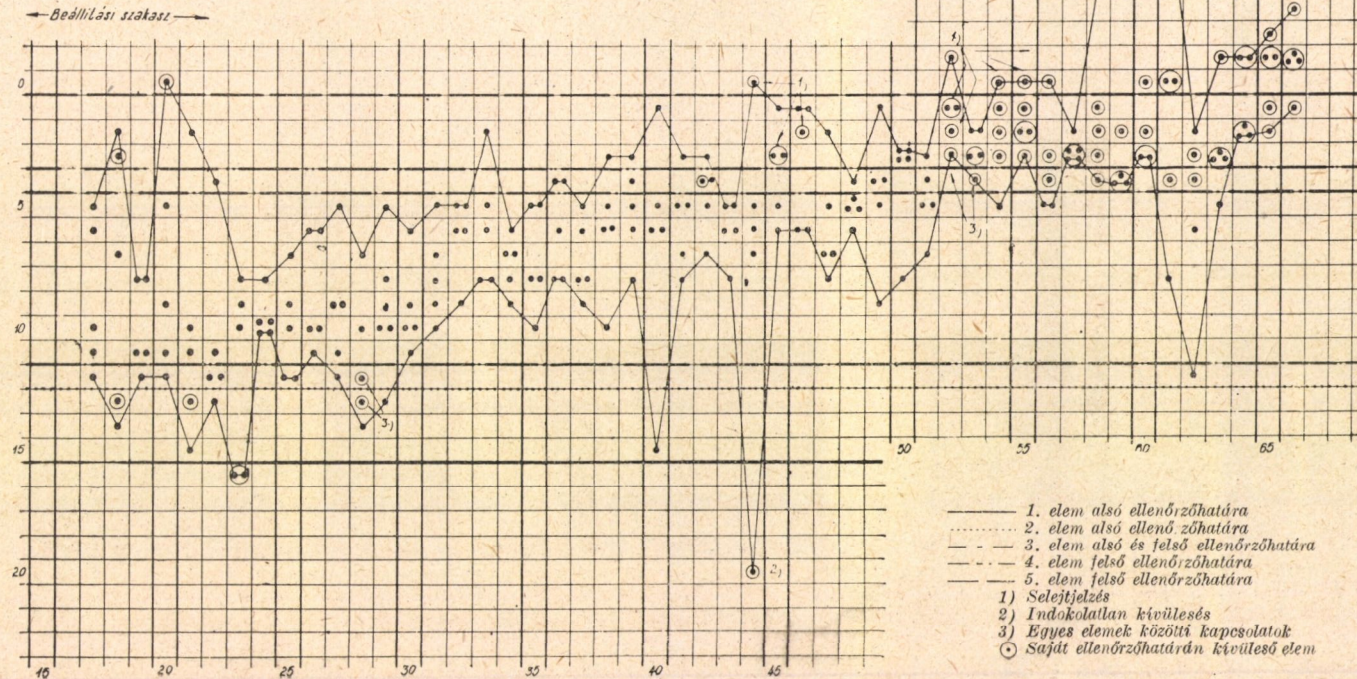
Mért méret: Külső átmérő

Néveleges méret: 36,6 mm

Tűréshatárok $+0,00$
 $-0,16$ mm

1 óra alatt készül 45 db

Ellenőrizre minden darab



3. ábra

képezve, amekkora mintákkal a gyakorlatban ellenőrizni kívánunk, az egyes csoportokba tartozó értékeket a 4. ábra szerinti ellenőrzőkártya egy-egy függőleges oszlopának megfelelő kockájába jegyeztük be. Ezekután kiszámítottuk az ellenőrzőhatárokat — egy-egy csoportot egy-egy mintának tekintve — és berajzoltuk őket. Mivel mindenegyes darab méretének ismeretében biztosan meg tudtuk állapítani, meddig volt a gyártás selejtmentes, a kártya segítségével ellenőriztük, hogy ezen ellenőrzőhatárok mennyiben reagálnak helyesen a gyártási hibákra, ill. mikor jeleznek ok nélkül selejtet. A kísérleti adatok igen jól illeszkedtek a valószínűségszámítás alapján kidolgozott határokhöz, ami alátámasztja a módszer alkalmazhatóságát. Példaképpen közöljük egyik ilyen adatfelvételünk anyagát, amely az R.-M. Művek Kerékpárgyárában egyorsós forgácsoló automatán kormányalsókúp gyártásakor készült (3. ábra). A diagrammból látható, hogy milyen érzékenyen jelzik a mintaelemek már előre a selejt bekövetkezését (1), ugyanakkor szépen megfigyelhetők az ellenőrzőhatároknak a valószínűségi szint százaléka következtében indokolt átlépései (2) olyan esetekben, mikor a gyártás selejtmentes. Megmutatkozik az egymáshoz közeleső elemek viselkedése közötti szoros kapcsolat is (3).

Ilyen előkészítő munkálatok után kezdtük meg a nagyság szerint rendezett elemű minták alapján történő gyártásközi minőségellenőrzés gyakorlati bevezetését. Elsőízben a Rákosi Mátyás Művek Kerékpárgyárában egy négyorsós forgácsoló automatagépen kerékpár-fékkónusz gyártásánál alkalmazták ezen ellenőrzési módszert. Az ellenőrzés céljaira rendelkezésre bocsátottuk a 4. ábra szerinti ellenőrzőkártyát, amelyre már az induláskor berajzoltuk azt a négy ellenőrzőhatárt, amelyet figyeltetni akartunk. Az ellenőr által felvett adatok a kártyán láthatók. — Az ellenőrzés eredményességét úgy kívántuk kontrollálni, hogy az ellenőrzés első két napja alatt elkészült és az ellenőr által jónak minősített teljes gyártmánymennyiséget utólag darabonként lemértük. Ugyanakkor — összehasonlítás céljából — a statisztikai minőségellenőrzés bevezetése előtti időszakból származó raktárkészletből — mely több nap gyártmányát tartalmazta — szintén méréseket végeztünk. Méréseink azt mutatják, hogy az ellenőrzőkártyával ellenőrzött gyártmányok 847 darabjából 20 darab volt tűréshatáron kívül, tehát 2,36%. Ugyanakkor a raktárkészletből megmért — találmra vett — 282 darabból 52 darab esett tűréshatáron kívül, tehát 18,44% volt selejt. Habár ezen ellenőrző mérések csak rövid időszakra vonatkoznak, mégis látható belőlük, hogy az itt ismerttetett statisztikai ellenőrzési módszernek jelentős selejtesökkentő hatása van. A kontrollmérések alkalmával felvett méretek gyakorisági eloszlását az 5a., ill. 5b. ábra mutatja.

A gyakorlati alkalmazáskor mind az üzemi minőségellenőrzési szakemberek, mind maguk a minőségellenőrök igen szívesen fogadják ezt a módszert. Véleményük szerint sokkal előnyösebb, mint az eddig használt statisztikai ellenőrző eljárások. Legnagyobb gyakorlati előnye, hogy az ellenőrzés egyszerűbben és gyorsabban végezhető: hiszen nincsen szükség külön adatfelvételi lap vezetésére, sem pedig bármilyen számolási műveletre, hanem a vett minta elemeit lemérve, azokat a mérés sorrendjében azonnal fel lehet vezetni az ellenőrző diagrammra, ahol »önmaguktól rendeződnek« nagyság szerint. Annak megállapítása, hogy a vett minta alapján a gyártás megfelelő-e, vagy pedig selejtesnek minősítendő-e, szintén igen egyszerű: hiszen csak azt kell figyelemmel kísérni, hogy a bejelölt ellenőrzőhatárokon kívül,

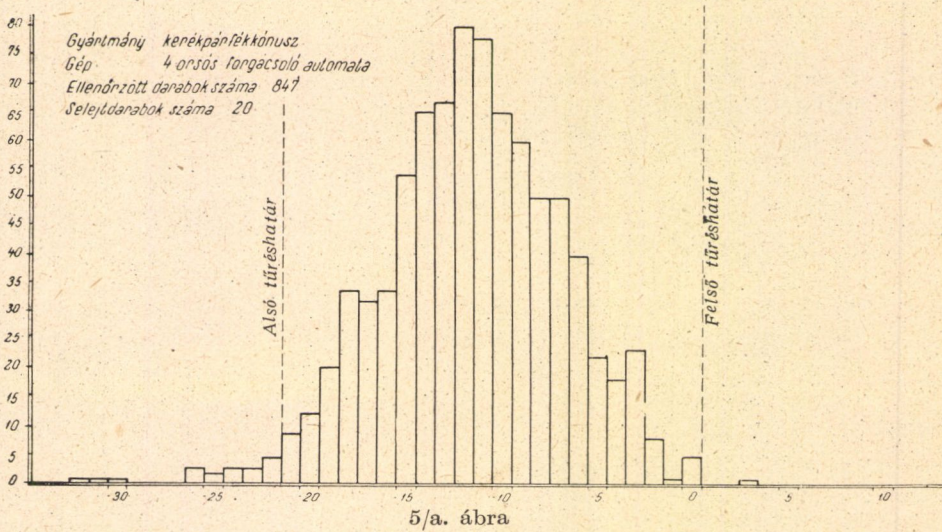
ELLENŐRZŐKÁRTYA										Méreletellenőrzésre / Bejegyzett értékek: a mintában mért értékek nagyság szerint /										Műhely:	Kiadás helye:	Lapzám:
																				II.	1953. VIII. 7.	I.
Gyártmány: <i>Fekónusz</i>		Rajzszám: <i>185.256</i>		Mérelet: <i>2</i>		Mért méret: <i>627,7</i>		Tűnéshatárak: felső: <i>0</i> alsó: <i>-21</i>		Anyag:		Fordulatszám: <i>350</i>		1 ^o alatt készült: <i>100db</i>		Gép neve: <i>4. oszt. automata</i>		Ip. nyilv. tant. sz. <i>1-1019-32</i>				
Ellenőrzési útasítás: az 1. /felső/ határon felül egy pont sem eshet; a 2. határon felül 3 pont eshet; a 3. határon alul 3 pont eshet; a 4. /alsó/ határon alul egy pont sem eshet; A két szélső pont között 12 kocskanál több nem lehet.										Ellenőrzés időköze: <i>1 óra</i>										Mérőeszköz: <i>mikrométer</i>		

Beállító	Mérték	Mérték	Mérték	Mérték																										
Ellenőrző	<i>Megyer</i>	<i>Megyer</i>	<i>Kovácsné</i>	<i>Kovácsné</i>																										
Datum	<i>VIII. 7.</i>	<i>VIII. 8.</i>	<i>VIII. 10.</i>	<i>VIII. 11.</i>																										
Sorszám	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100									
Névtelen mérettől való eltérés 0,01 mm-ben.	+5																													
	+4																													
	+3																													
	+2																													
	+1																													
	0																													
	-1																													
	-2																													
	-3																													
	-4																													
	-5																													
	-6																													
	-7																													
	-8																													
	-9																													
	-10																													
	-11																													
	-12																													
	-13																													
	-14																													
	-15																													
	-16																													
	-17																													
	-18																													
	-19																													
	-20																													
	-21																													
	-22																													
	-23																													
	-24																													
Egyéb előírások	1	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100									
R	8	7	8	7	10	12	7	10	11	10	9	9	11	7	9	9	10	9	12	11	8									
Minta vételi ideje	7:00	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	10:30	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30									
Vált. jel																														
Jelmagyarázat:	Cs Szerszámcseré					K Szerszámköszörülés					A Új anyag beakadása					Ah Anyaghiba					A' Al a gép					U Utan-állítás				
Megjegyzések																														

illetve két-két azonos oldali ellenőrzőhatár között nem helyezkedik-e el az engedélyezettnél nagyobb számú mintaelem.

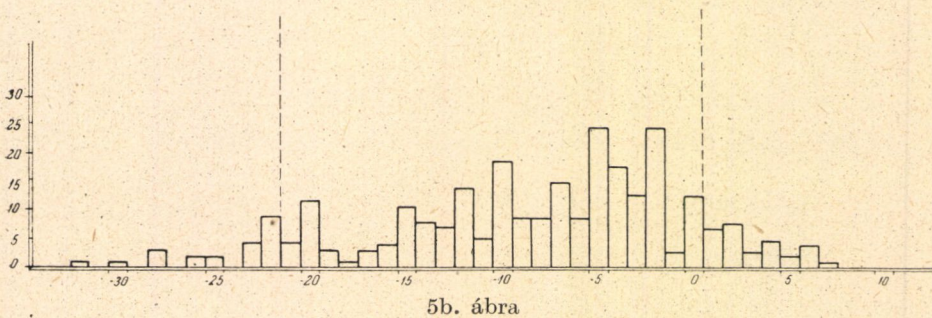
Az ellenőrző diagramm világosan jelzi, ha akár az eloszlás átlagában, akár szórásában rendellenesség lép fel anélkül, hogy ehhez két különböző

Statistikailag ellenőrzött gyártmányokon végzett ellenőrző mérések adatai



Statistikailag nem ellenőrzött, raklárkészlelekből vett gyártmányokon végzett ellenőrző mérések adatai

Gyártmány : Kerékpárfekkönysz.
Gép : 4 orsós forgácsoló automata
Ellenőrzött darabok száma : 282
Selejt darabok száma : 52



jellemző kiszámítására és vezetésére lenne szükség, mint ahogy az a többi, eddig ismert módszernél történik (pl. az átlag-és terjedelm-kártyán). Egy esetben nem jelzi módszerünk a szórás megnövekedését, amikor ugyanis a tűréshatárok egymástól való távolsága lényegesen nagyobb 6σ -nál és ezért engedélyezzük az átlag bizonyos sávon belüli eltolódását, vagyis az ellenőrző-

határokat széttoljuk. Ezt a hiányosságot oly módon tudjuk kiküszöbölni, hogy kiegészítésképpen figyelemmel kísérjük a terjedelem viselkedését is. Ennél a megoldásnál változatlanul megmarad módszerünk azon előnye, hogy nincs szükség a mintavétel során sem számolásra, sem pedig a terjedelem külön vezetésére, csupán azt kell megállapítani az ellenőrnek, hogy a két szélső elem távolsága (a közöttük lévő kockák száma) nem nagyobb-e az engedélyezettnél.

Mivel módszerünk gyakorlati alkalmazása csak a közelmúltban kezdődött meg, természetesen még nem áll elegendő tapasztalat rendelkezésünkre ahhoz, hogy véglegesen meg tudjuk állapítani valamennyi előnyét, illetve hátrányát. Jövőbeli feladatunk lesz, hogy egyrészt tovább szorgalmazzuk ezen módszer kiterjedtebb alkalmazását, másrészt a gyakorlat tapasztalatait leszűrve az esetleges szükséges módosításokat, finomításokat végrehajtsuk.

Függelék

1. A rendezett minta elemeinek korrelációja

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a folytonos eloszlásból vett rendezett minta bármely két eleme egymással pozitív korrelációban van.

Ehhez először bebizonyítjuk a következő segédtevélt:

Ha az eredeti eloszlást jobbról csonkítjuk, a k -adik rendezett mintaelem várható értéke csökken.

Legyen az eredeti eloszlás eloszlásfüggvénye $F(x)$, a csonkítási pont c . Legyen η , ill. ζ olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlása az eredeti eloszlás c -től balra eső, ill. jobbra eső csonkított eloszlása. Definiáljuk a λ valószínűségi változót a következőképpen:

$$\lambda = \begin{cases} \eta & F(c) \text{ valószínűséggel} \\ \zeta & 1 - F(c) \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

Így λ eloszlása nyilván megegyezik az eredeti eloszlással.

Végezzünk mind az η , mind a ζ változóra vonatkozóan külön-külön n darab független megfigyelést, s legyenek ezek eredményei $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ill. $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

$$\text{Legyen } \lambda_i = \begin{cases} \eta_i & F(c) \text{ valószínűséggel} \\ \zeta_i & 1 - F(c) \text{ valószínűséggel} \end{cases} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

Így $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ egymástól függetlenek, egyforma eloszlásúak, és pedig mindegyiknek az eloszlása az eredeti eloszlás.

Legyen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ között a nagyságrendben k -adik η_k^* ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ között nagyságrendben a k -adik λ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$). Nyilvánvaló, hogy

$$\lambda_k^* \geq \eta_k^*$$

és hogy pozitív a valószínűsége annak, hogy

$$\lambda_k^* > \eta_k^*.$$

Így a várható értékekre áttérve

$$M(\lambda_k^*) > M(\eta_k^*)$$

és ezzel segédtevéletünket bebizonyítottuk.

Ha a segédtevélet olyan eloszlásra alkalmazzuk, amely maga is csonkítása egy másik eloszlásnak, akkor a segédtevélet a következő fogalmazásban kapjuk:

A csonkított eloszlás k -adik elemének várható értéke a csonkítási határpont szigorú monoton növekvő függvénye. (A triviális kivételtől eltekintve, mikor a csonkítási határpont olyan szakaszon változik, ahol az eloszlásfüggvény állandó.)

Most rátérünk eredeti állításunk bizonyítására.

A következőkben $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jelentsék egy folytonos eloszlásból vett minta elemeit és legyen ismét ezek közül a nagyságrendben k -adik ξ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$).

Vizsgáljuk ξ_j^* eloszlását azzal a feltétellel, hogy $\xi_k^* = x$ ($1 \leq j < k \leq n$). A feltétel azt jelenti, hogy az eredeti minta többi elemeiből $n - k$ darab $> x$ és $k - 1$ darab $< x$ (0 valószínűségű kivételtől eltekintve). Az olyan minta-elemeknek, amelyeknek értéke $< x$, eloszlása az x ponttól balra eső csonkítása az eredeti eloszlásnak; a ξ_j^* tehát — a feltétel fennállása esetén — egy ebből a csonkított eloszlásból vett $k - 1$ elemű minta j -edik eleme. Segédtevéletünk értelmében tehát

$$M(\xi_j^* | \xi_k^* = x)$$

x -nek szigorúan monoton növekvő függvénye. Ebből pedig már következik, hogy ξ_j^* és ξ_k^* egymással pozitív korrelációban állanak.

2. A rendezett minta elemei együttes valószínűség-eloszlásának kiszámítása

A következőkben azzal foglalkozunk, hogy ha egyszerre több rendezett mintaelemet figyelünk, hogyan számíthatjuk ki annak a valószínűségét, hogy egyik sem lépi át ellenőrző határát.

A következő jelöléseket fogjuk használni:

A fenti meghatározandó valószínűséget jelöljük P -vel,

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ jelentsék a minta elemeit,

$\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$ jelentsék ugyanezeket a mintaelemeket nagyság szerint rendezve. Legyen továbbá

$$\text{és} \quad \left. \begin{aligned} F(\xi_k) &= \eta_k \\ F(\xi_k^*) &= \eta_k^* \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Jelöljük továbbá a k -adik elem alsó ellenőrzőhatárát (ha van ilyen) a_k -val, felső ellenőrzőhatárát (ismét, ha van) b_k -val és legyen $F(a_k) = A_k$, $F(b_k) = B_k$. Ez utóbbi értékek az általános esetben csak k bizonyos értékeire vannak definiálva a szerint, hogy a rendezett minta mely elemeire állapítunk meg ellenőrzőhatárokat. Természetesen feltehetjük, hogy az a_k , ill. b_k értékek indexeik monoton növekvő függvényei.

A rendezett minta elemei közül tetszőleges számú változó együttes eloszlása explicit alakban meghatározható [5]. Számításaink egyszerűsítése céljából azonban mégis célszerűbb lesz az általános esetet visszavezetni arra az esetre, mikor valamennyi elemet figyeljük. Ezt könnyen megtehetjük úgy, hogy A_k , ill. B_k értelmezését definíciószerűen kiterjesztjük úgy, hogy azok értéke a következő legyen mindazokra az indexekre, amelyekre a_k , ill. b_k nincs értelmezve:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ B_n &= 1 \\ A_k &= A_{k-1} \quad (k = 2, \dots, n) \\ B_k &= B_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

A fenti definíció esetén mindenestre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} A_1 &\leq A_2 \leq \dots \leq A_n \\ B_1 &\leq B_2 \leq \dots \leq B_n. \end{aligned}$$

továbbá az az esemény, hogy a megfigyelt elemek valamennyien ellenőrzőhatáraikon belül maradnak, megegyezik azzal az eseménnyel, hogy az

$$A_i \leq \eta_i^* \leq F_i$$

egyenlőtlenségek az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre egyidejűleg fennállnak. Így tehát írhatjuk:

$$P = \mathbf{P} (A_1 \leq \eta_1^* \leq B_1, A_2 \leq \eta_2^* \leq B_2, \dots, A_n \leq \eta_n^* \leq B_n).$$

amit a következőkben így fogunk írni röviden:

$$P = \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i^* \leq B_i] \right).$$

A \prod jel azt jelenti, hogy az utána zárójelben álló esemény a futóindex minden értékére egyidejűleg fennáll. P kiszámításához előbb ismernünk kell $\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*$ együttes sűrűségfüggvényét.

Annak a valószínűsége, hogy

$$x_i < \eta_i^* < x_i + dx_i$$

egyidejűleg az $i = 1, 2, \dots, n$ értékekre, ha $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, nyilván éppen $n!$ -szor akkora, mint hogy az eredeti minta elemei egy bizonyos sorrendben, pl. indexeik szerint rendezett sorrendben a megfelelő x_i környezetébe essenek. Ha az x_i -k között egyenlők fordulnak elő, akkor ez nem igaz, de mivel a minta elemei között csak 0 valószínűséggel fordulhatnak elő egyenlők, ezzel nem kell törődnünk. Így az $\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*$ változók együttes sűrűségfüggvénye $n!$ az n dimenziós mintatér azon pontjaiban, amelyek koordinátái monoton növekvő sorozatot alkotnak és mindenütt máshol 0.

Tehát

$$P = \int n! dx_1 dx_2, \dots dx_n,$$

ahol az integrálást a következő egyenlőtlenségek által meghatározott térrészre kell kiterjeszteni:

$$A_i \leq x_i \leq B_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

azaz tulajdonképpen ki kell számítani az egyenlőtlenségek által jellemzett n dimenziós poliéder köbtartalmát és azt megszorozni $n!$ -sal.

Ha ezt a köbtartalmat ki akarjuk számítani, akkor lényegében ugyanazt az utat kell követni, amint az alábbi levezetésben látható, amelyben visszatérünk a valószínűségszámítási terminológiára.

A fentebbi megjegyzéseink alapján nyilván írható

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i], \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_n \right),$$

Fenti kifejezést tovább alakítva

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i] \right) - n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i], \sum_{i=1}^{n-1} [\eta_i > \eta_{i+1}] \right),$$

ahol a Σ jel azt jelenti, hogy az utána álló esemény a futóindex legalább egy értékére fennáll. Poincaré tételét alkalmazva

$$P = n! \mathbf{P} \left(\prod_{i=1}^n [A_i \leq \eta_i \leq B_i] \right) - \\ - n! \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l \leq n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^l [\eta_{r_j} > \eta_{r_j+1}] \right),$$

vagy az első tagot is beolvasztva

$$P = n! \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_l \leq n-1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^l [\eta_{r_j+1} < \eta_{r_j}] \right).$$

Legyen az $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k$ sorozat az $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_l + 1$ sorozat komplementerje az első n természetes szám halmazában ($k = n - l$). Ha szummációs indexsorozatul az r -sorozatok helyett az i -sorozatokat írjuk:

$$P = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \sum_{1=i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1}=n+1} \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j \leq \eta_j \leq B_j], \prod_{j=1}^k [\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}] \right).$$

Itt az állítások szorzatában egymagában szereplő η_i jelek természetesen figyelmen kívül hagyandók (semmitmondó állítás bizonyosan teljesül).

Tekintve, hogy az A_i és a B_i számok a feltételezés szerint monoton növekvők, az

$$A_{i_j+s} \leq \eta_{i_j+s} \leq B_{i_j+s}$$

$$\eta_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < \eta_{i_j}$$

$$(s = 0, 1, \dots, i_{j+1} - i_j - 1),$$

egyenlőtlenségrendszerben a felső egyenlőtlenségek helyett az

$$A_{i_{j+1}-1} \leq \eta_{i_j+s} \leq B_{i_j}$$

egyenlőtlenségeket írva, ekvivalens egyenlőtlenségrendszerhez jutunk. Ha még tekintetbe vesszük, hogy $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ egymástól függetlenek, írhatjuk:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^n [A_j < \eta_j < B_j], \prod_{j=1}^k [\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}] \right) = \\ &= \mathbf{P} \left(\prod_{j=1}^k \left\{ \prod_{s=0}^{i_{j+1}-i_j-1} [A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}], \eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \right. \right. \\ & \quad \left. \left. < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j} \right\} \right) = \\ &= \prod_{j=1}^k \mathbf{P} \left(\prod_{s=0}^{i_{j+1}-i_j-1} [A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}], \eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j} \right). \end{aligned}$$

A zárójelben álló események ismét függetlenek egymástól és

$$\mathbf{P}(A_{i_{j+1}-1} < \eta_{i_j+s} < B_{i_j}) = \max(B_{i_j} - A_{i_{j+1}-1}, 0)$$

$$\mathbf{P}(\eta_{i_{j+1}-1} < \dots < \eta_{i_{j+1}} < \eta_{i_j}) = \frac{1}{(i_{j+1} - i_j)!},$$

tehát:

(2)

$$P = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} n! \sum_{1=i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1}=n+1} \prod_{j=1}^k \frac{[\max(B_{i_j} - A_{i_{j+1}-1}, 0)]^{i_{j+1}-i_j}}{(i_{j+1} - i_j)!}.$$

A fenti képlet alapján tehát az együttes valószínűséget ki lehet számítani. A gyakorlatilag fontos esetekben, mikor csak néhány ellenőrzőhatárt figyelünk, a (2) speciális alakja sokkal egyszerűbbé válik.

A legtöbb esetben azonban elegendő pontos értéket kapunk akkor is, ha P értékét közelítéssel számítjuk ki úgy, mint ha a rendezett mintaelemek egymástól függetlenek volnának. Ismeretes, hogy a rendezett minta elemei általában nem függetlenek. Ismeretes azonban, hogy fennáll egy olyan tétel, hogy a k -adik és az $(n + 1 - j)$ -edik mintaelem — ha $n \rightarrow \infty$, ugyanakkor pedig k és j rögzítve vannak — határértékben függetlenek [5]. Ennek alapján várhatjuk azt, hogy mennél nagyobb mintával dolgozunk, és egymástól mennél távolabbeső elemeket figyelünk, annál kisebb hibát követünk el azzal, hogy a számításnál feltételezzük a függetlenséget. A számítás pontosságára egyébként nemcsak az bír befolyással, hogy milyen kismértékű függőség áll fenn az egyes rendezett mintaelemek között, hanem az is, hogy olyan valószínűségi határokkal dolgozunk, amelyek közé az egyes mintaelemek 1-hez közeli valószínűséggel esnek, továbbá az a gyakorlati használatra általában javasolt esetekben fennálló körülmény, hogy nem szerepelnek »egymás felé eső« határok, tehát nem fordul elő, hogy $k < j$ esetén a k -adik elem felső és egyidejűleg a j -edik elem alsó ellenőrzőhatárát figyeljük.

Itt általánosságban csak azt az esetet vizsgáljuk, hogy amennyiben a legkisebb elem alsó és a legnagyobb elem felső ellenőrzőhatárát figyeljük, milyen értéket érhet el legfeljebb a kétféle módszerrel kiszámított érték között a különbség.

Ebben az egyszerű esetben — a feljebb alkalmazott jelöléseket használva — a pontosan számított érték

$$P = (B_n - A_1)^n,$$

míg a közelítéssel

$$P^* = B_n^n (1 - A_1)^n$$

értéket nyerünk. Innen

$$\frac{P - P^*}{P^*} = \left[1 - \frac{A_1(1 - B_n)}{B_n(1 - A_1)} \right]^n - 1,$$

azaz

$$\left| \frac{P - P^*}{P^*} \right| < \frac{n A_1 (1 - B_n)}{B_n (1 - A_1)}.$$

Látható tehát, hogy a relatív eltérés P és P^* között annál kisebb felső határ alatt marad, mennél kisebb A_1 és $1 - B_n$. Azonban esetünkben A_1 és $1 - B_n$ olyan kicsi, hogy még $(1 - A_1)^n$ és B_n^n is 1-hez közeleső szám: minden esetben nagyobbak, mint 0,9, tehát $\frac{A_1}{1 - A_1}$ és $\frac{1 - B_n}{B_n}$ is kisebbek, mint $\frac{1}{9n}$ és így a relatív eltérés bizonyosan kisebb, mint $\frac{1}{81n}$, ami azt jelenti, hogy még

eléggé szűk ellenőrző határok esetén is a közelítő számítás hibája n semilyen értéke mellett sem bír gyakorlati jelentőséggel.

Arra az esetre, mikor kettőnél több elem ellenőrző határait figyeljük, numerikus számításokat végeztünk. Kiszámítottuk P értékeit különböző egyenkénti valószínűségi szintekre arra az esetre, ha egy ötelemű minta első és harmadik elemének alsó, és harmadik és ötödik elemének felső határait figyeljük. A számításokat a gyakorlat által megkövetelt pontossággal végeztük el; a két módszerrel számított érték közötti különbség egy esetben sem haladta meg a számítási hiba határát.

I. táblázat

TÁBLÁZAT A RENDEZETT ELEMŰ MINTÁK ELLENŐRZÖHATÁRAINAK KISZÁMÍTÁSÁHOZ

- (1.) Egyenletes eloszlásra: x_1 és x_2 értékei; tetszőleges eloszlásra: $F(x_1)$ és $F(x_2)$ értékei.
 (2.) Normális eloszlásra x_1 és x_2 értékei, vagyis azon kontrolltényezők, melyek a tényleges szórással megszorozva az ellenőrzőhatároknak az átlagtól való távolságát adják.
 (3.) Normális eloszlásra azon kontrolltényezők, melyek az \bar{R} -val megszorozva adják az ellenőrzőhatárok távolságát az átlagtól.

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 4$								$n = 4$							
1	0,006	-2,49	-1,21	1	0,602	+0,26	+0,13	1	0,001	-3,02	-1,47	1	0,734	+0,63	+0,31
2	0,068	-1,49	-0,72	2	0,806	+0,86	+0,42	2	0,030	-1,88	-0,91	2	0,889	+1,22	+0,60
3	0,194	-0,86	-0,42	3	0,932	+1,49	+0,72	3	0,111	-1,22	-0,59	3	0,970	+1,88	+0,91
4	0,398	-0,26	-0,13	4	0,994	+2,49	+1,21	4	0,266	-0,63	-0,31	4	0,999	+3,02	+1,47
$n = 5$								$n = 5$							
1	0,005	-2,57	-1,11	1	0,522	+0,05	+0,02	1	0,001	-3,09	-1,33	1	0,653	+0,39	+0,17
2	0,052	-1,63	-0,70	2	0,717	+0,57	+0,25	2	0,025	-1,96	-0,84	2	0,815	+0,90	+0,39
3	0,146	-1,05	-0,45	3	0,854	+1,05	+0,45	3	0,083	-1,39	-0,60	3	0,917	+1,39	+0,60
4	0,283	-0,57	-0,25	4	0,948	+1,63	+0,70	4	0,185	-0,90	-0,39	4	0,975	+1,96	+0,84
5	0,478	-0,05	-0,02	5	0,995	+2,57	+1,11	5	0,347	-0,39	-0,17	5	0,999	+3,09	+1,33
$n = 6$								$n = 6$							
1	0,004	-2,63	-1,04	1	0,459	-0,10	-0,04	1	0,001	-3,14	-1,24	1	0,586	+0,22	+0,09
2	0,043	-1,72	-0,68	2	0,641	+0,36	+0,14	2	0,019	-2,08	-0,82	2	0,745	+0,66	+0,26
3	0,118	-1,19	-0,47	3	0,777	+0,76	+0,30	3	0,066	-1,51	-0,60	3	0,855	+1,06	+0,42
4	0,223	-0,76	-0,30	4	0,882	+1,19	+0,47	4	0,145	-1,06	-0,42	4	0,934	+1,51	+0,60
5	0,359	-0,36	-0,14	5	0,957	+1,72	+0,68	5	0,255	-0,66	-0,26	5	0,981	+2,08	+0,82
6	0,541	+0,10	+0,04	6	0,996	+2,63	+1,04	6	0,414	-0,22	-0,09	6	0,999	+3,14	+1,24
$n = 7$								$n = 7$							
1	0,004	-2,69	-1,00	1	0,410	-0,23	-0,09	1	0,001	-3,19	-1,18	1	0,531	+0,08	+0,03
2	0,037	-1,79	-0,66	2	0,581	+0,20	+0,07	2	0,016	-2,14	-0,79	2	0,689	+0,48	+0,18

3	0,099	—1,29	—0,48	3	0,710	+0,55	+0,20	3	0,055	—1,60	—0,59	3	0,979	+0,83	+0,31
4	0,184	—0,90	—0,33	4	0,816	+0,90	+0,33	4	0,118	—1,19	—0,44	4	0,882	+1,19	+0,44
5	0,290	—0,55	—0,20	5	0,901	+1,29	+0,48	5	0,203	—0,83	—0,31	5	0,945	+1,60	+0,59
6	0,419	—0,20	—0,07	6	0,963	+1,79	+0,66	6	0,315	—0,48	—0,18	6	0,984	+2,14	+0,79
7	0,590	+0,23	+0,09	7	0,996	+2,69	+1,00	7	0,469	—0,08	—0,03	7	0,999	+3,49	+1,18

$n = 8$							
1	0,003	—2,73	—0,96	1	0,369	—0,33	—0,12
2	0,032	—1,85	—0,65	2	0,527	+0,07	+0,02
3	0,085	—1,37	—0,48	3	0,651	+0,39	+0,14
4	0,154	—1,02	—0,36	4	0,755	+0,69	+0,24
5	0,254	—0,69	—0,24	5	0,846	+1,02	+0,36
6	0,349	—0,39	—0,14	6	0,915	+1,37	+0,48
7	0,473	—0,07	—0,02	7	0,968	+1,85	+0,65
8	0,631	+0,33	+0,12	8	0,997	+2,73	+0,96

$n = 9$							
1	0,003	—2,77	—0,93	1	0,336	—0,42	—0,14
2	0,028	—1,91	—0,64	2	0,483	—0,04	—0,01
3	0,075	—1,44	—0,49	3	0,600	+0,25	+0,08
4	0,133	—1,11	—0,37	4	0,701	+0,52	+0,18
5	0,212	—0,80	—0,27	5	0,788	+0,80	+0,27
6	0,299	—0,52	—0,18	6	0,867	+1,11	+0,37
7	0,400	—0,25	—0,08	7	0,925	+1,44	+0,49
8	0,517	+0,04	+0,01	8	0,972	+1,91	+0,64
9	0,664	+0,42	+0,14	9	0,997	+2,77	+0,93

$n = 10$							
1	0,003	—2,80	—0,91	1	0,308	—0,50	—0,16
2	0,025	—1,96	—0,64	2	0,445	—0,14	—0,05
3	0,066	—1,51	—0,49	3	0,556	+0,14	+0,05
4	0,121	—1,17	—0,38	4	0,652	+0,39	+0,13
5	0,187	—0,89	—0,29	5	0,738	+0,64	+0,21
6	0,262	—0,64	—0,21	6	0,813	+0,89	+0,29
7	0,348	—0,39	—0,13	7	0,879	+1,17	+0,38
8	0,444	—0,14	—0,05	8	0,934	+1,51	+0,49
9	0,555	+0,14	+0,05	9	0,975	+1,96	+0,64
10	0,692	+0,50	+0,16	10	0,997	+2,80	+0,91

$n = 8$							
1	0,001	—3,23	—1,14	1	0,484	—0,04	—0,01
2	0,014	—1,89	—0,66	2	0,632	+0,34	+0,12
3	0,047	—1,68	—0,59	3	0,742	+0,65	+0,23
4	0,100	—1,28	—0,45	4	0,830	+0,95	+0,34
5	0,170	—0,95	—0,34	5	0,900	+1,28	+0,45
6	0,258	—0,65	—0,23	6	0,953	+1,68	+0,59
7	0,368	—0,34	—0,12	7	0,986	+1,89	+0,66
8	0,516	+0,04	+0,01	8	0,999	+3,23	+1,14

$n = 9$							
1	0,002	—3,26	—1,10	1	0,445	—0,14	—0,05
2	0,012	—2,27	—0,76	2	0,585	+0,21	+0,07
3	0,041	—1,74	—0,59	3	0,693	+0,50	+0,17
4	0,096	—1,37	—0,46	4	0,781	+0,78	+0,26
5	0,146	—1,05	—0,35	5	0,854	+1,05	+0,35
6	0,219	—0,78	—0,26	6	0,914	+1,37	+0,46
7	0,307	—0,50	—0,17	7	0,959	+1,74	+0,59
8	0,415	—0,21	—0,07	8	0,988	+2,27	+0,76
9	0,555	+0,14	+0,05	9	0,998	+3,26	+1,10

$n = 10$							
1	0,001	—3,29	—1,07	1	0,411	—0,23	—0,07
2	0,011	—2,30	—0,75	2	0,544	+0,11	+0,04
3	0,036	—1,80	—0,58	3	0,648	+0,38	+0,12
4	0,076	—1,43	—0,46	4	0,735	+0,63	+0,20
5	0,128	—1,14	—0,37	5	0,809	+0,87	+0,28
6	0,191	—0,87	—0,28	6	0,872	+1,14	+0,37
7	0,265	—0,63	—0,20	7	0,924	+1,43	+0,46
8	0,352	—0,38	—0,12	8	0,964	+1,80	+0,58
9	0,456	—0,11	—0,04	9	0,989	+2,30	+0,75
10	0,589	+0,23	+0,07	10	0,999	+3,29	+1,07

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 11$								$n = 11$							
1	0,002	-2,83	-0,89	1	0,285	-0,57	-0,18	1	0,000	-3,32	-1,05	1	0,382	-0,30	-0,09
2	0,023	-2,00	-0,63	2	0,413	-0,22	-0,07	2	0,001	-2,34	-0,74	2	0,509	+0,02	+0,01
3	0,060	-1,55	-0,49	3	0,518	+0,05	+0,02	3	0,033	-1,84	-0,58	3	0,609	+0,28	+0,09
4	0,109	-1,23	-0,39	4	0,610	+0,28	+0,09	4	0,069	-1,48	-0,47	4	0,693	+0,50	+0,16
5	0,167	-0,97	-0,31	5	0,692	+0,50	+0,16	5	0,114	-1,21	-0,38	5	0,767	+0,73	+0,23
6	0,234	-0,73	-0,23	6	0,766	+0,73	+0,23	6	0,169	-0,98	-0,31	6	0,831	+0,98	+0,31
7	0,308	-0,50	-0,16	7	0,833	+0,97	+0,31	7	0,223	-0,73	-0,23	7	0,886	+1,21	+0,38
8	0,390	-0,28	-0,09	8	0,891	+1,23	+0,39	8	0,307	-0,50	-0,16	8	0,931	+1,48	+0,47
9	0,482	-0,05	-0,02	9	0,940	+1,55	+0,49	9	0,391	-0,28	-0,09	9	0,967	+1,84	+0,58
10	0,587	+0,22	+0,07	10	0,977	+2,00	+0,63	10	0,491	-0,02	-0,01	10	0,990	+2,34	+0,74
11	0,715	+0,57	+0,18	11	0,998	+2,83	+0,89	11	0,618	+0,30	+0,09	11	1,000	+3,32	+1,05
$n = 12$								$n = 12$							
1	0,002	-2,86	-0,88	1	0,263	-0,63	-0,19	1	0,000	-3,34	-1,03	1	0,357	-0,37	-0,11
2	0,021	-2,04	-0,63	2	0,385	-0,29	-0,09	2	0,008	-2,40	-0,74	2	0,477	-0,06	-0,02
3	0,054	-1,61	-0,49	3	0,484	-0,04	-0,01	3	0,030	-1,88	-0,58	3	0,573	+0,18	+0,06
4	0,099	-1,28	-0,39	4	0,572	+0,18	+0,06	4	0,062	-1,54	-0,47	4	0,655	+0,40	+0,12
5	0,152	-1,03	-0,32	5	0,651	+0,39	+0,12	5	0,103	-1,26	-0,39	5	0,728	+0,61	+0,19
6	0,211	-0,80	-0,25	6	0,724	+0,60	+0,18	6	0,152	-1,03	-0,32	6	0,792	+0,81	+0,25
7	0,276	-0,60	-0,18	7	0,789	+0,80	+0,25	7	0,208	-0,81	-0,25	7	0,848	+1,03	+0,32
8	0,349	-0,39	-0,12	8	0,848	+1,03	+0,32	8	0,272	-0,61	-0,19	8	0,897	+1,26	+0,39
9	0,428	-0,18	-0,06	9	0,901	+1,28	+0,39	9	0,345	-0,40	-0,12	9	0,938	+1,54	+0,47
10	0,516	+0,04	+0,01	10	0,946	+1,61	+0,49	10	0,427	-0,18	-0,06	10	0,970	+1,88	+0,58
11	0,615	+0,29	+0,09	11	0,979	+2,04	+0,63	11	0,523	+0,06	+0,02	11	0,992	+2,40	+0,74
12	0,737	+0,63	+0,19	12	0,998	+2,86	+0,88	12	0,643	+0,37	+0,11	12	1,000	+3,34	+1,03
$n = 13$								$n = 13$							
1	0,002	-2,89	-0,87	1	0,247	-0,68	-0,20	1	0,000	-3,36	-1,01	1	0,335	-0,43	-0,13
2	0,019	-2,08	-0,62	2	0,360	-0,36	-0,11	2	0,007	-2,46	-0,74	2	0,449	-0,13	-0,04

$n = 15$										$n = 14$									
1	0.002	-2.93	-0.84	1	0.218	-0.78	-0.22	1	0.000	-3.41	-0.98	1	0.315	-0.48	-0.14	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
2	0.016	-2.14	-0.61	2	0.320	-0.47	-0.14	2	0.005	-2.56	-0.74	2	0.343	-0.19	-0.19	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
3	0.043	-1.72	-0.50	3	0.405	-0.05	-0.07	3	0.023	-2.00	-0.58	3	0.512	+0.03	+0.19	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
4	0.078	-1.42	-0.41	4	0.481	-0.05	-0.04	4	0.025	-1.66	-0.48	4	0.658	+0.22	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
5	0.118	-1.18	-0.34	5	0.551	+0.13	+0.04	5	0.080	-1.41	-0.41	5	0.720	+0.58	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
6	0.163	-0.98	-0.28	6	0.616	+0.29	+0.08	6	0.117	-1.19	-0.34	6	0.777	+0.76	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
7	0.212	-0.80	-0.23	7	0.677	+0.46	+0.13	7	0.159	-1.00	-0.29	7	0.777	+0.76	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
8	0.266	-0.62	-0.18	8	0.734	+0.62	+0.18	8	0.205	-0.82	-0.24	8	0.973	+1.96	+0.58	+0.41	+0.06	+0.01	-0.12
9	0.323	-0.46	-0.13	9	0.788	+0.80	+0.23	9	0.256	-0.66	-0.19	9	0.994	+2.51	+0.74	+0.58	+0.41	+0.06	-0.12
10	0.384	-0.29	-0.08	10	0.837	+0.98	+0.28	10	0.312	-0.49	-0.14	10	1.000	+3.38	+0.74	+0.58	+0.41	+0.06	-0.12
$n = 15$										$n = 14$									
1	0.002	-2.91	-0.85	1	0.232	-0.73	-0.21	1	0.000	-3.38	-0.99	1	0.315	-0.48	-0.14	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
2	0.007	-2.12	-0.62	2	0.339	-0.42	-0.12	2	0.006	-2.51	-0.74	2	0.343	-0.19	-0.19	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
3	0.046	-1.69	-0.50	3	0.428	-0.18	-0.05	3	0.025	-1.96	-0.58	3	0.512	+0.03	+0.19	-0.06	+0.01	+0.06	-0.12
4	0.084	-1.38	-0.41	4	0.508	-0.02	+0.01	4	0.032	-1.63	-0.48	4	0.658	+0.22	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
5	0.127	-1.14	-0.33	5	0.581	+0.20	+0.06	5	0.086	-1.37	-0.40	5	0.720	+0.58	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
6	0.176	-0.93	-0.27	6	0.649	+0.38	+0.11	6	0.126	-1.15	-0.34	6	0.777	+0.76	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
7	0.230	-0.74	-0.22	7	0.711	+0.56	+0.16	7	0.172	-0.95	-0.28	7	0.777	+0.76	+0.41	+0.06	+0.01	+0.06	-0.12
8	0.289	-0.56	-0.16	8	0.770	+0.74	+0.22	8	0.223	-0.76	-0.22	8	0.828	+0.95	+0.58	+0.41	+0.06	+0.01	-0.12
9	0.351	-0.38	-0.11	9	0.824	+0.93	+0.27	9	0.280	-0.58	-0.17	9	0.874	+1.15	+0.74	+0.58	+0.41	+0.06	-0.12
10	0.419	-0.20	-0.06	10	0.873	+1.14	+0.33	10	0.342	-0.41	-0.12	10	0.914	+1.37	+0.95	+0.74	+0.58	+0.41	-0.12
11	0.492	-0.02	-0.01	11	0.916	+1.38	+0.41	11	0.411	-0.22	-0.06	11	0.948	+1.63	+1.15	+0.95	+0.74	+0.58	-0.12
12	0.572	+0.18	+0.05	12	0.954	+1.69	+0.50	12	0.488	-0.03	-0.01	12	0.973	+1.96	+1.37	+1.15	+0.95	+0.74	-0.12
13	0.661	+0.42	+0.12	13	0.983	+2.12	+0.62	13	0.576	+0.19	+0.06	13	0.994	+2.51	+1.96	+1.37	+1.15	+0.95	-0.12
14	0.768	+0.73	+0.21	14	0.998	+2.91	+0.85	14	0.685	+0.48	+0.14	14	1.000	+3.38	+2.51	+1.96	+1.37	+1.15	-0.12

95%								99%							
Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,025$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,975$)				Alsó határ ($F_{nk}(x_1) = 0,005$)				Felső határ ($F_{nk}(x_2) = 0,995$)			
k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)	k	(1.)	(2.)	(3.)
$n = 15$								$n = 15$							
11	0,449	-0,13	-0,04	11	0,882	+1,18	+0,34	11	0,372	-0,33	-0,10	11	0,920	+1,41	+0,41
12	0,519	+0,05	+0,01	12	0,922	+1,42	+0,41	12	0,439	-0,15	-0,04	12	0,952	+1,66	+0,48
13	0,595	+0,24	+0,07	13	0,957	+1,72	+0,50	13	0,513	+0,03	+0,01	13	0,977	+2,00	+0,58
14	0,680	+0,47	+0,14	14	0,984	+2,14	+0,61	14	0,598	+0,25	+0,07	14	0,995	+2,56	+0,74
15	0,782	+0,78	+0,22	15	0,998	+2,93	+0,84	15	0,702	+0,53	+0,15	15	1,000	+3,41	+0,98
$n = 17$								$n = 17$							
1	0,002	-2,97	-0,83	1	0,195	-0,86	-0,24	1	0,000	-3,44	-0,96	1	0,268	-0,65	-0,18
5	0,103	-1,26	-0,35	5	0,499	0,00	0,00	5	0,070	-1,48	-0,41	5	0,574	+0,19	+0,05
9	0,278	-0,59	-0,16	9	0,722	+0,59	+0,10	9	0,219	-0,78	-0,22	9	0,781	+0,78	+0,22
13	0,501	0,00	0,00	13	0,897	+1,26	+0,35	13	0,427	-0,19	-0,05	13	0,930	+1,48	+0,41
17	0,805	+0,86	+0,24	17	0,999	+2,97	+0,83	17	0,732	+0,65	+0,18	17	1,000	+3,44	+0,96
$n = 21$								$n = 21$							
1	0,001	-3,03	-0,80	1	0,161	-0,99	-0,26	1	0,000	-3,49	-0,92	1	0,223	-0,76	-0,20
6	0,113	-1,21	-0,32	6	0,472	-0,07	-0,02	6	0,080	-1,41	-0,37	6	0,539	+0,10	+0,03
11	0,298	-0,53	-0,14	11	0,702	+0,53	+0,14	11	0,242	-0,70	-0,19	11	0,758	+0,70	+0,19
16	0,528	+0,07	+0,02	16	0,887	+1,21	+0,32	16	0,461	-0,10	-0,03	16	0,920	+1,41	+0,37
21	0,839	+0,99	+0,26	21	0,999	+3,03	+0,80	21	0,777	+0,76	+0,20	21	1,000	+3,49	+0,92
$n = 25$								$n = 25$							
1	0,001	-3,09	-0,79	1	0,137	-1,09	-0,28	1	0,000	-3,54	-0,90	1	0,191	-0,87	-0,22
7	0,121	-1,17	-0,30	7	0,451	-0,12	-0,03	7	0,089	-1,35	-0,34	7	0,514	+0,04	+0,01
13	0,313	-0,49	-0,13	13	0,687	+0,49	+0,13	13	0,261	-0,64	-0,16	13	0,739	+0,64	+0,16
19	0,549	+0,12	+0,03	19	0,879	+1,17	+0,30	19	0,486	-0,04	-0,01	19	0,911	+1,35	+0,34
25	0,863	+1,09	+0,28	25	0,999	+3,09	+0,79	25	0,809	+0,87	+0,22	25	1,000	+3,54	+0,90
$n = 29$								$n = 29$							
1	0,001	-3,13	-0,77	1	0,119	-1,18	-0,29	1	0,000	-3,58	-0,88	1	0,167	-0,97	-0,24
8	0,127	-1,14	-0,28	8	0,436	-0,16	-0,04	8	0,096	-1,30	-0,32	8	0,494	-0,02	-0,01
15	0,325	-0,45	-0,11	15	0,675	+0,45	+0,11	15	0,275	-0,60	-0,16	15	0,725	+0,60	+0,16
22	0,564	+0,16	+0,04	22	0,873	+1,14	+0,28	22	0,506	+0,02	+0,01	22	0,904	+1,30	+0,32
29	0,881	+1,18	+0,29	29	0,999	+3,13	+0,77	29	0,833	+0,97	+0,24	29	1,000	+3,58	+0,88

II. táblázat

Maximum-minimumkártyák kontrolltényezői

n	95%		99%	
	K_m	B_m	K_m	B_m
4	0,71	0,63	0,97	0,81
5	0,61	0,52	0,83	0,67
6	0,54	0,46	0,74	0,59
7	0,50	0,42	0,68	0,53
8	0,46	0,38	0,64	0,49
9	0,43	0,36	0,60	0,45
10	0,41	0,34	0,57	0,43
11	0,39	0,32	0,55	0,41
12	0,38	0,31	0,53	0,39
13	0,37	0,30	0,51	0,37
14	0,35	0,29	0,49	0,36
15	0,34	0,28	0,48	0,35
17	0,33	0,26	0,46	0,32
21	0,30	0,24	0,42	0,30
25	0,29	0,22	0,40	0,28
29	0,27	0,21	0,38	0,26

K_m = kontrolltényező a külső ellenőrzőhatárok megállapításához

B_m = kontrolltényező a belső ellenőrzőhatárok megállapításához

IRODALOM

- [1] Л. И. Брагинский: Оперативный статистический контроль качества в машиностроении. Москва, 1951.
- [2] I. pl. Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó V.
- [3] J. Uchytíl: Regulace Jakosti Vyrobnku Pri Kontrole Merenim I. Prága, 1950.
- [4] »A statisztikai minőségellenőrzés és a gyártási eljárások szabályozási irányelvei.« Cseh Nehézipari Kutatóintézet Munkaközössége. Prága, 1953.
- [5] Rényi Alfréd: A rendezett minták elmélete. M. T. A. III. oszt. Közleményei III. kötet, 647. o.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ КАЧЕСТВА

А. Фонтаньи, К. Шаркади и Е. Ваш

Резюме

Статья занимается статистическим методом контроля качества, основанным на теории вариационных рядов.

При статистическом контроле качеств в ходе производства с помощью контрольных диаграмм, встречаются трудности в связи с работой по вычислению статистических характеристик (напр. среднее значение, размах и т. д.), ведущихся на контрольных диаграммах. Ввиду этого появилась необходимость в такой системе, которая не требует подсчетов от контролера, но все же имеет точное математическое обоснование. Подходящей оказалась идея Брагинского: проведение контроля с помощью элементов вариационного ряда где значения полученные из выборки заносятся непосредственно на контроль-

ные диаграммы, где они «сами собой упорядочиваются» по величине. Относительно каждого k -ого элемента могут быть заданы контрольные линии, между которыми элемент должен находиться с вероятностью близкой к 1, в случае, если в производстве нет аномалий. Контролеру нужно только наблюдать, находятся ли элементы между этими контрольными линиями. Статья обсуждает теоретические основы и дает практические инструкции, с приложением вспомогательных расчетных таблиц.

ANWENDUNG DER THEORIE DER GEORDNETEN STICHPROBEN IN DER STATISTISCHEN QUALITÄTSKONTROLLE

A. FONTÁNYI—K. SARKADI—É. VAS

Zusammenfassung

Die Abhandlung bespricht die auf der Theorie der geordneten Stichproben beruhende, neue statistische Methode der Qualitätskontrolle während des industriellen Fertigungsvorganges.

Die wesentlichsten Hilfsmittel der statistischen Güter—Kontrollen sind die sogenannten Kontrollkarten, doch verursacht die mit der Berechnung der zu verzeichnenden Merkmale (Durchschnitt, Umfang, u. s. w.) verbundene Arbeitszunahme sehr oft Schwierigkeiten. Es entstand daher das Bedürfnis nach einer Methode, die vom Prüfer kein Rechnen beansprucht, dennoch auf sicheren mathematischen Grundlagen beruht. Als solche erbietet sich der Gedanke von Braginski: die Kontrolle mittels geordneter Stichproben; die in der Stichprobe gemessenen Werte werden unmittelbar auf das Kontrolldiagramm aufgetragen, wo sie sich «von selbst» der Grösse nach ordnen.

Für jedes der der Grösse nach k -ten Elemente können die sogenannten Kontrollgrenzen angegeben werden. Wenn in der Fabrikation keine Unregelmässigkeit vorhanden ist, müssen sich die Elemente der Stichprobe mit einer zu Eins nahe liegenden Wahrscheinlichkeit innerhalb dieser Grenzen befinden. Nur hier hat der Prüfer zu beobachten, ob die Elemente der Stichprobe zwischen den vorgeschriebenen Grenzen sind.

Die Arbeit behandelt die theoretischen Grundlagen der Methode und gibt die praktischen Anweisungen mit den nötigen Hilfstabellen an; die Tabellen wurden in unserem Institut ausgearbeitet.

MEGJEGYZÉS A HANKEL-TRANSZFORMÁCIÓ ELMÉLETÉHEZ

FENYŐ ISTVÁN

Összefoglalás

A cikk összefüggést állapít meg valamely függvény többszörös Fourier-transzformáltja és a Hankel-transzformáltja között. Ez az összefüggés lehetővé teszi a Hankel-féle megfordítási tétel egy új bizonyítását.

A tétel alkalmazásaként a dolgozat megállapítja a többszörös Fourier-transzformáció sajátértékeit.

Legyen $f(r)$ valamilyen $r \geq 0$ -ra értelmezett és $(0, \infty)$ -ben abszolút integrálható függvény. Akkor nyilván létezik az $f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2})$ függvény n -dimenziós Fourier-transzformáltja :

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}) e^{-i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Egyszerűség kedvéért jelöljük az (x_1, x_2, \dots, x_n) vektort x -szel és az (y_1, y_2, \dots, y_n) vektor y -nal, $|x|$ legyen röviden x , $|y| = \bar{y}$, x és \bar{y} belső szorzatát jelöljük $x \cdot \bar{y}$ -nal. Akkor az előbbi n -dimenziós Fourier-transzformált így írható :

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i x \cdot \bar{y}} dv_x,$$

ahol $dv_x = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Könnyen belátható, hogy az F transzformált függvény is csupán y -tól függ.

Legyen

$$A = (\alpha_{ik})_1^n$$

egy olyan ortogonális matrix, melynek első sora

$$\alpha_{1i} = \frac{y_i}{y} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

továbbá

$$\bar{\xi} = A\bar{x}.$$

Ekkor nyilván

$$x = \xi \quad \text{és} \quad dv_x = dv_\xi,$$

ahol $|\bar{\xi}| = \xi$ és $dv_\xi = d\xi_1 d\xi_2 \dots, d\xi_n$.

F kifejezésében szereplő skaláris szorzat pedig

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} x_i = y \xi_1.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\bar{x} \cdot \bar{y}} dv_x = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{iy\xi_1} dv_\xi. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy F kizárólag y -től függ.

Bebizonyítjuk, hogy ha $f(x)$ n -szeres Fourier-transzformáltja létezik, akkor $x^{\frac{n-2}{2}} f(x)$ Hankel-transzformáltja is létezik, és hogy

$$y^{\frac{n-1}{2}} F(y) = \int_0^\infty \xi \left[\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi) \right] J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi) d\xi,$$

ahol $F(y)$ az $f(x)$ n -szeres Fourier-transzformáltja.

Ennek érdekében számítsuk ki most ezt a Fourier-transzformáltat :

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{iy\xi_1} dv_\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n, \end{aligned}$$

ahol $\varrho^2 = \xi_2^2 + \xi_3^2 + \dots + \xi_n^2$. A $(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ -k $n-1$ dimenziós térben vezessünk be polárkoordinátákat a szokásos módon. A polárszögeket jelöljük $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-3}$ -al, a megfelelő Jacobi-féle determinánst meg D -vel. Ekkor

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int \dots \int^{(n-1)} D d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-3} d\varrho = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \int_0^\infty \Lambda(\varrho) d\varrho. \end{aligned}$$

$\Lambda(\varrho)$ jelenti azt a függvényt, amit kapunk, ha a $D = D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-3}, \varrho)$ Jacobi-determinánst a φ_i -k szerint integráljuk. Ennek a függvénynek a meghatározása történhet direkt úton is, a D közvetlen felírása és a kijelölt integrálok kiszámítása révén, de egyszerűbbnek látszik az alábbi módszer. Tekintettel arra, hogy D univerzális függvény, ezért polárkoordináták bevezetése révén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2} d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n = \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \Lambda(\varrho) d\varrho.$$

De egyrészt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2} d\xi_2 \dots d\xi_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)} d\xi_2 \dots d\xi_n = \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi_i^2} d\xi_i \right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^{n-1} = \sqrt{\pi}^{n-1}. \end{aligned}$$

Másrészt viszont D képzési módjából nyilvánvaló, hogy

$$\Lambda(\varrho) = a\varrho^{n-2}$$

alakú függvény, ahol a kizárólag az n -től függő szám. Így tehát

$$\sqrt{\pi}^{n-1} = a \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^{n-1} d\varrho = \frac{a}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Ebből

$$a = \frac{2\sqrt{\pi}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Visszatérve az $F(y)$ függvényhez, ezt nyertük tehát, hogy

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^n} \frac{2\sqrt{2}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} \varrho^{n-2} d\xi_1 d\varrho =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{n-2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} f(\sqrt{\xi_1^2 + \varrho^2}) e^{iy\xi_1} \varrho^{n-2} d\xi_1 d\varrho.$$

Ez utóbbi kettősintegrál kiszámítása érdekében legyen

$$\xi_1 = \xi \cos \alpha; \quad \varrho = \xi \sin \alpha,$$

ekkor

$$d\xi_1 d\varrho = \xi d\xi d\alpha.$$

Ezért tehát

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2}^{n-2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \xi^{n-1} \sin^{n-2} \alpha e^{iy\xi \cos \alpha} d\xi d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^{n-2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} f(\xi) \xi^{n-1} d\xi \int_0^{\pi} e^{iy\xi \cos \alpha} \sin^{n-2} \alpha d\alpha$$

Az $\int_0^{\pi} e^{iy\xi \cos \alpha} \sin^{n-2} \alpha d\alpha$ kiszámítása érdekében induljunk ki a

$$\int_0^{\pi} \cos(z \cos x) \sin^{2p} x dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) J_p(z)$$

ismert képletből (J_p a p indexű elsőfajú Bessel-függvény, $p > 0$). Mivel a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumban $\sin x \geq 0$ és szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre, továbbá $\sin(z \cos x) = -\sin(z \cos(\pi - x))$, ezért

$$\int_0^{\pi} \sin(z \cos x) \sin^{2p} x dx = 0.$$

Ennek az integrálnak az i -szeresét ($i = \sqrt{-1}$) adjuk az előbbi integrálhoz, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p} x e^{iz \cos x} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) I_p(z).$$

Ha most ebben $p = n - 2$ és $z = y\xi$, akkor

$$\int_0^\pi e^{iy\xi \cos \alpha} \sin^{n-2} \alpha \, d\alpha = \sqrt{\pi} \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(y\xi)^{\frac{n-2}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi).$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$F(y) = \frac{1}{y^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty f(\xi) \xi^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi) \, d\xi.$$

Vagyis

$$y^{\frac{n-2}{2}} F(y) = \int_0^\infty \xi \left[\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi) \right] J_{\frac{n-2}{2}}(y\xi) \, d\xi.$$

Ez tehát azt mutatja, hogy $y^{\frac{n-2}{2}} F(y)$ nem egyéb, mint a $\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)$ Hankel-féle transzformáltja. Az előbbiekből az is következik, hogy ha $f(\xi)$ Fourier-transzformáltja létezik, akkor $\xi^{\frac{n-2}{2}} f(\xi)$ -nek a Hankel-transzformáltja is létezik.

Ha $\frac{n-2}{2} = p$, akkor

$$(1) \quad y^p F(y) = \int_0^\infty \xi [\xi^p f(\xi)] J_p(Y\xi) \, d\xi.$$

Ha $f(x)$ az x hely környezetében korlátos variációjú, akkor az*

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\bar{x}\bar{y}} \, dv_x$$

egyenletből következik, hogy

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) e^{-i\bar{x}\bar{y}} \, \mathbf{x} v_y.$$

Mivel valós p és z értékek mellett

$$\int_0^\infty \sin^2 px \, e^{iz \cos x} \, dx$$

* U. Ruelle: L'integrale di Fourier par le funzioni di più variabili. Livorno, 1940.

valós (tehát konjugáltja vele egyenlő), azért ha a (2) integrálra az előbb leírt számítást újra elvégezzük, azt kapjuk, hogy

$$x^p f(x) = \int_0^\infty \eta [\eta^p F(\eta)] J_p(x\eta) d\eta.$$

Összevetve ezt (1) egyenlettel, a *Hankel-féle megfordítási tétel* új bizonyítását adjuk.

Megemlítjük, hogy a kimondott tétel *C. G. Essen* egy igen mélyenfekvő tételéből is bizonyítható. [2] Essen tételének felhasználásával nyert bizonyítás nem rövidebb, mint az előbb közölt bizonyítás.

Egy másik alkalmazása az előbbi tételnek az, hogy lehetővé válik az

$$(3) \quad f(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{x}\bar{y}} f(y) dy_1 \dots dy_n$$

sajátérték probléma megoldása. Itt x és y ismét az n dimenziós \bar{x} , ill. \bar{y} vektorok abszolút értékét jelentik.

Mindenekelőtt átírjuk az $f(t)$ függvény Hankel-transzformáltját más alakba. E végből vezessük be a

$$\int_0^\infty t f(t) J_\nu(xt) dt$$

Hankel-transzformációban az $u = \frac{t^2}{4}$ új integrációs változót. Ekkor

$$\int_0^\infty t f(t) J_\nu(xt) dt = 2 \int_0^\infty f(2\sqrt{u}) J_\nu(2x\sqrt{u}) du.$$

Ezek előrebocsátása után az (1) alatti képlet felhasználásával a (3) alatti probléma ilyenképpen írható át:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \sqrt{2\pi}^n x^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty t \left[t^{\frac{n-2}{2}} f(t) \right] J_{\frac{n-2}{2}}(xt) dt = \\ &= 2\lambda \sqrt{2\pi}^n x^{-\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty (2\sqrt{\pi})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{u}) J_{\frac{n-2}{2}}(2x\sqrt{u}) du. \end{aligned}$$

Legyen $x = 2\sqrt{s}$, akkor

$$(2\sqrt{s})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{s}) = 2\lambda (\sqrt{2\pi})^n \int_0^\infty (2\sqrt{\pi})^{\frac{n-2}{2}} f(2\sqrt{u}) J_{\frac{n-2}{2}}(4\sqrt{su}) du$$

vagypedig, ha $\frac{n-2}{2} = p$ és $(2\sqrt{s})^p f(2\sqrt{s}) = \varphi(s)$,

akkor

$$(3') \quad \varphi(s) = 2^{p+2} \lambda \pi^{p+1} \int_0^\infty \varphi(u) J_p(4\sqrt{su}) du.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásához felhasználjuk *Tricomi* egy tételét, [3] mely szerint

$$v^{p+1} L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} H_s^p(\varphi) \right\} = L_{\frac{1}{v}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\},$$

ahol

$$L_v \{g(s)\} = \int_0^\infty e^{-vs} g(s) ds \quad \text{és} \quad H_s^p(g) = \int_0^\infty J_p(2\sqrt{vs}) g(s) ds.$$

Fel kell tételezni, hogy $s^{\frac{p}{2}} \varphi(s)$ Laplace-transzformáltja létezik és konvergencia-abszcisszája négynél kisebb.

A (3') egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $s^{\frac{p}{2}}$ -el és képezzük mindkét oldal Laplace-transzformáltját:

$$L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = 2^{p+2} \lambda \pi^{p+1} L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} H_{4s}(\varphi) \right\}.$$

Legyen $4s = t$, akkor az

$$L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = \lambda \pi^{p+1} L_v \left\{ t^{\frac{p}{2}} H_t(\varphi) \right\}$$

Alkalmazzuk *Tricomi* előbb idézett tételét, e szerint

$$\frac{v^{p+1}}{4^{p+1}} L_{\frac{v}{4}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} H_s^p(\varphi) \right\} = L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\},$$

így tehát

$$L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = (4\pi)^{p+1} \lambda v^{-p-1} L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\}$$

A mondott feltételek mellett szabad v helyébe $\frac{4}{v}$ -t helyettesíteni. Ha a v olyan, hogy vele együtt $\frac{4}{v}$ is az $s^{\frac{n}{2}} \varphi(s)$ függvény konvergencia félsíkjaiba esik, akkor igaz az, hogy

$$\frac{1}{v^{p+1}} L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = \lambda \tau^{p+1} L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\}.$$

$L_{\frac{4}{v}} \left\{ s^{\frac{v}{2}} \varphi(s) \right\}$ -nek ebből adódó értékét az előbbi egyenletbe helyettesítve az adódik, hogy

$$L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} = \lambda^2 4^{p+1} \pi^{2p+2} L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\}.$$

Ha $\varphi(s) \not\equiv 0$, akkor $L_v \left\{ s^{\frac{p}{2}} \varphi(s) \right\} \not\equiv 0$, tehát

Ebből

$$\lambda^2 2^{2p+2} \pi^{2p+2} = 1.$$

$$\lambda = \begin{cases} (2\pi)^{-p-1} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \\ (-2\pi)^{-p-1} = (-2\pi)^{-\frac{n}{2}} \end{cases}.$$

Ezek adják meg a (3) alatti sajátérték-probléma sajátértékeit.

Érdeemes megemlíteni, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y) dy$$

egyszeres Fourier-transzformációnak sajátértékei 1 , -1 , i és $-i$ [4]. Ha $n = 1$, akkor a mi problémánk csupán a $+1$ és -1 sajátértékeket szolgáltatja, aminek oka, hogy módszerünk a szóbanforgó sajátérték-problémának csupán páros megoldásait szolgáltatja. Ha a keresett sajátfüggvény páros, akkor tényleg csak $+1$ és -1 sajátérték lehetséges.*

* A felvetett kérdés általános megoldását l. *Fenyő István*: A többszörös Fourier-transzformáció elméletéhez. M. Tud. Akad. III. oszt. Ösztályközleményei. s. a.

Megemlítjük, hogy az (1) alatti képlet akkor is igaz, ha $n = 1$. Ekkor ugyanis a Fourier-transzformált

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos yx dx = \\ &= \sqrt{y} \int_0^{\infty} x [x^{-\frac{1}{2}} f(x)] \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos yx}{\sqrt{yx}} dx = \int_0^{\infty} [x^{-\frac{1}{2}} f(x)] J_{\frac{1}{2}}(yx) dx. \end{aligned}$$

Ez pedig nem más, mint az (1) képlet, ha $n = 1$.

IRODALOM

- [1] И. М. Рыжик И. С. Градштейн: Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. 1951. Москва 184 о. 3. 483. 4. képlet.
- [2] Carl—Gustav Essen : Fourier Analysis of distribution functions. Acta Math. 77—83. о.
- [3] Tricomi : Atti Lincei 1935. XXII. 562. о.
- [4] F. Riesz—B. Sz. Nagy : Leçons d'Analyse Fonctionnelle 1952. 292. о.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГАНКЕЛЯ

И. Фенье

Резюме

В статье обнаруживается связь между преобразованиями Ганкеля и Фурье. Это представляет возможность дать новое доказательство теоремы обращения Ганкеля.

В качестве применения теоремы в работе выводятся собственные значения многократного преобразования Фурье.

Если многократное преобразование Фурье переходит в однократное, то получим известную теорему, относящуюся к собственным значениям однократного преобразования Фурье.

EINE BEMERKUNG ZUR THEORIE DER HANKEL'SCHEN TRANSFORMATION

ST. FENYŐ

Zusammenfassung

In der Abhandlung wird ein Zusammenhang zwischen den mehrfachen Fourier-Transformierten und Hankelschen Transformaten einer Funktion bewiesen. Aus diesem Zusammenhang kann ein neuer Beweis für den Hankelschen Umkehrsatz abgeleitet werden.

Als Anwendung des Satzes werden die Eigenwerte der mehrfachen Fourier-Transformation bestimmt. Im Falle der einfachen Fourier-Transformation ergibt sich der bekannte Satz für die Eigenwerte der einfachen Fourier-Transformation.

A HENGERFÜGGVÉNYEK ADDICIÓS TÉTELÉNEK NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYÉRŐL

FENYŐ ISTVÁN

Összefoglalás

A dolgozat általánosítja *C. Agostinelli* egy integrálformuláját, mely bizonyos függvények Fourier-együtthatóira vonatkozik. A levezetett képletek a Bessel-függvényekre vonatkozó számos integráltételnek új bizonyítására, továbbá néhány újnak látszó, a Bessel-függvényekre vonatkozó összefüggésre vezetnek. Az egyik ilyen képlet a konfluens hypergeometrikus függvényeknek egy újnak látszó integráلهőállítását adja a Bessel-függvények segítségével.

Az Agostinelli-féle tétel egy további általánosítását tartalmazza a dolgozat, amikor az Agostinelli által vizsgált függvénynek nem a közönséges értelemben vett Fourier-együtthatóját, hanem a Gegenbauer-féle függvények szerint vett Fourier-együtthatójára állapít meg egy formulát. Ennek speciális esetei számos, a Bessel-függvényekre vonatkozó összefüggés levezetésére alkalmasak, így többek között a másodfajú Bessel-függvények egy integráلهőállítását adja a Gegenbauer-féle függvények segítségével.

A matematikai fizika számos problémája, különösen az analitikus mechanika és a folyadékáramlástan gyakran a következő alakú végtelen határu integrálok kiszámítására vezet :

$$\int_0^{\infty} J_m(a\xi) J_n(b\xi) f(\xi) d\xi,$$

ahol J_n jelenti az elsőfajú Bessel-féle függvényeket. Így például nagyméretű, igen vékony rugalmas lemez kényszerített rezgését a következő differenciálegyenlet írja le :

$$b^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Phi(r, t).$$

Ha a deformáció változását olyan, a normális irányában ható nyomóerő hatása alatt vizsgáljuk, mely csupán egy ideig egy kör területén egyenletesen hat és $\Phi(r, t) = F(r) G(t)$ alakú, akkor a szóbanforgó differenciálegyenlet megoldását a

$$W(r, t) = \int_0^{\infty} J_0(r\xi) J_1(a\xi) \frac{1 - \cos bt\xi^2}{\xi^4} d\xi$$

integrál szolgáltatja. — Vagy pedig: egy radiálisan szimmetrikus nyomás hatása alatt álló viszkózus folyadék szabad felszínalakjának egyenletét elég hosszú idő után közelítőleg a következő integrállal lehet kiszámítani

$$\zeta(r) = \int_0^{\infty} J_1(\xi a) J_0(\xi r) d\xi. \quad (0 < r < a)$$

Ugyancsak az említett típusba tartozó integrálok lépnek fel akkor, ha pl. vastag lemezek deformációit vizsgáljuk bizonyos erők hatása alatt. Ekkor

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi z} \xi^p J_m(\xi r) J_1(\xi a) d\xi$$

alakú integrálok kiszámítása válik szükségessé.

Az előbbiekkal rokon (bár azoktól alakilag eltérnek) integrálok a következők:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(R) \cos n \Theta d\Theta,$$

ahol $R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta}$. Ezek is számos rugalmasságtani feladat megoldása kapcsán lépnek fel. Így például bizonyos rugalmas héjak deformációinak kiszámításánál az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} J_k(\xi R) \cos \Theta d\Theta \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \Theta}{(R^2 + z^2)^{1/2}} d\Theta$$

alakú integrálok értékeinek meghatározása szükséges (l. pl. *R. A. Sack: Prac. Phys. Soc.* 58, 1946. 729. o.).

Az említett típusba tartozó integrálok kiszámításával már a múlt században számosan foglalkoztak, mint például *Hankel, Sonine, Weber, Bierens de Haan* és még sokan mások.

Nemrégén *C. Agostinelli* egy figyelemreméltó formulát talált, melynek lényege az, hogy a Bessel-függvények szorzatát tartalmazó végtelen határú integrálokat az imént definiált R -től függő kifejezés Fourier-együtthatóinak kiszámítására vezeti vissza. E formula jelentősége kettős: egyrészt lehetővé teszi *Hankel, Sonine* stb. már ismert képleteinek igen egyszerű igazolását és ezenkívül lehetővé teszi a matematikai fizika differenciálegyenleteinek megoldása kapcsán fellépő Bessel-függvényeket tartalmazó végtelen határú integrálok explicit kiszámítását, másrészt számos bonyolult, az említett típusba

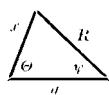
tartozó improprius integrál kiszámítását Fourier-együtthatók kiszámítására vezeti vissza, ami által ezek a bonyolult integrálok numerikusan (pl. harmonikus analízátorokkal is) kezelhetőkké válnak.

A következőkben Agostinelli tételének többirányú általánosítását adjuk. Ezáltal lehetővé válik egyrészt számos klasszikus eredmény egyszerű igazolása, másrészt újabb, az említett típusba tartozó integrálok explicit kiszámítása. Megemlítjük, hogy Agostinelli tételének általánosítása lehetővé teszi a hipergeometrikus függvény egy újabb integrálélellállítását, ami által lehetségessé válik a matematikai fizikában oly nagy szerepet játszó hipergeometrikus differenciálegyenlethez rokon differenciálegyenletek megoldását zárt alakban felírni.

Legyen $f(r)$ egy tetszőleges olyan függvény, melyre a Hankel-féle integráltétel alkalmazható és $R = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}$, ahol $x, y, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ akármilyen valós számok. C. Agostinelli [1] bebizonyította a következő formulát:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \cos n\theta d\theta = \int_0^\infty s J_n(sx) J_n(sy) ds \int_0^\infty \sigma J_0(s\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

J_n jelenti az n indexű elsőfajú Bessel-féle függvényt. Agostinelli ennek a tételnek számos alkalmazását adta, éppen ezért talán nem érdektelen Agostinelli tételének néhány általánosítását adni. Mivel (1. ábrát)



$$\sin \psi = \frac{x}{R} \sin \theta \text{ és } \cos \psi = \frac{y - x \cos \theta}{R},$$

a Bessel-függvény elméletéből közismert Graf-féle formulából [2] következik, hogy

$$(1) \quad J_k(R) \cos k\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{k+m}(x) J_m(y) \cos m\theta$$

és

$$(2) \quad J_k(R) \sin k\psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{k+m}(x) J_m(y) \sin m\theta.$$

k itt akármilyen számot jelenthet.

(1)-ből nyilván

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} J_k(R) \cos k\psi \cos m\theta d\theta = J_{k+m}(x) J_m(y) + J_{k-m}(x) J_{-m}(y).$$

(Ez a formula elveszti értelmét, ha $x \cdot y = 0$. még akkor is, ha $k = m$ egész.)

Vegyük figyelembe ezt a jól ismert formulát, hogy

$$J_{-m} = (-1)^m J_m,$$

akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} J_k(R) \cos k\psi \cos n\Theta d\Theta = \\ & = J_{k+m}(x) J_m(y) + (-1)^m J_{k-m}(x) J_m(y) = [J_{k+m}(x) + (-1)^m J_{k-m}(x)] J_m(y) \end{aligned}$$

Ha x és y helyett sx -et, illetve sy -t írunk, világos dolog, hogy ψ ezáltal nem változik meg, így tehát

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} J_k(sR) \cos k\psi \cos m\Theta d\Theta = [J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)] J_m(sy).$$

Szorozzuk végig ezt az egyenletet $s \int_0^{\infty} \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma) d\sigma$ -val és integráljuk s szerint, akkor figyelembevée a Hankel-féle integráltételt, a következő formulára jutunk:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \cos k\psi \cos m\Theta d\Theta = \\ & = \int_0^{\infty} s [J_{k+m}(sx) + (-1)^m J_{k-m}(sx)] J_m(sy) ds \int_0^{\infty} \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Ez a képlet az Agostinelli-féle képlet közvetlen általánosítása, mert ha $k = 0$, akkor megkapjuk az idézett tételt.

A (2) képletből egy másik, az (I)-hez hasonló formulát is lehet nyerni. (2)-ből ugyanis

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} J_k(R) \sin k\psi \sin m\Theta d\Theta = J_{k+m}(x) J_m(y) - J_{k-m}(x) J_{-m}(y) = \\ & = J_{k+m}(x) J_m(y) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x) J_m(y) = \\ & = [J_{k+m}(x) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x)] J_m(y). \end{aligned}$$

Ide ismét helyettesítsünk x és y helyébe sx , illetve sy -t és az így nyert egyenletet $s \int_0^{\infty} \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma) d\sigma$ -val szorozzuk végig, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (II) \quad & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin k\psi \sin m\Theta d\Theta = \\ & = \int_0^{\infty} s [J_{k+m}(sx) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(sx)] J_m(sy) ds \int_0^{\infty} \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Az (I) és (II) képletek összeadásával azt kapjuk, hogy

$$(III) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \cos(k\psi - m\Theta) d\Theta = \\ = \int_0^\infty s J_{k+m}(sx) J_m(sy) ds \int_0^\infty \sigma J_k(s\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Ez utóbbi *Agostinelli* képletének egy másik irányú általánosítása.

2. Lássuk a most levezetett formulának egy-két következményét. Ismeretes, hogy [3]

$$\int_0^\infty J_k(s\sigma) e^{-h\sigma^2} \sigma^{k+1} d\sigma = \frac{s^k}{(2h)^{k+1}} e^{-\frac{s^2}{4h}} \quad (k > -1 \quad h > 0).$$

Ha (III)-ban $f(\sigma) = \sigma^k e^{-h\sigma^2}$, akkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^k e^{-hR^2} \cos(k\psi - m\Theta) d\Theta = \\ = \frac{1}{(2h)^{k+1}} \int_0^\infty s^{k+1} e^{-\frac{s^2}{4h}} J_{k+m}(sx) J_m(sy) ds.$$

Ez az érdekesnek látszó képlet *Agostinelli* egy másik képletének általánosítása. Ha $k = 0$, megkapjuk az idézett formulát [4].

Ha kiindulunk a következő, *Hankeltől* származó formulából [5]:

$$\int_0^\infty J_k(s\sigma) \sigma^q d\sigma = \frac{2^q}{s^{q+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)}, \quad -(k+1) < q < \frac{1}{2},$$

és (III)-ban

$$f(R) = R^{q-1}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{q-1} \cos(k\psi - m\Theta) d\Theta = \\ = 2^q \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_{m+k}(sx) J_m(sy) ds.$$

Különösen érdekes az az eset, amikor $x = y$. Ez esetben $2\psi + \Theta = \pi$ és $R = 2x \cos \psi$. Ekkor

$$(4) \quad \frac{(-1)^m}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+k)\psi}{(2x)^{1-q} \cos^{1-q}\psi} d\psi =$$

$$= 2^q \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{s^q} J_{m+k}(sx) J_m(sy) ds.$$

Ha itt $q = 0$, akkor

$$\int_0^\infty J_{m+k}(sx) J_m(sx) ds = \frac{(-1)^m}{2x\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+k)\psi}{\cos \psi} d\psi.$$

Legyen $k = 1$, akkor

$$\int_0^\infty J_{m+1}(sx) J_m(sx) ds = \frac{(-1)^m}{2\pi x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+1)\psi}{\cos \psi} d\psi = \frac{1}{2x}.$$

Ez egy ismert képlet [6]. Ha $m = 0$, akkor

$$\int_0^\infty J_0(sx) J_1(sx) ds = \frac{1}{2x}$$

képlethez jutunk, mely *Weber* [7] egy eredménye.

Mint fontos speciális esetet felemlíthetjük azt, amikor $k = 0$, $q = 0$, ekkor

$$\int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\Theta}{R} d\Theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\Theta d\Theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \Theta}}$$

ami ismét *Agostinelli* egyik eredménye [8].

Ebből következik, hogy

$$\int_0^{\infty} J_1(sx) J_1(sy) ds =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \int_0^{\pi} \frac{\cos \Theta d\Theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 \left(\frac{y}{x}\right) \cos \Theta}} = \frac{2}{\pi y} \left[K\left(\frac{y}{x}\right) - E\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{ha } y < x \\ \frac{1}{\pi y} \int_0^{\pi} \frac{\cos \Theta d\Theta}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{y}\right) \cos \Theta}} = \frac{2}{\pi x} \left[K\left(\frac{x}{y}\right) - E\left(\frac{x}{y}\right) \right], & \text{ha } x < y \end{cases}$$

Itt figyelembe vettük *D. Bierens de Haan* egyik eredményét [9]; $F(t)$ a másodfajú teljes elliptikus integrált, $K(t)$ pedig az elsőfajú teljes elliptikus integrált jelenti. A most levezetett képlet újnak látszik.

Legyen (4)-ben $m = 0$ és $k = 0$, akkor

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^q} J_0^2(sx) ds =$$

$$= \frac{1}{2^q \pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(2x)^{1-q} \cos^{1-q} x} = \frac{1}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1} \psi d\psi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \frac{2^{q-3}}{\pi x^{1-q}} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \quad 0 < q < \frac{1}{2}$$

B az Euler-féle béta-függvényt jelenti. Itt ismét *Bierens de Haan* egy formuláját használtuk fel [10]. Ez a formula is újnak látszik. Legyen (4)-ben $k = -2m$, akkor

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^q} J_m(sx) J_{-m}(sx) dx = \frac{(-1)^m}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} \frac{1}{x^{1-q}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \tau^{q-1} d\psi =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} 2^{q-3} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

Vegyük figyelembe, hogy $J_{-m} = (-1)^m J_m$, akkor a

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^q} J_m^2(sx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi x^{1-q}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2m-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-2m+q}{2}\right)} 2^{q-3} B\left(\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right) \quad 0 < q < \frac{1}{2}$$

a képlethez jutunk, mely nem volt eddig ismeretes előttünk.

A (3) alatti képlet lehetővé teszi a Gauss-féle hipergeometrikus függvény egy érdekesnek látszó integráloáallítását. Ismereteseek ugyanis *Sonine* és *Schafheitlin* klasszikus formulái [11], melyek szerint

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^q} J_{m+k}(sx) J_m(sy) ds =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^{m+k} \Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2^q y^{m+k-q+1} \Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right) \Gamma(m+k+1)} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{k-q+1}{2}, m+k+1, \frac{x^2}{y^2}\right) \\ \text{ha } 0 < x < y - (k+1) < q < \frac{1}{2} \\ \\ \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{q-1} \Gamma(q) \Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m+k+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right)} \\ \text{ha } x = y > 0 \text{ és } 0 < q < \frac{1}{2} \\ \\ \frac{y^m \Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{2^q x^{m-q+1} \Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right) \Gamma(m+1)} \times \\ \times \left({}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{-k-q+1}{2}, m+1, \frac{y^2}{x^2}\right)\right) \text{ ha } 0 < y < x. \end{array} \right.$$

Ezeket a (3) képlettel összevetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{q-1} \cos(k\psi - m\Theta) d\Theta = \\
 & = \frac{x^{m+k}}{y^{m+k-q+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right) \Gamma(m+k+1)} \times \\
 & \times {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{k-q+1}{2}, m+k+1, \frac{x^2}{y^2}\right) \text{ ha } 0 < x < y \\
 & = \frac{y^m}{x^{m-q+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right) \Gamma(m+1)} \times \\
 & \times {}_2F_1\left(\frac{2m+k-q+1}{2}, \frac{-k-q+1}{2}, m+1, \frac{y^2}{x^2}\right) \\
 & \text{ ha } 0 < y < x
 \end{aligned}$$

Ha pedig *Sonine* és *Schafheitlin* eredményeit (4)-gyel vetjük egybe, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m+k)\psi}{\cos^{1-q}\psi} d\psi = \\
 & = (-1)^m 2^{1-q} \pi \frac{\Gamma(q) \Gamma\left(\frac{2m+k-q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-k+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2m+k+q+1}{2}\right)} \\
 & \text{ ha } 0 < q < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

További érdekes következményeket nyerhetünk, ha

$$-f(\sigma) = \sigma^{k-1} e^{-h\sigma} \quad k > -\frac{1}{2}, \quad h > 0$$

helyettesítést hajtjuk végre. Ekkor ugyanis

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{k-1} e^{-hR} \cos(k\psi - m\Theta) d\Theta = \\ = \frac{2^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{s^{k+1}}{(s^2 + h^2)^{k + \frac{1}{2}}} J_{m+k}(sx) J_m(sy) ds,$$

figyelembevételével *Sonine* egyéb ismert eredményét [12]. Ha $k = 0$, visszakapjuk *Agostinelli* [13] egyik figyelemreméltó eredményét. Ha pedig $m = 0$ és $k = \frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-hR}}{\sqrt{R}} \cos \frac{\psi}{2} d\Theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{3}{2}}}{s^2 + h^2} \frac{\sin sx}{\sqrt{sx}} J_0(sy) ds = \\ = \frac{2}{\pi \sqrt{x}} \int_0^\infty J_0(sy) \frac{s}{s^2 + h^2} \sin sx ds.$$

Legyen most $|y| < x$ ($x > 0$), akkor mint ismeretes [14]

$$\int_0^\infty J_0(sy) \frac{1}{s^2 + h^2} \cos sx ds = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-xh}}{h} I_0(hy);$$

differenciáljuk mindkét oldalt x szerint, akkor

$$\int_0^\infty J_0(sy) \frac{s}{s^2 + h^2} \sin sx ds = \frac{\pi}{2} e^{-xh} I_0(hy).$$

Így tehát

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-hR}}{\sqrt{R}} \cos \frac{\psi}{2} d\Theta = \frac{2\pi}{\sqrt{x}} e^{-xh} I_0(hy) \quad (|y| < x, \quad h > 0).$$

3. Az eddigieket nagymértékben általánosíthatjuk, ha a kiindulási Graf-formula valamely általánosításából indulunk ki.

Így például ismeretes [15], hogy

$$\frac{J_n(R)}{R^n} = 2^n \Gamma(n) \sum_{m=0}^{\infty} (n+m) \frac{J_{n+m}(y)}{x^n} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \frac{J_{n+m}(y)}{y^n},$$

ahol $C_m^{(n)}$ jelenti a magasabbrendű gömbfüggvényeket (Gegenbauer-féle függvényeket*) ($n \pm 0, -1, -2, \dots$). Felhasználva a magasabb gömbfüggvények ortogonalitását írhatjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi \frac{J_n(R)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta = \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{n-1} m! \Gamma(n)} J_{n+m}(x) J_{n+m}(y).$$

Helyettesítsünk x és y helyébe sx , ill. sy -t, kapjuk, hogy

$$x^n y^n \int_0^\pi s^n \frac{J_n(sR)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta = \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{n-1} m! \Gamma(n)} J_{n+m}(sx) J_{n+m}(sy).$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt ismét $s^{-n-1} \int_0^\infty \sigma J_n(s\sigma) J f(\sigma) d\sigma$ integrállal és integráljunk s szerint 0-tól ∞ -ig, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & x^n y^n \int_0^\pi \frac{f(R)}{R^n} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta = \\ \text{(IV)} \quad & = \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{n-1} m! \Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{s^{n-1}} J_{n+m}(sx) J_{n+m}(sy) ds \int_0^\infty \sigma J_n(s\sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Ez ismét *Agostinelli* tételének egy másirányú általánosítása. Ha itt $n = 1$, akkor, figyelembevétel, hogy $C_m^{(1)}(\cos \Theta) = \frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin \Theta}$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & xy \int_0^\pi \frac{f(R)}{R} \sin \Theta \sin(m+1)\Theta d\Theta = \\ & = (m+1) \pi \int_0^\infty J_{m+1}(sx) J_{m+1}(sy) ds \int_0^\infty \sigma J_1(s\sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ezt a formulát más módon, közvetlenül II-ből is megkaphatjuk. Legyen $k > 0$ egész szám. Akkor ismert képletek szerint

$$J_{k-m}(x) = (-1)^{k-m} J_{m-k}(x).$$

Ezért

$$J_{m+k}(x) + (-1)^{m+1} J_{k-m}(x) = J_{m+k}(x) - (-1)^k J_{m-k}(x)$$

* Szokásos ezeket még $V_m^{(l)}$ -vel is jelölni, a C és V jelölés közötti összefüggés $V_k^{(2n)} = C_k^{(n)}$

és

$$J_{m-k}(x) = \frac{1}{x^{m-k}} \left(\frac{d}{x dx} \right)^k [x^m J_m(x)]$$

$$J_{m+k}(x) = (-1)^k x^{m+k} \left(\frac{d}{x dx} \right)^k [x^{-m} J_m(x)].$$

Így tehát

$$\begin{aligned} & (-1)^k J_{m-k}(sx) - J_{m+k}(sx) = \\ & = \frac{(-1)^k}{x^k} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{d}{ds} \right)^k [s^m J_m(sx)] - s^m \left(\frac{d}{ds} \right)^k s^{-m} J_m(sx) \right]. \end{aligned}$$

Egész k értékekre II így is írható

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin k\psi \sin m\Theta d\Theta = \\ & = \frac{(-1)^n}{x^k} \int_0^\infty \left[\frac{1}{s^{m-1}} \left(\frac{d}{ds} \right)^k [s^m J_m(sx)] + \right. \\ & \quad \left. + s^{m+1} \left(\frac{d}{ds} \right)^k [s^{-m} J_m(sx)] \right] J_m(sy) ds \cdot \int_0^\infty \sigma J_K(s\sigma) f(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Legyen most $k=1$, akkor

$$\frac{d}{ds} (s^m J_m(sx)) = ms^{m-1} J_m(sx) + s^m x J'_m(sx).$$

$$\frac{d}{ds} (s^{-m} J_m(sx)) = -ms^{-m-1} J_m(sx) + s^{-m} x J'_m(sx).$$

Szorozzuk az első egyenletet s^{1-m} , a másodikat $-s^{1+m}$ -el és adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$\frac{1}{s^{m-1}} \frac{d}{ds} [s^m J_m(sx)] - s^{m+1} \frac{d}{ds} [s^{-m} J_m(sx)] = 2m J_m(sx).$$

Ezért

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(R) \sin \psi \sin m\Theta d\Theta = \frac{2m}{x} \int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy) \int_0^\infty \sigma J_1(s\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Másrészt viszont $\sin \psi = \frac{x}{R} \sin \theta$, így

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R)}{R} \sin \Theta \sin m\Theta d\Theta = \frac{2m}{x^2} \int_0^\infty J_m(sx) J_m(sy) \int_0^\infty J_1(s\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

Figyelembevée $\sin \Theta \sin m \Theta$ függvény páros voltát és hogy mindkét oldalon szereplő integrál x és y -ban szimmetrikus, megkapjuk az előbbi képletet.

Legyen most megint $f(\sigma) = \sigma e^{-h\sigma^2}$ ($h > 0$), akkor már idézett tétel alapján

$$\frac{xy}{\pi} \int_0^\pi e^{-hR^2} \sin \Theta \sin m \Theta d\Theta = \frac{m}{4h^2} \int_0^\infty s J_m(sx) J_m(sy) e^{-\frac{s^2}{4h}} ds.$$

Másrészt tudjuk, hogy [16]

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4a}} J_m(sx) J_m(sy) s ds = 2he^{-(x^2+y^2)h} J_m(2hxy),$$

ezért

$$\frac{xy}{\pi} \int_0^\pi e^{-h(x^2+y^2-2xy \cos \Theta)} \sin \Theta \sin m \Theta d\Theta = \frac{m}{2h} e^{-h(x^2+y^2)} J_m(2hxy).$$

Legyen (IV)-ben $f(\sigma) = \sigma^k e^{-h\sigma^2}$, akkor

$$\begin{aligned} x^n y^n \int_0^\pi e^{-hR^2} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta &= \\ &= \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{2n} h^{n+1} m! \Gamma(n)} \int_0^\infty s J_{m+n}(sx) J_{m+n}(sy) e^{-\frac{s^2}{4h}} ds. \end{aligned}$$

Figyelembevée az imént felhasznált tételt, a következő eredményt kapjuk

$$\begin{aligned} x^n y^n \int_0^\pi e^{-h(x^2+y^2-2xy \cos \Theta)} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta &= \\ &= \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{2n-1} h^n m! \Gamma(n)} e^{-h(x^2+y^2)} J_{m+n}(2hxy). \end{aligned}$$

Ha viszont $f(\sigma) = \sigma^{q-1}$ ($-(n+1) < q < \frac{1}{2}$), akkor felhasználva *Hankel*-nak már idézett tételét, IV. azt adja, hogy

$$\begin{aligned} x^n y^n \int_0^\pi \frac{1}{R^{n-q+1}} C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta &= \\ &= \frac{\pi \Gamma(2n+m)}{2^{n-1} m! \Gamma(n)} 2^q \frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{s^{n+q}} J_{m+n}(sx) J_{m+n}(sy) ds. \end{aligned}$$

Erre megint alkalmazzuk *Serine* és *Schafheitlin* tételeit, ezt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & x^n y^n \int_0^\pi \frac{C_m^{(n)}(\cos \Theta) \sin^{2n} \Theta d\Theta}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta)^{\frac{n-q-1}{2}}} = \\
 & = \left[\begin{aligned} & \frac{-\Gamma(2n+m) x^{n+m} \Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{2^{2n-1} m! \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right) y^{m-q+1} \Gamma(m+n+1)} \cdot \\ & \cdot {}_2F_1\left(\frac{2m+n-q+1}{2}, \frac{-n-q+1}{2}, m+n+1, \frac{x^2}{y^2}\right), \text{ ha } 0 < x < y \\ & \frac{\pi \Gamma(2n+m) x^{n+q-1} \Gamma(n+q) \Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{2^{2n-1} m! \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n+2m+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \\ & \text{ ha } x = y > 0 \\ & \frac{-\Gamma(2n+m)}{2^{2n-1} m! \Gamma(n)} \frac{y^{n+m} \Gamma\left(\frac{n+2m-q+1}{2}\right)}{x^{m-q+1} \Gamma(n-m+1) \Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \cdot \\ & \cdot {}_2F_1\left(\frac{n+2m-q+1}{2}, \frac{-n-q+1}{2}, n+m+1, \frac{y^2}{x^2}\right) \\ & \text{ ha } 0 < y < x \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Különösen figyelemreméltó formulát kapunk, ha $q = 0$ és $n = 1$, ekkor

$$\begin{aligned}
 & xy \int_0^\pi \frac{C_m^{(1)}(\cos \Theta) \sin^2 \Theta d\Theta}{x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta} = \\
 & = \begin{cases} \frac{\pi \Gamma(m+2)}{m!} \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1} & \text{ ha } 0 < y < x \\ \frac{\pi \Gamma(m+2)}{m!} \frac{1}{2(m+1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{m+1} & \text{ ha } 0 < x < y, \end{cases}
 \end{aligned}$$

De

$$C_m^{(1)}(\cos \Theta) = \frac{\sin(m+1)\Theta}{\sin \Theta}, \text{ ezért}$$

$$\frac{xy}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(m+1)\Theta \sin \Theta d\Theta}{x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^{m+1} & \text{ ha } 0 \leq y \leq x \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y}\right)^{m+1} & \text{ ha } 0 \leq x < y \\ & m > 0 \end{cases}$$

Érdemes még kitérni az $m = 0$ esetre. Ekkor t. i.

$$C_0^n(\cos \Theta) \equiv 1, \text{ így}$$

$$\frac{x^n y^n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \Theta}{R^{n-q+1}} d\Theta = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)} \frac{2^q}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \cdot$$

$$\begin{cases} x^n \Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right) \\ 2^{n+q} y^{-q+1} \Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right) \Gamma(n+1) \\ {}_2F_1\left(\frac{n-q+1}{2}, -\frac{n-q+1}{2}, n+1, \frac{x^2}{y^2}\right) \text{ ha } x < y \\ \frac{x^{n+q-1} \Gamma(n+q) \Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)}{2^{n+q} \Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3n+q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)} \text{ ha } y < x. \end{cases}$$

IRODALOM

- [1] *C. Agostinelli*: Sopra alcuni integrali delle funzioni cilindriche. Boll. della unione Matematica Italiana II. ser. IV. 1942. 25. o.
 [2] *K. Graf*: Math. Ann. XLIII. 1893. 142. o. 1. pl. *G. N. Watson*: A treatise on the Theory of Bessel-functions. 1952. 361. o.
 [3] *N. Sonine*: Recherches sur les fonct. cylindriques... Math. Ann.: XVI. 1880. 35. o.
 [4] *C. Agostinelli*: 1. cit. 26. o. (2) képlet.
 [5] *H. Hankel*: Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen. Math. Ann. VIII. 1875. 468. (16) képlet.
 [6] *L. Watson*: 1. cit. 406. o.
 [7] *L. Watson*: 1. cit. 406. o.
 [8] *C. Agostinelli*: 1. cit. 27. o.
 [9] *D. Bierens de Haan*: Nouvelles tables d'intégrales définies. Amsterdam, 1867. 67.
 [10] *D. Bierens de Haan*: 1. cit. 41. o.
 [11] 1. pl. *Magnus—Oberhettinger*: Formeln und Sätze für die speziellen Functionen der Mathematischen Physik. 1948. 49 o.
 [12] *N. Sonine*: 1. cit. 45. o.
 [13] *C. Agostinelli*: 1. cit. 27. o.
 [14] *Magnus—Oberhettinger*: 1. cit. 46. o.
 [15] *Watson*: 1. i. m. 363. o.
 [16] *И. М. Рыжик. — И. С. Градштейн*: Таблицы 1951. 257. 4. 436

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. Фенъе¹

Резюме

В работе даётся обобщение интегральной формулы Агостинелли, относящейся к коэффициентам Фурье некоторых функций.

Выведенные формулы приводят к новому доказательству ряда интегральных теорем, относящихся к Бесселевым функциям. Одна из таких формул дает интегральное

представление гипергеометрических функций при помощи Бесселевых функций. Работа содержит дальнейшее обобщение теоремы Августиелли, состоящее в выведении формулы не для обыкновенных коэффициентов Фурье исследуемой Агостинелли функции, а для коэффициентов Фурье, взятых по функциям Gegenbauera.

Специальные случаи этой формулы пригодны для вывода многих соотношений, относящихся к Бесселевым функциям, между прочим для получения интегрального представления Бесселевых функций второго рода с помощью функций Gegenbauera.

EINIGE FOLGERUNGEN AUS DEM ADDITIONSATZ FÜR ZYLINDERFUNKTIONEN

ST. FENYÖ

Zusammenfassung

Die Abhandlung verallgemeinert eine Integralformel von C. Agostinelli, die sich auf die Fourier-Koeffizienten gewisser Funktionen bezieht. Die abgeleiteten Formeln verhelfen zu einer neuen Beweisführung zahlreicher, sich auf die Bessel'schen Funktionen beziehender Integralsätze und führen zu einigen anscheinend neuen Zusammenhängen dieser Funktionen. Mit Hilfe der Bessel'schen Funktionen ergibt eine dieser Formeln eine anscheinend neue Integraldarstellung der konfluenten hypergeometrischen Funktionen.

Die Arbeit enthält eine weitere Verallgemeinerung des Agostinellischen Satzes, indem eine Formel nicht für die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten, sondern für die Koeffizienten der nach den Gegenbauer'schen Funktionen fortschreitenden Fourierreihe der von Augustinelli betrachteten Funktion abgeleitet wird. Die Spezialfälle dieser Formel eignen sich zur Ableitung zahlreicher Sätze über Bessel'sche Funktionen. So ergibt sich z. B. eine Integraldarstellung der Bessel'schen Funktionen zweiter Gattung durch Gegenbauer'sche Funktionen.

DIFFÚZIÓÁLLANDÓ MEGHATÁROZÁSA TÖBBRÉTEGŰ DIFFÚZIÓS RENDSZER ANYAGELOSZLÁSÁNAK ISMERETÉBEN

GLÜCK VERA

Összefoglalás

Ismeretes, hogy a diffúzióállandó egyik meghatározási módja az ú. n. Oeholm-féle módszer. Ennek keresztülviteléhez általában használatban volt a Stefan—Kawalki-féle táblázat. A dolgozat a Stefan—Kawalki táblának finomítását adja, amennyiben nem négyrétegű diffúziós rendszerre, hanem többrétegű diffúziós rendszerre állapítja meg az anyageloszlást. A dolgozat első fele a számítási módszert, második része pedig magukat a táblázatokat tartalmazza.

A diffúzióállandó kísérleti meghatározásának egyik elterjedt módszere az Oeholm-féle eljárás. Ez a Fick-féle második törvényen :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

alapszik. Ugyanis fenti differenciálegyenletet megoldva megkapjuk a koncentrációt, illetve annak integrálásával az anyagmennyiség rétegenkénti eloszlását, mely függvénye lesz a bevezetett dimenzió nélkül $\tau = \frac{D \cdot t}{l^2}$ mennyiségnek.

Stefan és Kawalki táblázatát állítottak össze [1], melyből a $\frac{h^2}{Dt}$ tört értéke olvasható le, ha a diffúzió kezdetétől számított t időpontban ismeretes az egyes rétegek anyagtartalma. A $\frac{h^2}{Dt}$ -ben h jelenti egy réteg magasságának felét. Erdey-Grúz—Proszt Fizikai-kémiai praktikuma [2] is közli az említett táblázatot ; ott a szerzők $\frac{h^2}{4Dt}$ függvényében adják a rétegek anyagtartalmát, ugyanis h -val egy réteg magasságát jelölik.

A Stefan—Kawalki-féle táblázat csak négyrétegű diffúziós rendszer (a betöltött anyagmennyiség az egész oldat térfogatának negyede) esetében használható.

Intézetünkben ezért a Központi Biokémiai Ipari Kutató Laboratórium megbízásából számításokat végeztünk a 2, 3, 4 és 10 rétegű diffúziós rend-

szerek anyageloszlásának meghatározására. Számításainkból táblázatot állítottunk össze. A mi táblázataink az egyes rendszerek rétegeinek anyagtartalmát $\frac{Dt}{l^2}$ függvényében adják, ahol l -lel az összes réteg együttes hosszát jelöltük.

A következőkben ismertetjük a Fick-féle differenciálegyenletnek megoldását, melynek alapján a majd alább közlendő táblázatot készítettük.

A

$$(1) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

egyenletnek

$$C(x, 0) = \begin{cases} C_0 & 0 \leq x \leq x_0 \\ 0 & x_0 \leq x \leq l \end{cases}$$

és

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=l} = 0$$

feltételek melletti megoldását $C = f(x)e^{-\lambda t}$ alakban keressük. Fentiekben l -lel az oldatoszlop hosszát, C_0 -val az edény aljára rétegezett oldat koncentrációját, x -szel az edény aljától mért távolságot, t -vel pedig az időt jelöltük.

Hasonló gondolattal mint az irodalomban megtalálható [3] (1) egyenlet megoldásául $C(x, t)$ -t a következő végtelen sor alakjában kapjuk:

$$(2) \quad C(x, t) = C_0 \left\{ \frac{x_0}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x_0 \cos n \frac{\pi}{l} x e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} D t} \right\}$$

$$\frac{C}{C_0} = \gamma, \quad \frac{Dt}{l^2} = \tau, \quad \frac{x}{l} = \xi \quad \left(\xi_0 = \lambda = \frac{x_0}{l} \right)$$

dimenzió nélküli mennyiségek bevezetésével

$$(3) \quad \gamma(\xi, \tau, \lambda) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n\pi} [\sin n\pi(\lambda + \xi) + \sin n\pi(\lambda - \xi)].$$

Az oldószertben lévő anyag mennyiségét a koncentráció (3) alatti kifejezésének ξ szerinti integrálásával kapjuk meg, mely szintén dimenzió nélküli mennyiség.

$$(4) \quad F(\xi, \tau, \lambda) = \lambda \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \pi^2 \tau}}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi(\lambda - \xi) - \cos n\pi(\lambda + \xi)]$$

Ha $F(\xi, \tau; \lambda)$ -t $C_0 l$ -lel szorozzuk, nyerjük az anyagmennyiséget gramm-molekulákban kifejezve.

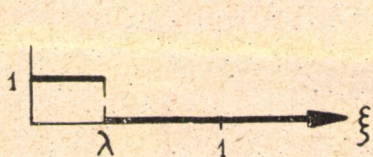
Fenti végtelen sor alakban kapott megoldás kis τ értékekre nagyon lassan konvergál. (1) egyenlet megoldásának kiszámítására a sort így csak $0,035 \leq \tau$ értékekre használtuk. Kis τ , $\tau \leq 0,035$ értékekre más megoldási módszert használtunk:

Ha végtelen hosszúságúnak feltételezzük egy edényt, melyben $\gamma_0(\xi, 0; \lambda)$ kezdeti koncentrációjú oldat van, akkor a koncentráció, mint a hely és idő függvénye, a következő integrállal számítható ki [4]:

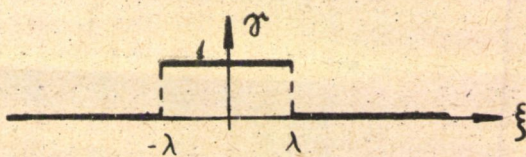
$$(5) \quad \gamma(\xi, \tau; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_0(\xi + 2\sqrt{\tau}\eta) e^{-\eta^2} d\eta.$$

Kis τ értékekre az edényt, melyben a diffúzió végbemegy, végtelen hosszúságúnak feltételezzük. Az edényben levő valóságos kezdeti koncentráció

$$\gamma_0 = \begin{cases} 1 & 0 < \xi < \lambda \\ 0 & \lambda < \xi < 1 \end{cases}$$



1. ábra

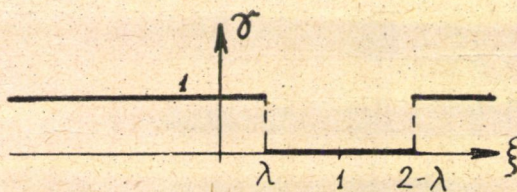


2. ábra

függvényét az egész, végtelen hosszúságú edényre a következő módon kiterjesztett koncentrációfüggvényekkel helyettesítjük:

$$\text{I.} \quad \xi < 1 - \lambda \quad \gamma_0 = \begin{cases} 1 & -\lambda < \xi < \lambda \\ 0 & |\xi| > \lambda \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \xi > 1 - \lambda \quad \gamma_0 = \begin{cases} 0 & \lambda < \xi < 2 - \lambda \\ 1 & \xi < \lambda \text{ és } \xi < 2 - \lambda \end{cases}$$



3. ábra

(5)-be a megfelelő kezdeti koncentrációfüggvényeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\text{I.} \quad \xi < 1 - \lambda \quad \text{esetben} \quad \gamma_I = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\lambda - \xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \Phi \left(\frac{\lambda + \xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right]$$

$$\text{II.} \quad \xi > 1 - \lambda \quad \text{esetben} \quad \gamma_{II} = 1 - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{2 - \lambda - \xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{\xi - \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right)$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Az oldatban levő $F(\xi, \tau; \lambda)$ anyag mennyiséget

I. $\xi < 1 - \lambda$ esetre

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \left(\xi + \lambda \right) \Phi \left(\frac{\xi + \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right) + 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi + \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right)^2} - (\xi - \lambda) \Phi \left(\frac{\xi - \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right) - 2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi - \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right)^2} \right\}$$

II. $\xi > 1 - \lambda$ esetre pedig

$$F = \lambda - \left[1 - \xi + \frac{\xi - 2 - \lambda}{2} \Phi \left(\frac{2 - \lambda - \xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{\xi - \lambda}{2} \Phi \left(\frac{\xi - \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right) - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\left(\frac{2 - \lambda - \xi}{2\sqrt{\tau}} \right)^2} + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi - \lambda}{2\sqrt{\tau}} \right)^2} \right]$$

képletek szolgáltatják.

Az előbb ismeretett módszerekkel számított táblázatokat az alábbiakban közöljük.

Lineáris diffúzió anyagsűrűségeloszlása

$$\lambda = \frac{1}{10}$$

1. réteg	2. réteg	3. réteg	4. réteg	5. réteg	6. réteg	7. réteg	8. réteg	9. réteg	10. réteg	$\tau = \frac{Dt}{R^2}$
relatív anyagtartalma 10 000 törtérszeiben kifejezve										
6095	3075	745	80	4	0	0	0	0	0	0,005
4854	3246	1412	398	75	11	9	0	0	0	0,01
4139	3122	1735	722	222	49	10	1	0	0	0,015
3687	2943	1874	950	384	123	31	6	1	0	0,02
3340	2792	1939	1106	521	199	77	21	3	1	0,025
3089	2642	1936	1214	649	300	118	39	10	4	0,03
2880	2517	1923	1283	748	382	170	66	23	8	0,035
2442	2219	1832	1373	935	579	326	168	82	43	0,05
2016	1888	1660	1367	1054	764	522	341	223	166	0,075
1756	1673	1518	1311	1081	853	649	475	371	312	0,1
1445	1400	1315	1199	1065	926	796	621	669	564	0,15
1269	1243	1193	1123	1042	947	886	807	757	732	0,2
1165	1148	1118	1075	1025	974	924	882	852	836	0,25
1100	1090	1072	1046	1016	984	954	928	910	900	0,3

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

1. réteg	2. réteg	3. réteg	4. réteg	5. réteg	6. réteg	7. réteg	8. réteg	$\tau = \frac{Dt}{l^2}$
relatív anyagtartalma 10 000 törtérseiben kifejezve								
4797	3606	1394	194	8	0	0	0	0,005
4420	3324	1672	498	80	7	0	0	0,01
4083	3156	1806	716	201	33	4	0	0,015
3798	3026	1882	890	310	78	14	2	0,02
3561	2910	1924	1030	411	123	33	7	0,025
3361	2805	1944	1108	515	192	58	16	0,03
3186	2711	1947	1183	597	255	87	33	0,035
2795	2466	1918	1313	789	418	198	103	0,05
2371	2168	1811	1384	968	627	394	276	0,075
2095	1954	1701	1385	1060	776	568	460	0,1
1752	1675	1531	1345	1147	966	828	755	0,15
1555	1508	1422	1310	1189	1077	992	946	0,2
1436	1408	1355	1287	1213	1145	1092	1064	0,25
1361	1346	1314	1273	1228	1186	1154	1137	0,3

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

1. réteg	2. réteg	3. réteg	4. réteg	5. réteg	6. réteg	$\tau = \frac{Dt}{l^2}$
relatív anyagtartalma 10 000 törtérseiben kifejezve						
4921	3872	1138	69	0	0	0,005
4733	3565	1451	249	3	1	0,01
4520	3397	1610	425	36	13	0,015
4315	3282	1715	573	92	22	0,02
4125	3191	1789	698	157	40	0,025
3954	3112	1843	803	224	65	0,03
3815	3033	1878	880	305	88	0,035
3432	2843	1939	1070	490	218	0,05
2981	2585	1944	1271	747	470	0,075
2670	2385	1907	1382	942	707	0,1
2269	2105	1824	1503	1228	1071	0,15
2032	1934	1764	1568	1399	1301	0,2
1890	1830	1726	1607	1503	1443	0,25
1803	1766	1703	1630	1567	1530	0,3

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

1. réteg	2. réteg	3. réteg	4. réteg	5. réteg	6. réteg	7. réteg	8. réteg	$\tau = \frac{Dt}{l^2}$
relatív anyagtartalma 10 000 törtérseiben kifejezve								
2500	2496	2406	1800	700	90	8	0	0,005
2496	2460	2252	1664	838	245	44	2	0,01
2482	2403	2142	1592	906	360	96	20	0,015
2454	2348	2058	1550	951	447	145	48.	0,02
2418	2286	1991	1520	980	508	214	82	0,025
2374	2234	1937	1500	1002	560	265	128	0,03
2329	2185	1894	1481	1019	586	315	171	0,035
2192	2054	1792	1442	1058	708	446	308	0,05
2009	1858	1669	1398	1102	830	623	511	0,075
1828	1740	1577	1365	1135	922	760	672	0,1
1603	1549	1450	1320	1180	1050	951	897	0,15
1465	1433	1372	1293	1207	1128	1067	1034	0,2
1382	1361	1324	1277	1224	1175	1138	1118	0,25
1330	1318	1295	1266	1234	1204	1182	1170	0,3

Fenti táblázatokban $\lambda = \frac{x_0}{l}$ viszonyszám értéke adja meg, hogy a betöltött anyagmennyiség hányadrésze az egész edényben levő oldatnak; $\tau = \frac{Dt}{l^2}$ -ben t a diffúzió kezdetétől számított idő, l az egész oldatoszlop hossza. A táblázatokból $\lambda = \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ esetén minden $\frac{1}{8}$ -ad réteg, $\lambda = \frac{1}{10}$ -nél minden $\frac{1}{10}$ -ed réteg, $\lambda = \frac{1}{3}$ -nál pedig minden $\frac{1}{6}$ -od réteg anyagtartalma olvasható le 10 000 törtrészeiben kifejezve a számított τ értékek függvényében.

IRODALOM

- [1] *Kawalki*: Annalen der Physik und Chemie 1894. 52, 185. és 366. o.
- [2] *T. Erdey-Grúz—J. Proszt*: Fizikai-kémiai praktikum. 182. o. (1950)
- [3] *Ph. Frank—R.V. Mises*: Die Differential und Integralgleichungen II. 557. o.
- [4] *B. Baule*: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs VI. 52. o. (1950)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ ИЗВЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕЩЕСТВА МНОГОСЛОЙНОЙ ДИФFUЗИОННОЙ СИСТЕМЕ

В. Глюк

Резюме

Известно, что одним из способов определения постоянной диффузии является таа называемый метод Ехольма. Для выполнения этого обыкновенно применялась таблицк Стефана—Кавалки. Работа уточняет таблицу Стефана Кавалки, определяя распределение вещества не для четырёхслойной, а для многослойной диффузионной системы. Первая часть работы содержит метод вычисления, а вторая часть таблицы.

BESTIMMUNG DER DIFFUSIONSKONSTANTE IN KENNTNIS DER MATERIEVERTEILUNG DES MEHRSCICHTIGEN SYSTEMS

V. GLÜCK

Zusammenfassung

Eine der Methoden zur Bestimmung der Diffusionskonstante ist die sogenannte Ocholsmsche Methode, zu deren Durchführung man im allgemeinen die Stefan-Kawalkischen Tabellen gebraucht.

Die vorliegende Abhandlung gibt eine Verfeinerung der Stefan-Kawalkischen Tabellen, indem die Materieverteilung nicht für ein vierschichtiges, sondern für ein mehrschichtiges Diffusionssystem bestimmt wird.

Der erste Teil stellt die Berechnungsmethode dar, der zweite enthält die Tabellen.

PÉLDÁK SZIMMETRIKUS FÜGGVÉNYKAPCSOLATOKNAK PONTMEZŐS NOMOGRAMMOKKAL VALÓ ÁBRÁZOLÁSÁRA

PÁL SÁNDOR és TÓTH KÁROLY

Összefoglalás

A cikk általános részében a z_1 és z_2 változókból szimmetrikus

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakú ötváltozós függvénykapcsolatok nomografikus ábrázolásával foglalkozik, ahol a determináns 3-ik sorának elemei a z_1 és z_2 -től függő f_{34} , g_{34} , h_{34} függvények lineáris kombinációi, z_0 -tól függő együtthatókkal. Speciális esetként adódik ebből a Clark-féléhez hasonló szerkezetű

$$F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$$

alakú általánosabb függvénykapcsolat, amely olyan nomogrammal ábrázolható, melyben a z_1 és z_2 változók közös skálatartója a (z_1, z_0) illetve a (z_2, z_0) pontmezőt definiáló egyik görbesereg, a z_3 és z_4 változókat egy (z_3, z_4) pontmező ábrázolja.

Foglalkozik továbbá

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0$$

alakú négyváltozós, z_1 és z_2 változókból szimmetrikus függvénykapcsolatokkal, ahol F_{30} , G_{30} , H_{30} a z_3 változó f_3 és g_3 függvényeinek lineáris kombinációja, z_0 -tól függő együtthatókkal.

Ez utóbbi kapcsolat esetén a nomogramun igen általános, nem projektív, illetőleg csak az egyes $z_0 =$ állandó görbékre nézve projektív transzformációt is megenged.

A transzformáció alkalmazására a cikk két — az Intézet gyakorlatából vett — példát mutat be.

Gyakori eset függvénykapcsolatok nomografikus ábrázolásánál, hogy a kapcsolat két változóban mutatkozó szimmetriája az ábrázolás szempontjából előnyt jelent. Legismertebb példa erre a Clark-féle nomogramm, ahol ez a szimmetria lehetővé teszi két változónak közös skálatartón való ábrázolását, vagyis végeredményben két különböző skála egybeesítését. De találhatók a közös skálatartó alkalmazásának más példái is [1]. M. V. Pentkovszkij nomográfiai tankönyvében (magyarázó szöveg nélkül) közöl [2] egy meglehetősen bonyolult szimmetrikus függvénykapcsolat ábrázolására szolgáló nomogram-

mot, melynél a közös skálatartó a nomogramrhoz tartozó pontmezőt definiáló egyik görbesereg. Ebben a cikkben két példa kapcsán megmutatjuk, hogy a közös skálatartó alkalmazása szimmetrikus kapcsolatok esetén különösen gyümölcsöző akkor, ha az ábrázolandó függvénykapcsolatnál két változó skálája az idézett nomogramrhoz hasonlóan egy pontmező egyik görbeseregén ejthető egybe. Ezáltal nemcsak az egy skála megtakarításának kis előnye jelentkezik, hanem ezenfelül lehetővé válik újabb, nagyon általános függvénykapcsolatok ábrázolása és gyakran — mint pl. a jelen cikk két példájánál is — a nomogramm átalakításában sokkal nagyobb szabadságunk van, mint a szokásos nem szimmetrikus kapcsolatok esetén.

1. §. Ötváltozós szimmetrikus kapcsolatok

Tekintsük a következő hatodrendű függvénykapcsolatot :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ F_{34} & G_{34} & H_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

ahol f_1, g_1, h_1 a z_1 változó, f_2, g_2, h_2 a z_2 változó, F_{34}, G_{34} és H_{34} pedig a z_3 és z_4 változók tetszőleges függvényei.

Az (1) kapcsolat olyan nomogrammal ábrázolható, melynek két görbe tartójú skálája (z_1 és z_2) és egy pontmezőben egyesített z_3 és z_4 skálája van.

(1) kapcsolat z_1 és z_2 változóiban szimmetrikus, ha

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv f(z_1), & g_1 &\equiv g(z_1), & h_1 &\equiv h(z_1), \\ f_2 &\equiv f(z_2), & g_2 &\equiv g(z_2), & h_2 &\equiv h(z_2). \end{aligned}$$

Ekkor a z_1 és z_2 görbe tartójú skálák egybeesnek.

Tegyük fel, hogy az (1)-ben szereplő függvények a z_1, z_2, z_3, z_4 változókon kívül még egy z_0 paramétertől is függenek, azaz foglalkozunk az

$$(2) \quad \begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakú kapcsolatokkal, ahol

$$\begin{aligned} f_{10} &\equiv f(z_1, z_0), & f_{20} &\equiv f(z_2, z_0), \\ g_{10} &\equiv g(z_1, z_0), & g_{20} &\equiv g(z_2, z_0), \\ h_{10} &\equiv h(z_1, z_0), & h_{20} &\equiv h(z_2, z_0), \end{aligned}$$

továbbá legyen

$$(3) \quad \begin{aligned} F_{340} &= \varphi_0^{(1)} f_{34} + \psi_0^{(1)} g_{34} + \chi_0^{(1)} h_{34}, \\ G_{340} &= \varphi_0^{(2)} f_{34} + \psi_0^{(2)} g_{34} + \chi_0^{(2)} h_{34}, \\ H_{340} &= \varphi_0^{(3)} f_{34} + \psi_0^{(3)} g_{34} + \chi_0^{(3)} h_{34}. \end{aligned}$$

A (2) kapcsolat nomogrammal való ábrázolása szempontjából mértékadó a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0^{(1)} & \psi_0^{(1)} & \chi_0^{(1)} \\ \varphi_0^{(2)} & \psi_0^{(2)} & \chi_0^{(2)} \\ \varphi_0^{(3)} & \psi_0^{(3)} & \chi_0^{(3)} \end{vmatrix}$$

determináns.

a) eset. Ha F_{340} , G_{340} , H_{340} lineárisan függetlenek, azaz $\Delta \neq 0$, akkor a (2) egyenlet az oszlopok alkalmasan választott kombinációjával

$$(4) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* & g_{10}^* & h_{10}^* \\ f_{20}^* & g_{20}^* & h_{20}^* \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható. Itt tehát a harmadik sor a z_0 változót nem tartalmazza. A nomogramm skálái a következő formulákkal adhatók meg:

A z_1 és z_0 változókat reprezentáló pontmező egyenletrendszere

$$x = \frac{f_{10}^*}{h_{10}^*}, \quad y = \frac{g_{10}^*}{h_{10}^*}.$$

Az 1. és 2. változók szimmetriájából következik, hogy a (z_1, z_0) és (z_2, z_0) pontmező egybeesik.

A z_3 és z_4 változókhoz tartozó pontmező egyenletrendszere:

$$x = \frac{f_{34}}{h_{34}}, \quad y = \frac{g_{34}}{h_{34}}.$$

(v. ö. 1. ábra.)

A (2) egyenletben szereplő függvények speciális választásával a Clark-féléhez hasonló szerkezetű, annál általánosabb függvénykapcsolatok ábrázolására jutunk. Ugyanis a Clark-féle kapcsolatok ábrázolásánál alkalmazott eljárásához hasonlóan az

$$(5) \quad F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$$

kapcsolat, ahol az egyenletben szereplő függvény-szimbolumok jelentése ugyanaz, mint (2)-ben, $f_{10} - f_{20}$ -al való szorzással.

$$\begin{vmatrix} 1 & -f_{10} & f_{10}^2 \\ 1 & -f_{20} & f_{20}^2 \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható, amely (2) speciális esete.

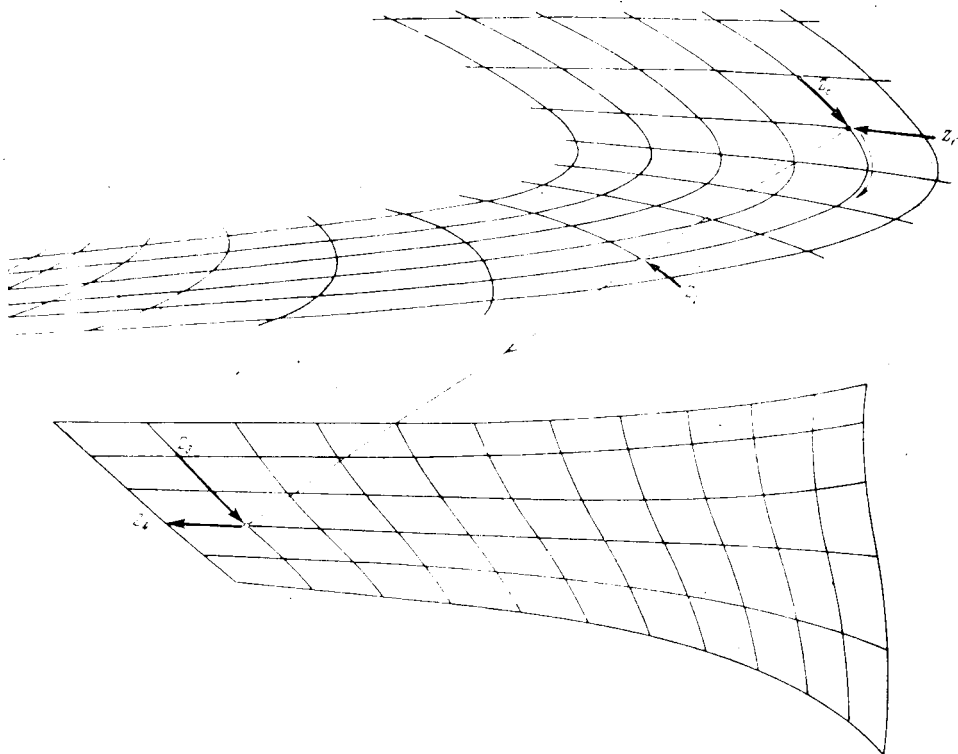
b) eset. Ha az F_{340} , G_{340} , H_{340} formák lineárisan összefüggnek, tehát ha $\Delta \equiv 0$, azok a következő alakban írhatók fel:

$$F_{340} = \varphi_0^{(1)} f_{34} + \psi_0^{(1)} g_{34},$$

$$G_{340} = \varphi_0^{(2)} f_{34} + \psi_0^{(2)} g_{34},$$

$$H_{340} = \varphi_0^{(3)} f_{34} + \psi_0^{(3)} g_{34},$$

vagyis a (2) kapcsolat homogén lineáris az f_{34} és g_{34} függvényekben. Következésképpen a (z_3, z_4) pontmező pontsorrá degenerálódik. Az ilyen kapcsolat ábrázolása nem oldható meg nomogrammkapcsolás nélkül.



1. ábra

2. §. Négyváltozós szimmetrikus kapcsolatok

Foglalkozzunk ezután olyan (2)-höz hasonló alakú kapcsolatokkal, amelyekben a determináns harmadik sorának elemei z_0 -n kívül csak egy z_3 változó függvényei. Legyen tehát az ábrázolandó kapcsolat

$$(6) \quad \begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0,$$

ahol $f_{10}, g_{10}, h_{10}; f_{20}, g_{20}, h_{20}$ értelmezése az 1. §. szerinti, és

$$(7) \quad \begin{cases} F_{30} = \varphi_0^{(1)} f_3 + \psi_0^{(1)} g_3, \\ G_{30} = \varphi_0^{(2)} f_3 + \psi_0^{(2)} g_3, \\ H_{30} = \varphi_0^{(3)} f_3 + \psi_0^{(3)} g_3. \end{cases}$$

Feltehetjük, hogy itt F_{30}, G_{30}, H_{30} között van két lineárisan független forma. Ellenkező esetben ugyanis a kapcsolat háromváltozósra redukálnánk. (6)-nak speciális esete az (5) mintájára nyerhető

$$(8) \quad F_{30} f_{10} f_{20} + G_{30} (f_{10} + f_{20}) + H_{30} = 0$$

Clark-szerű kapcsolat.

Az oszlopok alkalmasan választott lineáris kombinációjával a (6) egyenlet (végtelen sokféleképp)

$$(9) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* & g_{10}^* & h_{10}^* \\ f_{20}^* & g_{20}^* & h_{20}^* \\ f_3 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható.

A (9) alakban felírt kapcsolat olyan nomogrammal ábrázolható, melynek skáláit a következő egyenletek adják:

A z_1 és z_0 változókhoz tartozó pontmező egyenletrendszere:

$$(10a) \quad x = \frac{f_{10}^*}{g_{10}^*}, \quad y = \frac{h_{10}^*}{g_{10}^*}.$$

A z_1 és z_2 változókra vonatkozó szimmetriából következik, hogy a (z_1, z_0) és (z_2, z_0) pontmező egybeesik.

A z_3 skála az x -tengelyen helyezkedik el:

$$(10b) \quad x = \frac{f_3}{g_3}, \quad y = 0.$$

Nyilvánvalóan az a kikötés, hogy (9) determináns 3. sora z_0 -tól független legyen, nem határozza meg egyértelműen a (6) determináns oszlopaira alkalmazható lineáris transzformációt. Következésképp lehetséges a nomogramm olyan egész általános transzformációja, amely csak az egyes $z_0 = \text{áll.}$ görbékre nézve projektív. Bontsuk fel ugyanis a (10) egyenletekkel megadott nomogramot olyan résznomogrammokra, melyek mindegyike a (közös) z_3 -skálából és egy-egy z_0 -értékhez tartozó (z_1, z_2) (görbe) skálából áll. Alkalmazzunk a résznomogrammokra olyan — egymástól független — projektív transzformációkat, melyek a z_3 egyenes skálát változtatlanul hagyják, és utána újból egyéssítsük a kapott résznomogrammokat. Nyilvánvaló, hogy ez az átalakítás a nomogrammot nem rontja el.

Ez a (9) kapcsolatnak következő átalakításával egyenértékű:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} f_{10}^* + p_0 h_{10}^* & g_{10}^* + q_0 h_{10}^* & r_0 h_{10}^* \\ f_{20}^* + p_0 h_{20}^* & g_{20}^* + q_0 h_{20}^* & r_0 h_{20}^* \\ f_3 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

p_0, q_0 és r_0 a z_0 változó tetszőszerinti függvényei. A skálák egyenletei a következők lehetnek:

A (z_1, z_0) [együttal (z_2, z_0)] pontmezőé

$$(12a) \quad x' = \frac{f_{10}^* + p_0 h_{10}^*}{g_{10}^* + q_0 h_{10}^*} = \frac{x + p_0 y}{1 + q_0 y}, \quad y' = \frac{r_0 h_{10}^*}{g_{10}^* + q_0 h_{10}^*} = \frac{r_0 y}{1 + q_0 y},$$

a z_3 -skáláé

$$(12b) \quad x' = \frac{f_3}{g_3} = x, \quad y' = 0.$$

A p_0, q_0, r_0 függvények szabad választása miatt ez a transzformáció a nomogramm igen általános átalakítását teszi lehetővé. Így az alábbi 1. példában a (z_1, z_0) pontmező a síkot eredetileg kétrétűen fedi. A transzformációval elérhető a sík egyrétű lefedése.

Transzformációnk a z_3 -skálát változatlanul hagyja. Természetesen a (12) egyenletek alapján eredményül kapott nomogramm a sík projektív transzformációjával is átalakítható, s ezúton a z_3 -skála is változtatható.

Megjegyzés: (9) az

$$\frac{f_{10}^*}{h_{10}^*} = \Phi_{10}, \quad \frac{f_{20}^*}{h_{20}^*} = \Phi_{20},$$

$$\frac{g_{10}^*}{h_{10}^*} = \Psi_{10}, \quad \frac{g_{20}^*}{h_{20}^*} = \Psi_{20},$$

$$\frac{f_3}{g_3} = \chi_3$$

jelölésekkel a

$$(13) \quad \chi_3 = \frac{\Phi_{10} - \Phi_{20}}{\Psi_{10} - \Psi_{20}}$$

alakra hozható, mely a Soreau-féle, ötödrendű függvénykapcsolat egy általánosítása.

Példák

A tárgyalt eljárás alkalmazását két gyakorlati példán mutatjuk be.

I. A Villamosipari Központi Kutató Laboratórium (VKKL) a higanygőz-egyenirányítók kapcsolatos kísérleti munkája során felmerült következő probléma megoldására kérte fel Intézetünket:

Rácsvezérlésű egyenirányítóról táplált áramkörben folyó áram pillanatértéke az anódfeszültségtől, az áramkörben lévő ellenelektromotoros erőttől (pl. e. á. motor), az áramkör impedanciájától, a fázisok számától és az egyenirányító gyújtási szögétől függ. Az áram pillanatértékét pulzáló áram esetén

$$t = \frac{1}{\omega} \xi \text{ időben } (0 \leq \xi \leq 2\pi)$$

$$(14) \quad i(\xi, \xi_f, \varphi, a) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} E}{R} \left\{ \cos \varphi \sin(\xi - \varphi) - a + [a - \cos \varphi \sin(\xi_f - \varphi)] e^{-\frac{\xi - \xi_f}{\lg \varphi}} \right\}$$

egyenlet szolgáltatja [3], ahol

ω a körfrekvencia,

E az anódfeszültség eff. értéke,

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} \text{ a fázisszög } \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$\omega L, R$ az áramkör induktív, ill. ohmos ellenállása,

ξ_f a gyújtási szög ($0 \leq \xi_f \leq \xi$),

$$a = \frac{E_g + E_0}{\sqrt{2} E} \quad (0 \leq a \leq 1), \text{ ahol}$$

E_g az egyenáramú körbe kapcsolt ellenelektromotoros erő,

E_0 az ívfeszültség.

Nomogramm készítendő a ξ_s kialvási szög leolvasására.

Ha $\xi = \xi_s$, akkor az áramerősség pillanatértéke 0, tehát ξ_s meghatározására az

$$(15) \quad i(\xi_f, \xi_s, \varphi, a) = 0$$

egyenletet nyerjük.

A (15) egyenlet megoldására *Puchlowsky* [4] görbesereges nomogrammot közöl. Mivel azonban a (15) kapcsolat négyváltozós, következésképp a sereg egyes görbéinek jellemzéséhez két paraméter (φ és a) szükséges, az összefüggésnek a (kétdimenziós) síkon való ilyen ábrázolása nehézkes és áttekinthetetlen nomogrammot ad.

A kapcsolat szimmetriájának kihasználásával sikerült nekünk a (15) kapcsolatnak jól áttekinthető és kényelmesen használható pontmezős nomogrammal való ábrázolása.

Egyenletünket $\frac{\sqrt{2} E}{R}$ -rel való egyszerűsítés után $e^{\xi_s \cotg \varphi}$ -vel végigszorozva ugyanis az

$$(16) \quad a = \frac{\cos \varphi \sin(\xi_f - \varphi) e^{\xi_f \cotg \varphi} - \cos \varphi \sin(\xi_s - \varphi) e^{\xi_s \cotg \varphi}}{e^{\xi_f \cotg \varphi} - e^{\xi_s \cotg \varphi}}$$

kapcsolathoz jutunk. Ez (13) alakú kapcsolat.

A jelölések összevetéséből

$$z_1 = \xi_f, z_2 = \xi_s, z_3 = a, z_0 = \varphi,$$

és $h_{10}^* = h_{20}^* = g_3 = 1$ -et véve:

$$\Phi_{10} = f_{10}^* = \cos \varphi \sin (\xi_f - \varphi) e^{\xi_f \cotg \varphi},$$

$$\Psi_{10} = g_{10}^* = e^{\xi_f \cotg \varphi},$$

$$\Phi_{20} = f_{20}^* = \cos \varphi \sin (\xi_s - \varphi) e^{\xi_s \cotg \varphi},$$

$$\Psi_{20} = g_{20}^* = e^{\xi_s \cotg \varphi}.$$

A (9) determináns matrixának ezen felvételével nyerhető nomogrammalak skálaegyenletei (10) szerint a következők:

A ξ_f (illetőleg ξ_s) és φ változók skáláit tartalmazó pontmező:

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin (\xi - \varphi), \\ y &= e^{-\xi \cotg \varphi}, \end{aligned}$$

a skála:

$$x = a, y = 0.$$

(V. ö. 2. ábra.)

Sajnos azonban a (17) egyenletek alapján ξ és φ az x, y számpárnak nem egyértékű függvénye, tehát a sík (x, y) pontjához általában nem egy (ξ, φ) értékpár tartozik. A (ξ, φ) pontmező tehát nem egyrétűen borítja az (x, y) síkot. Így pl. $\xi = 0$ esetében

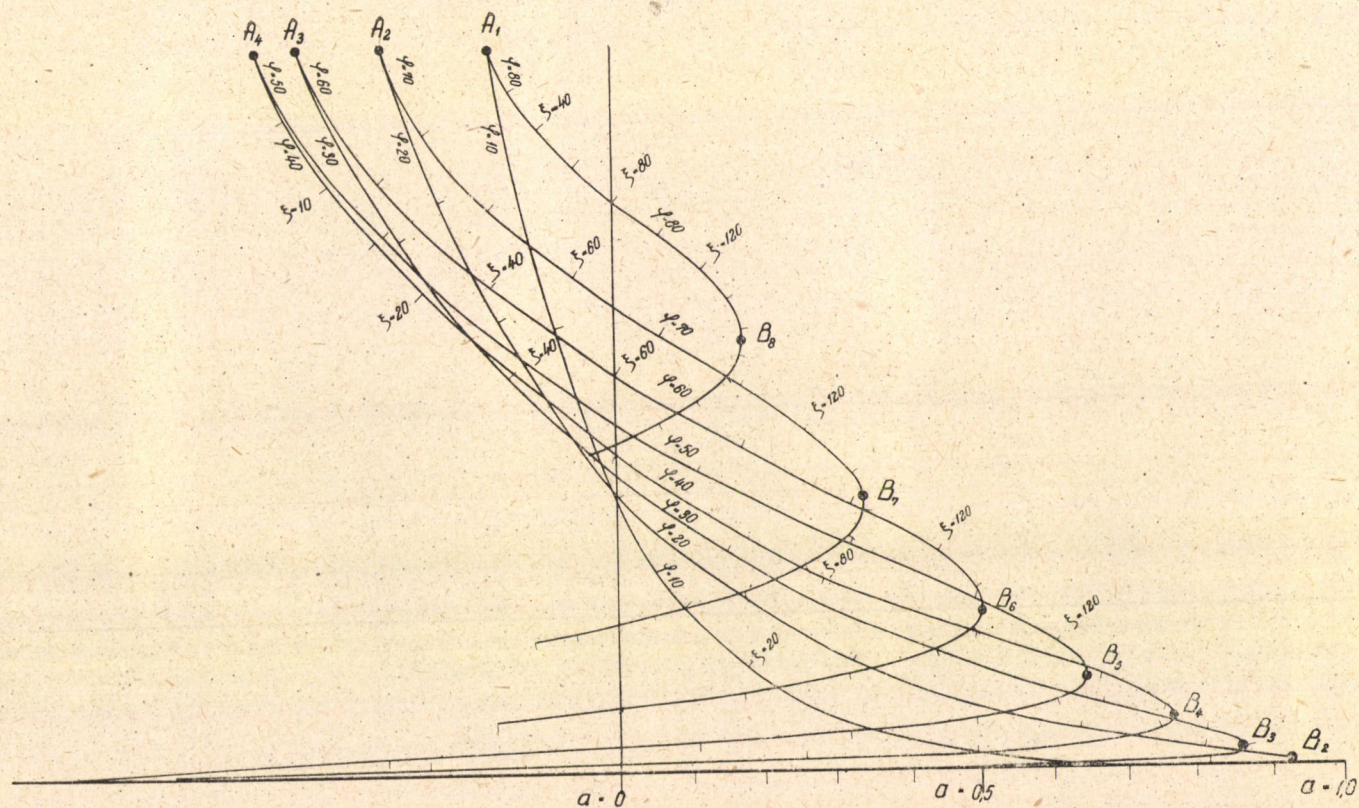
$$x = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad y = 1.$$

Ennélfogva az $y = 1$ egyenes minden $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ pontjához két (ξ, φ) értékpár tartozik. A $\xi =$ állandó görbék metszése teljesen áttekinthetlenné tenné a nomogrammot. Ennek elkerülésére vessük alá a nomogrammmunkat olyan transzformációnak, amely az egyes $\xi =$ állandó görbékre projektív, de az egész síkra nézve nem. Alkalmazzunk tehát a nomogrammról valamilyen a (12a) és (12b) egyenletek szerinti transzformációt. Az együtthatók meghatározására három feltételt írhatunk elő. A (ξ, φ) pontmező egyrétűségének és a nomogramm kedvező alakjának biztosítására a következő kikötéseket tettük (l. 2. ábra):

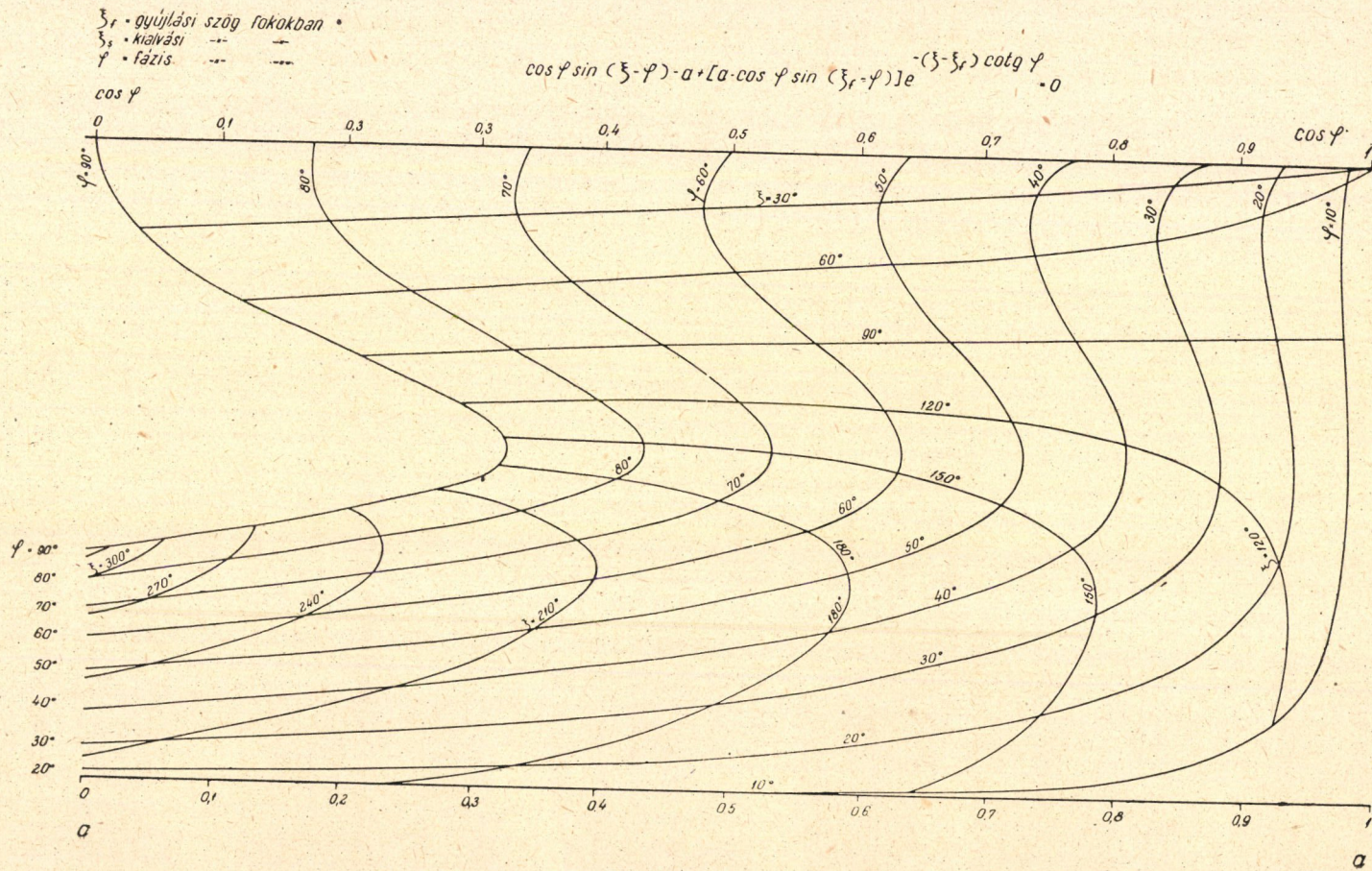
1. A $\varphi =$ áll. görbék A_1, A_2, A_3, \dots végpontjainak koordinátái a transzformáció után legyenek

$$x' = \cos \varphi, y' = 1.$$

2. Az eredeti $\varphi =$ állandó görbék B_1, B_2, B_3, \dots pontjai, melyekhez tartozó x -érték az egyes görbékre nézve maximális, transzformáltassanak az



2. ábra



3. ábra

$y' = \frac{1}{2}$ egyenes pontjaiba. (Itt tehát a képpontoknak csak az ordinátáit írjuk elő.) Az így kapott egyenletrendszerből rövid számolással adódnak a következő együtthatók:

$$\begin{aligned}p_0 &= \cos \varphi (e^\alpha - 1 + \sin \varphi), \\q_0 &= e^\alpha - 2, \\r_0 &= e^\alpha - 1,\end{aligned}$$

ahol

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Ezen együtthatók által meghatározott transzformációval sikerült elérni, hogy a nomogramm az egységnyi oldalú négyzet belsejébe essék és azt jól kitöltse, továbbá, hogy a $\varphi =$ állandó görbék ne messék egymást.

Az így kapott nomogramm affin transzformációval megfelelő méretre hozható. (l. 3. ábra.)

II. A Beloianniszy-gyár átviteltechnikai osztálya kristálysűrűk számításánál az egyik alkalmazott kapacitás méretezésére a következő összefüggést nyerte:

$$\begin{aligned}C_1 &= \\&= C_N \frac{1 + \beta^{-2} \left[\beta \left(\sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} + \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right) + \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right]}{1 + \beta^{-2} \left[\beta^3 \left(\sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} + \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right) + \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}} \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}} \right]},\end{aligned}$$

ahol C_1 a méretezendő kapacitás,

$$C_N = \frac{10^9}{L_N \omega_0^2}, \quad \text{itt}$$

L_N a szűrőhöz tartozó tekercs önindukciója mHy-ban,

ω_0 a sávközép körfrekvenciája, $10^3 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ -ban;

β^2 a sávszűrő felső és alsó frekvenciahatárának viszonya,

Ω_1 és Ω_2 pólusfrekvenciák.

Tekintsük $\frac{C_I}{C_N}$ -et változónak és redukáljuk 0-ra a függvénykapcsolatot:

$$(18) \quad \Gamma_1 \Gamma_2 \left(\frac{C_I}{C_N} - 1 \right) \beta^3 + (\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{C_I}{C_N} - \beta^4 \right) + \left(\frac{C_I}{C_N} - 1 \right) \beta^5 = 0,$$

ahol

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(\Omega_1, \beta) = \sqrt{\frac{\Omega_1^2 \beta^2 - 1}{\Omega_1^2 - \beta^2}}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_2(\Omega_2, \beta) = \sqrt{\frac{\Omega_2^2 \beta^2 - 1}{\Omega_2^2 - \beta^2}}.$$

(18) egyenletünk

$$(19) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\Gamma_1 & \Gamma_1^2 \\ 1 & -\Gamma_2 & \Gamma_2^2 \\ \left(\frac{C_I}{C_N} - 1\right) \beta^3 & \frac{C_I}{C_N} - \beta^4 & \left(\frac{C_I}{C_N} - 1\right) \beta^5 \end{vmatrix} = 0$$

alakra hozható.

A determináns oszlopait jelöljük rendre az I, II, III szimbolumokkal és $-\beta$ -nak a determináns harmadik sorából való kiküszöbölése céljából — hajtsuk végre a determináns matrixán az

$$\begin{aligned} I^* &= \beta I - II, \\ II^* &= \beta^{-3} I - II; \\ III^* &= -\beta^2 I + III \end{aligned}$$

szimbolikus egyenletekkel meghatározott transzformációt. A 3. sornak $(\beta^4 - 1)$ -gyel való elosztása után ($\beta \neq 1$) a (19) egyenlet a következőképpen írható:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \Gamma_1 + \beta & \Gamma_1 + \beta^{-3} & \Gamma_1^2 - \beta^2 \\ \Gamma_2 + \beta & \Gamma_2 + \beta^{-3} & \Gamma_2^2 - \beta^2 \\ \frac{C_I}{C_N} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A nomogrammskálákat megadó egyenletek a (20) egyenletben szereplő determináns matrixából leolvashatók.

1. A (β, Ω_i) pontmezőt jellemző egyenletek:

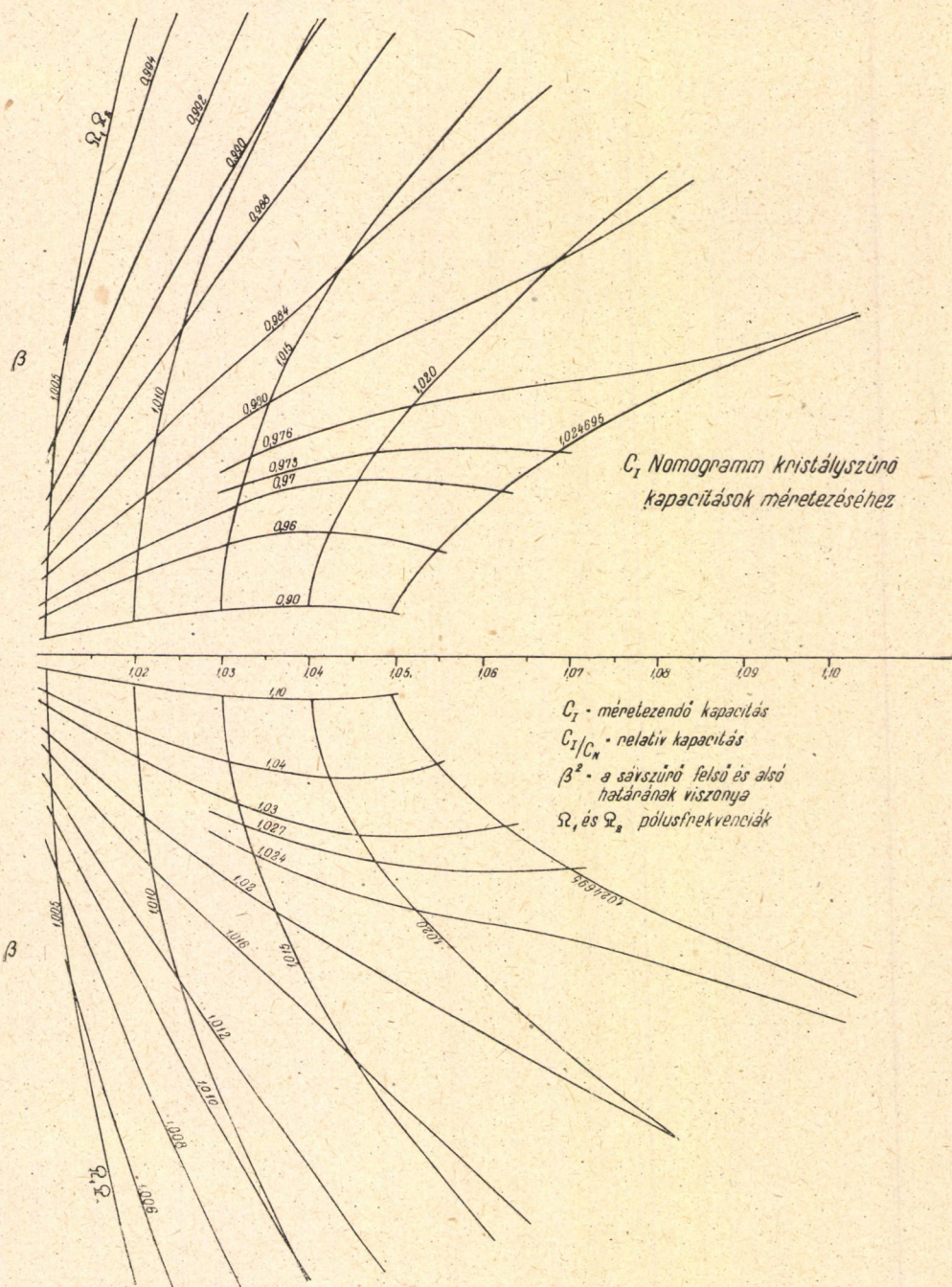
$$x = \frac{\Gamma_i + \beta}{\Gamma_i + \beta^{-3}}, \quad y = \frac{\Gamma_i^2 - \beta^2}{\Gamma_i + \beta^{-3}}, \quad (i = 1, 2).$$

2. A $\frac{C_I}{C_N}$ skála:

$$x = \frac{C_I}{C_N}, \quad y = 0.$$

Alkalmazzuk a (12) transzformációt. Az egyenletekkel meghatározott nomogramm további átalakítására a megelőző példában alkalmazott módszerhez hasonlóan jól használható és tetszetős nomogrammváltozat elérésére megfelelő kikötéseket tettünk. Ezek kielégítésére a (12a) transzformációs formulák együttthatóit a következőképp választottuk:

$$\rho_0 = \frac{1}{2\beta}, \quad q_0 = \frac{1}{2\beta^5}, \quad r_0 = \beta^2.$$



4. ábra

Еzzel elértük, hogy

1. a nomogramm jól kitölt egy téglalapalakú tartományt, és
2. a $\beta = \text{állandó}$ görbeívek végpontjai szimmetrikus helyzetűek a $\frac{C_1}{C_n}$ -skálára.

Ez a szimmetria azért előnyös, mert — mérlegelve a gyakorlatból adódó (β, Ω) értékpárok megoszlását — a (β, Ω) pontmezőnek az eredményskála két oldalán szereplő részei egyenlő gyakorlati súllyal bírnak, másrészt az egyes $\beta = \text{állandó}$ görbéknek az eredményskálára vonatkozó szimmetriája a leolvasásnál az éles metszések számát csökkenti.

A nomogrammnak a (10) és (12) egyenletek szerinti transzformációval adódó változata látható a 4. ábrán.

IRODALOM

- [1] R. Soreau: Nomographie ou traité des abaques. Paris 1921. II. köt. 121. nomogramm.
- [2] М. В. Пентковский: Номография, Гостехиздат, 1949. (M. V. Pentkovszkij: Nomográfia) Moszkva, Leningrád, 1949. 2. ábra.
- [3] »Elektrotechnika«, 1952. 7. sz. Rácsvezérlésű egyenirányítókkal táplált egyenáramú motor üzemi viszonyai. (7) összefüggés.
- [4] K. P. Puchlowski: Voltage and Current Relations... (Transactions of the AIEE Vol. 64. 225—260 o.)

ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С БИНАРНЫМИ ПОЛЯМИ

Пал Ш. и Тот К.

Резюме

В общей части работы описывается номографическое представление функциональных зависимостей типа

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0.$$

Эта зависимость имеет 5 переменных, и она симметрична b z_1 и z_2 . Элементы 3-ог строка определителя — линейные комбинации функций f_{34} , g_{34} , h_{34} , зависящих от z_3 и z_4 . Коэффициенты этих комбинаций зависят от z_0 . В качестве отдельного случая упомянутой зависимости получается более общая зависимость типа $F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0$.

Она построена аналогично функциональной зависимости Кларка и может быть представлена номограммой, в которой общим держателем шкал переменных z_1 и z_2 является совокупность кривых, определяющих точечные поля (z_1, z_0) и (z_2, z_0) . Переменные z_3 и z_4 представляются точечным полем (z_3, z_4) .

Дальше в работе исследуются симметричные b z_1 и z_2 , функциональные зависимости типа

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0.$$

Она имеет 4 переменных. F_{30}, G_{30}, H_{30} — линейная комбинация функций f_3 и g_3 переменной z_3 ; коэффициенты комбинации зависят от z_0 .

В случае последней зависимости номограмма допускает некоторое очень общее преобразование, которое не является проективным (т. е. оно проективно только для отдельных кривых $z_0 = \text{const}$).

В качестве применения преобразования работа представит два примера из практики Института.

BEISPIELE FÜR DIE NOMOGRAPHISCHE DARSTELLUNG SYMMETRISCHER FUNKTIONELLER ZUSAMMENHÄNGE MITTELS BINÄREN LEITERTAFELN

S. PÁL UND K. TÓTH

Zusammenfassung

Im allgemeinen Teil des Aufsatzes wird die nomographische Behandlung der in den Veränderlichen z_1 und z_2 symmetrischen funktionellen Zusammenhänge mit fünf Veränderlichen von der Gestalt

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{340} & G_{340} & H_{340} \end{vmatrix} = 0$$

gegeben. Die Elemente der dritten Zeile der Determinante sind Linearkombinationen der von z_3 und z_4 abhängigen Funktionen f_{34}, g_{34}, h_{34} . Die Koeffizienten der Linearkombinationen hängen von z_0 ab. Als Spezialfall ergibt sich hieraus ein dem Clark'schen ähnlicher allgemeinerer Zusammenhang:

$$F_{340} f_{10} f_{20} + G_{340} (f_{10} + f_{20}) + H_{340} = 0.$$

Dieser lässt sich durch ein Nomogramm darstellen, in welchem der gemeinsame Skalenträger der Veränderlichen z_1 und z_2 die eine der, das Binärfeld (z_1, z_0) , bzw. (z_1, z_2) definierenden, beiden Kurvenscharen ist. Die Veränderlichen z_3 und z_4 werden durch das Binärfeld (z_3, z_4) dargestellt.

Weiter werden symmetrische funktionelle Zusammenhänge mit vier Veränderlichen von der Gestalt

$$\begin{vmatrix} f_{10} & g_{10} & h_{10} \\ f_{20} & g_{20} & h_{20} \\ F_{30} & G_{30} & H_{30} \end{vmatrix} = 0$$

behandelt, die in den Veränderlichen z_1 und z_2 symmetrisch sind. Die Funktionen F_{30}, G_{30}, H_{30} sind lineare Kombinationen der Funktionen f_3 und g_3 von z_3 , deren Koeffizienten von z_0 abhängen.

Im letzteren Falle gestattet das Nomogramm sehr allgemeine nicht-projektive (bzw. nur für die einzelnen Kurven $z_0 = \text{Konst.}$ projektive) Transformationen.

Für die Anwendung der Transformation werden zwei Beispiele aus der Praxis des Instituts angeführt.

NOMOGRAMMOK AZ ÁLTALÁNOS HÁROMSZÖG MEGOLDÁSÁHOZ

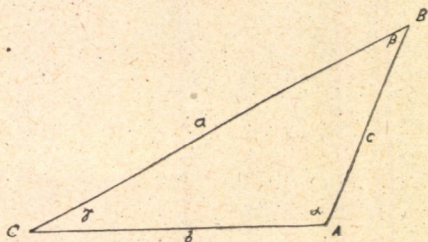
ACZÉL JÁNOS, BÉDA GYULA, GÁTI JÓZSEF és TÖRÖK SÁNDOR

Összefoglalás

Az ábrákon látható használati utasítású összetett, illetve pontmezős, mozgó alkatrészes nomogrammok az általános háromszög ismeretlen adatainak meghatározására szolgálnak, ha adva van egy oldal és két szög vagy két oldal és egy szög. (A II. és egyszerűbben a III. nomogrammról ezen adateknál is, továbbá a három oldal megadása esetén is valamennyi többi alkotórész nagysága egyidejűleg leolvasható.)

Bevezetés

Az Alkalmazott Matematikai Intézet Numerikus és grafikus módszerek osztályának debreceni csoportja egy megbízással kapcsolatban olyan nomogramokat készített, amelyek néhol máshol is hasznosak lehetnek az álta-



1. ábra

lános háromszög teljes megoldására azokban az esetekben — és ezek a gyakorlatban legsűrűbben előforduló esetek, — amikor a háromszögből két oldal és egy szög, vagy egy oldal és két szög van megadva.

Az 1. ábrán feltüntetett jelölésű háromszöget tekintjük. A

$$(1) \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$$

és az

$$(2) \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

összefüggések nomogrammjait készítettük el.

E két összefüggésre összesen húsz nomogrammot terveztünk meg, mivel azonban ezek közül voltak teljesen szokványosak, illetve olyanok is,

melyek egymástól csak lényegtelen módosításokban különböztek, itt csak azt a nyolc nomogrammfajtát ismertetjük, amelyek bizonyos elvi érdekességet is mutatnak. Ezen összefüggésekre az irodalomban is több nomogrammfajta található (pl. [1], [2], [3]), ezek közül azonban több csak elég szűk határok közt alkalmazható, mások pedig bonyolultabb rajzolási munkát igényelnek, míg mi tág határok közt tűrhető részletességgel használható, továbbá sokszorosításra és helyi előállításra is alkalmas egyszerű rajzú nomogrammokra törekedtünk. Nomogrammaink pontossága szűkebb határok esetén vetítés-sel természetesen lényegesen fokozható.

Az (1) kapcsolat ábrázolásánál rendszerint két esetet kell megkülönböztetni a szerint, hogy α hegyesszög-e vagy tompa. Ezekre külön nomogrammot célszerű készíteni. — Előfordul, hogy a háromszög teljes megoldása egy nomogrammal elvégezhető. Így pl. ha a , c és α vannak adva, akkor ebből a (2) összefüggés alapján γ kiszámítható, $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ kiszámítása után pedig ugyanazon nomogramm az a , a változó skáláját megtartva, de

a c változó helyére a b változót,

a γ « « « $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$

változót véve nomogrammot kapunk b kiszámítására is. — Hasonlóan, ha az (1) összefüggésben α hegyesszög és pl. c , b , α vannak adva, akkor a nomogrammból γ meghatározható, $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$ kiszámítható, majd ugyanebből a nomogrammból a b skálát megtartva, de α -t γ -val és γ -t α -val c -t pedig a -val helyettesítve a értékét is megkapjuk.

Nomogrammaink többnyire úgy készültek, hogy

α értéke 1° -tól 90° -ig, illetve 90° -tól 180° -ig terjedhet 1° — $1,5^\circ$ -onkénti kótával,

γ értéke 1° -tól 90° -ig 2° — 3° -onkénti kótával,

a értéke 100 m-től 5000 m-ig 100 m—250 m-kénti (ritkuló) kótákkal,

b « 100 « 4000 « 50 m—200 « « «

c « 20 « 1000 « 20 m—50 « « «

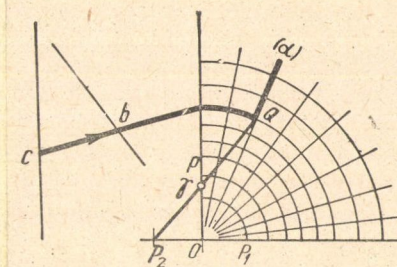
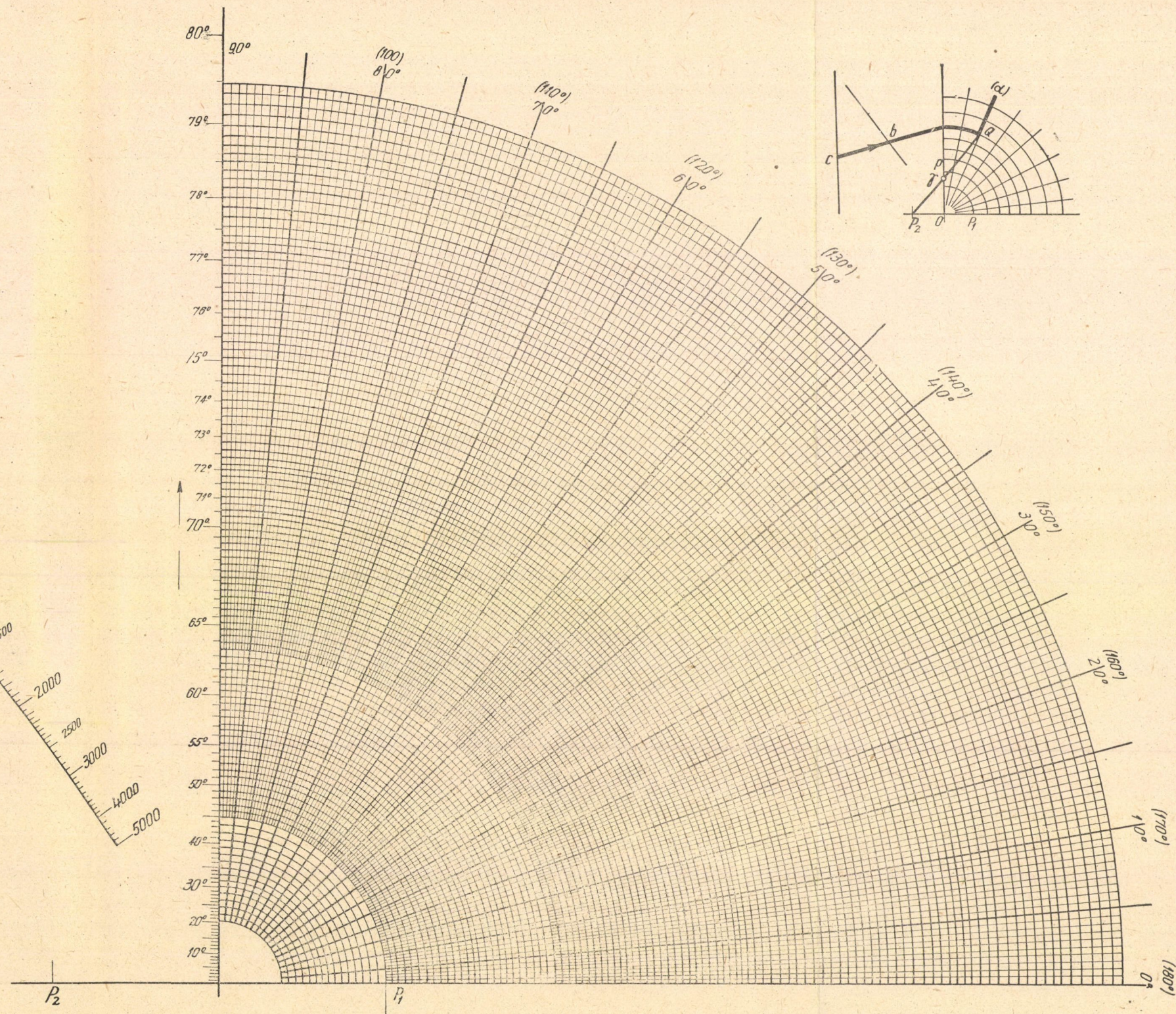
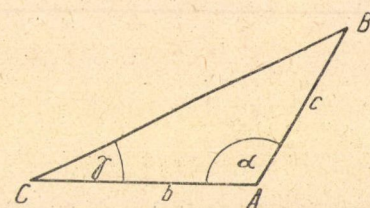
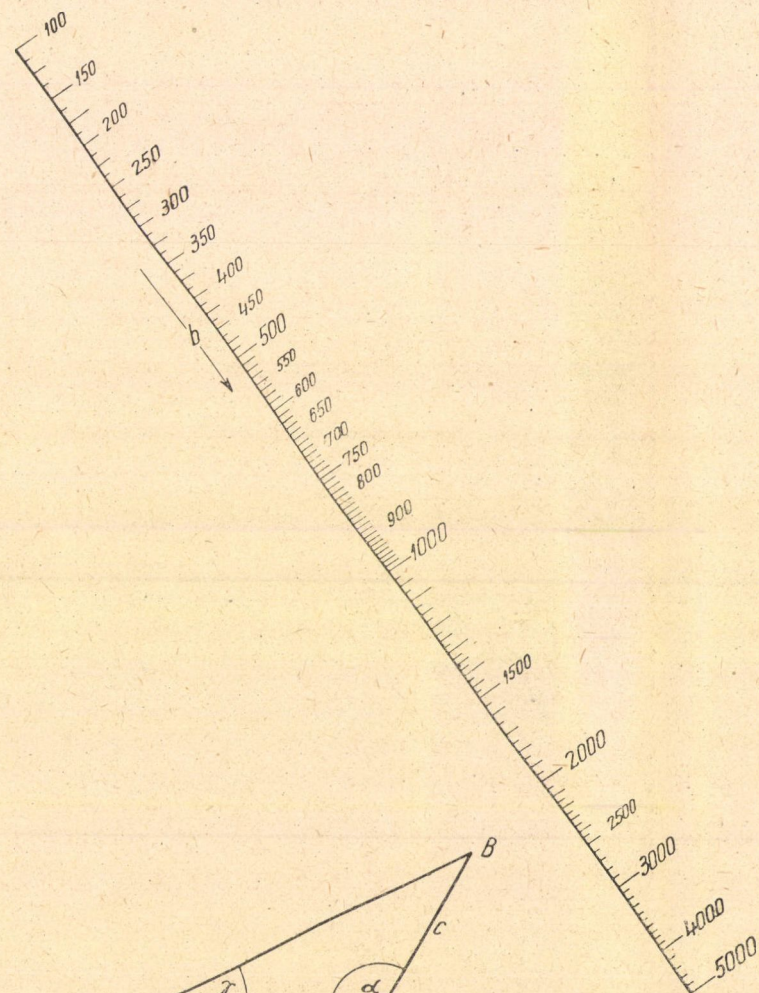
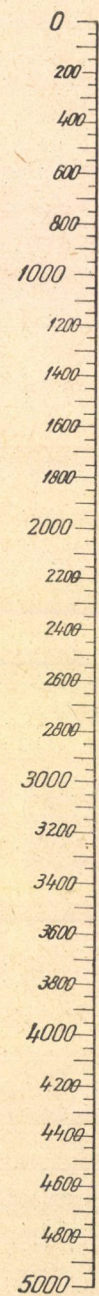
Az (1) összefüggésre egy pontsoros, egy egyenessereges, három polárkoordináta-hálós és egy pontmezős nomogrammfajtát mutatunk be, a (2) összefüggésre pedig egy logaritmikus egyenessereges és egy mozgóskálás nomogrammot. Bemutatunk továbbá hasonló egyenessereges és mozgóskálás nomogrammat, melyek (1) helyett a

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

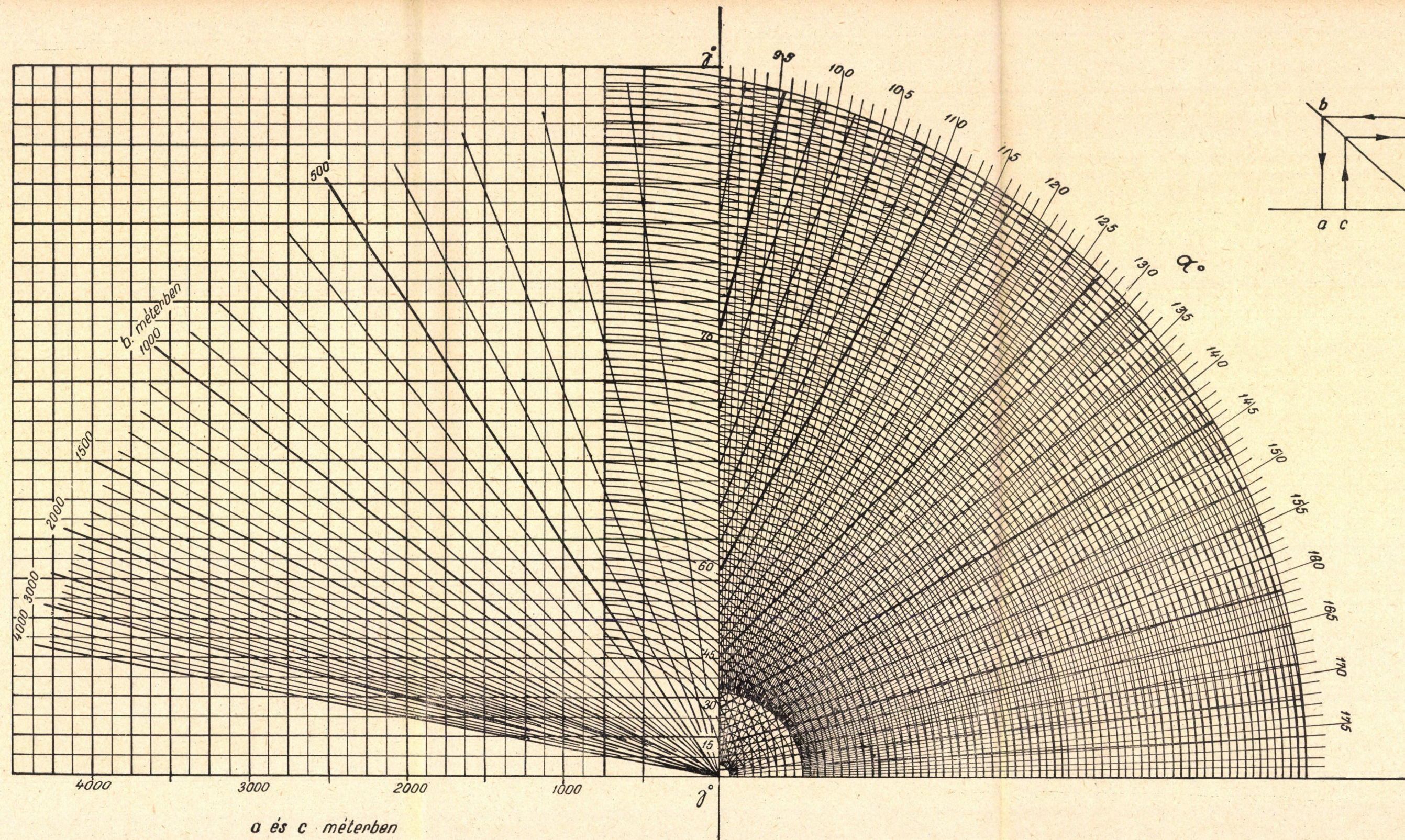
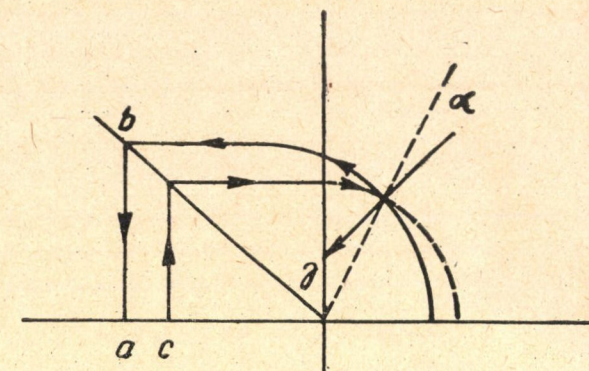
összefüggésen alapszanak.

Nomogrammaink közül néhány más adathármasok esetén is használható, pl. a III. nomogramm mind a négy lehetséges adathármasnál teljes megoldást ad. Több nomogrammmunk (I, II, V, VI), mely külön részeket (osztó-nomogrammat) tartalmaz a $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$ stb. osztások elvégzésére, természetesen

egyszerűsödik, ha ezen osztásokat előre (pl. logarléccel) elvégzettnek tételezhetjük fel. Mindegyik nomogrammnál utalunk annak alapelvére, szerkesztésére, használatára, előnyeire és hátrányaira.

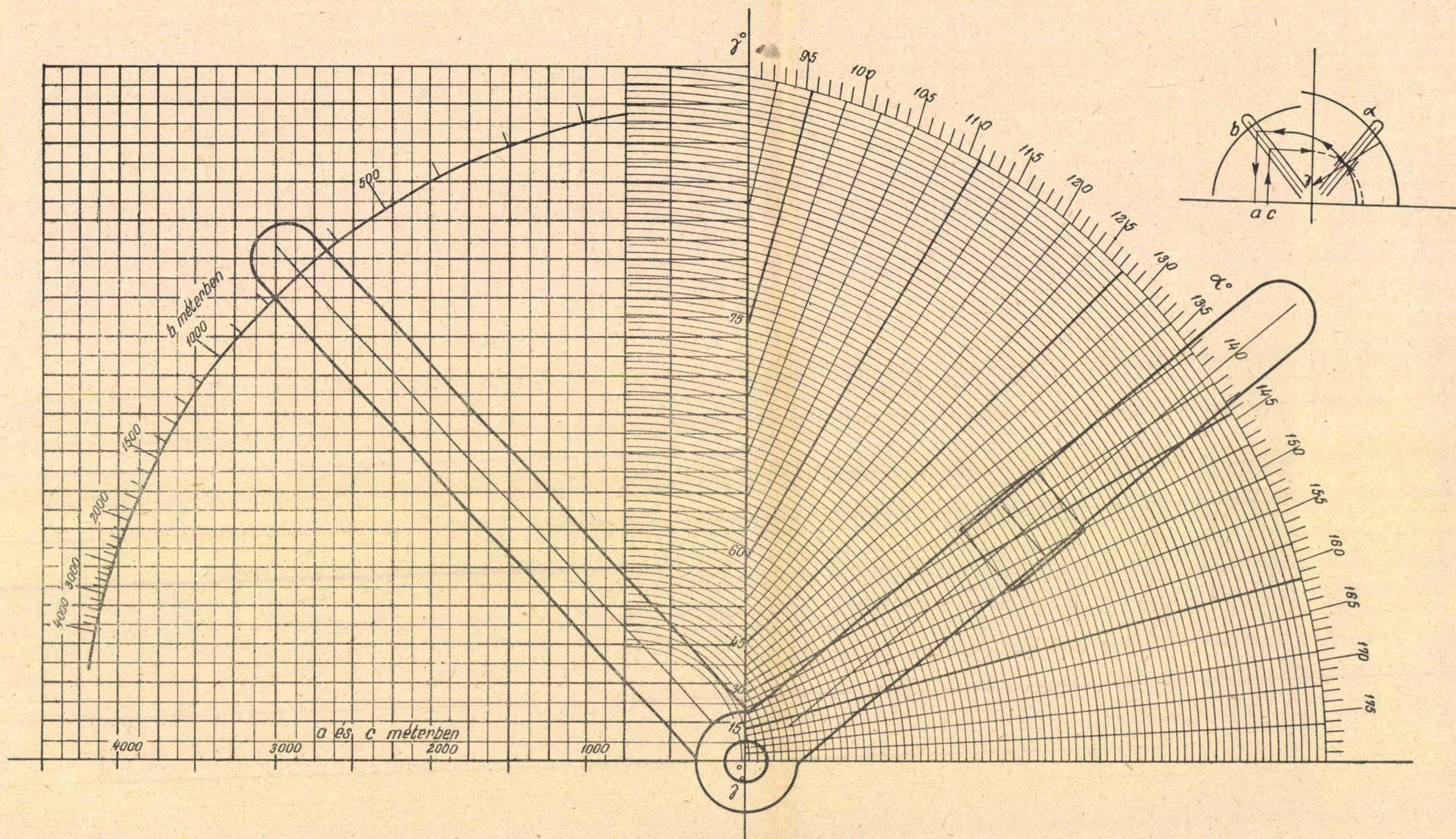


I. nomogramm

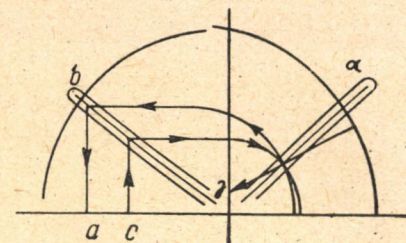
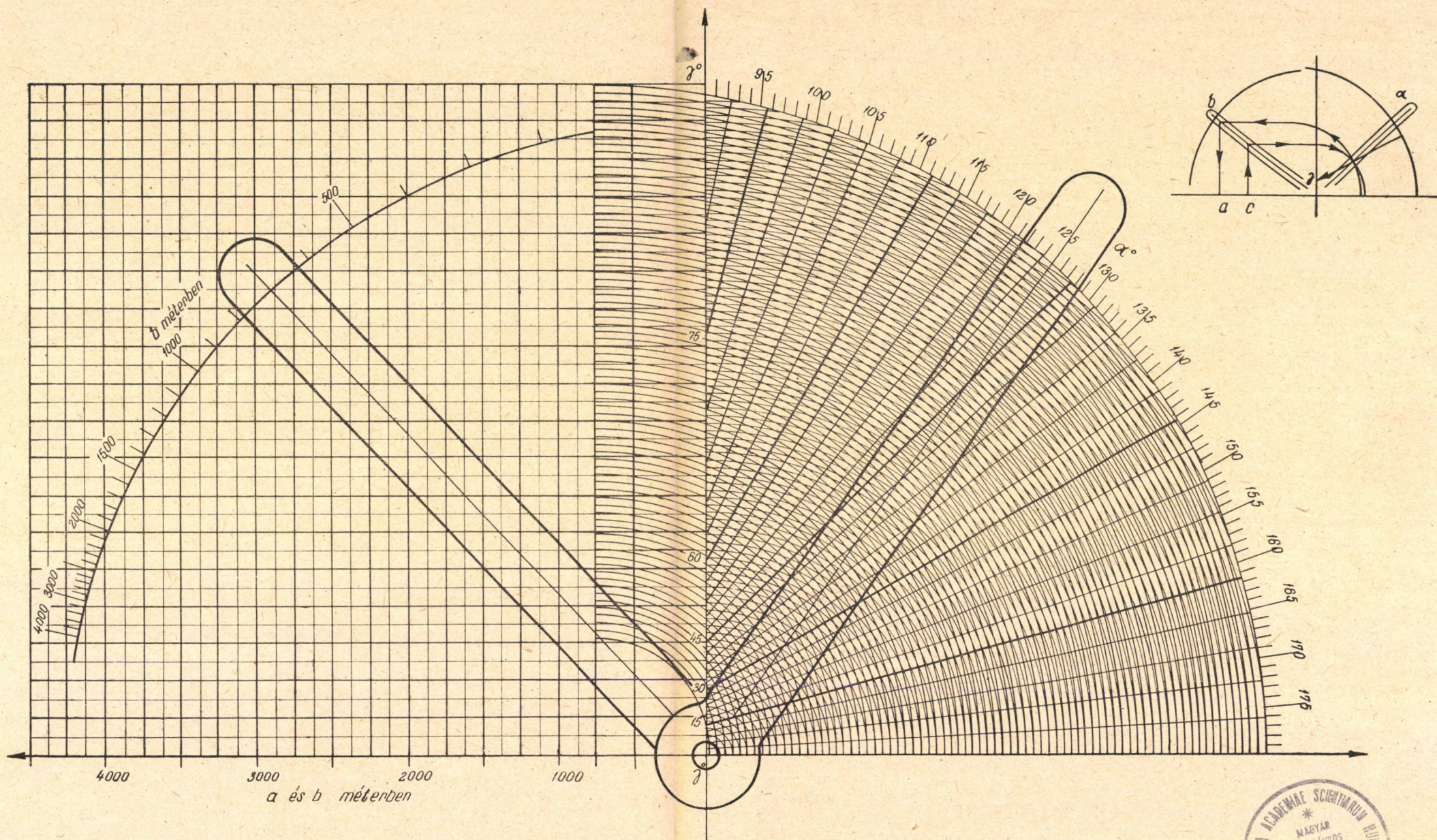


II/a. nomogramm





II/b. nomogramm



II/c. nomogramm



Az 1. § *Aczél János*, a 2. § *Béda Gyula*, a 3. § *Gáti József*, a 4. § *Török Sándor* munkája, azonban ezen belül több kölcsönös megjegyzés, megbeszélés alapján alakult ki a cikk mostani alakja. Az I, II, IV, V, VI. nomogrammok *Gáti József*, a III, VII, VIII. számúakat *Török Sándor* rajzolta.

1. § Polár-nomogrammok

Ezen cím alatt néhány olyan nomogrammot mutatunk be, melyekben polárkoordináta-hálózat szerepel és egyaránt tekinthetők görbesereges, ill. elfajult pontmezős nomogrammoknak.

A

$$(1) \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$$

összefüggést ilyen alakban írjuk fel:

$$\frac{\frac{c}{b} \cos \alpha}{1} + \frac{\frac{c}{b} \sin \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} = 1,$$

ami azt mutatja, hogy a $\frac{c}{b}$ sugarú kör és a vízszinteshez α szög alatt hajló sugár metszéspontja egy olyan egyenesen fekszik, mely a tengelyeket a $P_1(1, 0)$ és a $P(0, \operatorname{tg} \gamma)$ pontokban metszi.

Hogy tompa α -szögekre ne kelljen a második körnegyedet is igénybevenni, ezeknél a kapott egyenletet így módosítjuk:

$$\frac{\frac{c}{b} \cos(180^\circ - \alpha)}{-1} + \frac{\frac{c}{b} \sin(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg} \gamma} = 1$$

tehát itt a $\frac{c}{b}$ sugarú körnek a $(180^\circ - \alpha)$ hajlású sugárral való metszéspontja egy olyan egyenesen fekszik, mely a $P_2(-1, 0)$ és a $P(0, \operatorname{tg} \gamma)$ pontokban metszi a tengelyeket.

Ennek megfelelően az összefüggés olyan nomogrammal ábrázolható, amely az első negyedben koncentrikus, $\frac{c}{b}$ sugarú körökből és a középpontból kiinduló α , ill. $180^\circ - \alpha$ szög alatt hajló sugarakból áll. A függőleges tengelyen a γ szög tangensskálája van, a vízszintesen pedig meg van jelölve a $P_1(1, 0)$ és a $P_2(-1, 0)$ pont. A $\frac{c}{b}$ sugarú körön az α egyeneshez tartozó pontnak a P_1 , illetve P_2 pólusokkal való összekötése (a szerint, hogy α hegyes, ill. tompaszög) kimetszi a függőleges tengelyből a keresett γ szöget. Ez tekinthető olyan nomogrammnak, mely egy ú. n. pontmezőt, egy skálát és egy ponttá elfajult (P_1 , ill. P_2) skálát tartalmaz.

Ha ehhez egy pontsoros Z osztó nomogrammot csatolunk a $\frac{c}{b}$ osztás elvégzésére, akkor kapjuk az I. nomogrammot.

Ennek előnye viszonylag egyszerű szerkezete és igen széles alkalmazási határai.

Hátránya a két egyenes-átfejtetés okozta nehézségen kívül, hogy az adatok bizonyos értékeinél (ahol $\frac{c}{b}$ kicsiny) a nomogramm összezsúfolódik, továbbá, hogy ennek igen kicsiny értékeinél, a középpont közelében az $\alpha = \text{konstans}$ sugarak már be sem rajzolhatók.

Amennyiben α -nak csak egy szögnegyede, például csak tompaszögű értékei szerepelnek (a következőkben csak ezzel fogunk foglalkozni), úgy az utóbbi hibán úgy lehet segíteni, hogy az $\alpha = \text{konstans}$ egyeneseket nem rajzoljuk be, hanem egyenesátfejtéssel helyettesítjük, helyettük a $\gamma = \text{konstans}$ egyeneseket rajzoljuk be, melyeknek P_2 középpontja és így sűrűsödése is kívül fekszik a berajzolt első körnegyeden.

Megtehetjük azt is, hogy mindkét egyenessereget az ábrán hagyjuk, akkor — ha még a $\frac{c}{b}$ osztónomogrammot is egyenessereggel oldjuk meg — kapcsolt görbesereges nomogrammot kapunk. Ennek leolvasása egyszerűbb, viszont rajza lényegesen bonyolultabb, zsúfoltabb, ami tévesztési lehetőségeket ad.

Mielőtt tovább próbálnánk tökéletesíteni nomogramunkat, egy új értelmezését adjuk, mely egy kis kiegészítéssel mindjárt arra is alkalmassá teszi, hogy γ -n kívül α -t is meghatározzuk vele, vagyis egy nomogrammasználattal a teljes háromszögmeghatározás lehetővé válik.

Ha megfigyeljük nomogramunk leolvasását, látjuk, hogy az abban szereplő $OQ P_2$ háromszög éppen az eredeti ABC háromszög $1:b$ arányban kicsinyített képe, hiszen $P_2O = 1$, $P_2OQ \sphericalangle = \alpha$ és $\text{tg } QP_2O \sphericalangle = \frac{PO}{P_2O} =$

$= \frac{\text{tg } \gamma}{1}$, tehát $QP_2O \sphericalangle = \gamma$. Így a $\gamma = \text{konstans}$ egyenesek hajlása a vízszinteshez is éppen a γ szög valódi nagyságával egyenlő, ami a γ -skála megalkotását és γ leolvasását megkönnyíti. Jelentősebb azonban, hogy ezen az alapon az α oldal maga is meghatározható, ha a P_2Q oldalt b -szeresére nagyítva valahol leolvassuk. Ezt úgy érhetjük el, hogy egy újabb P_2 középpontú körsort rajzolunk, amivel P_2Q függőlegessé állítható, majd a b -vel való szorzást ugyanazzal az egyenessereges nomogrammal végezzük el, amit az elején c -nek b -vel való osztásához szerkesztettünk. Így a lineáris α -skála a c -skálával egybeesik.

Az így kapott rajz a II/a. nomogrammot adja. Láthatjuk, hogy hátránya az, hogy rajza igen bonyolult, helyenként négy vonalsereg fekszik egymáson. Azonkívül a $b = \text{konstans}$ egyenesre a leolvasás elején is, végén is szükség van, így azt »meg kell jegyezni«.

Mindkét bajon segít, ha az $\alpha = \text{konstans}$ és a $b = \text{konstans}$ sugársort egy-egy 0-ból kiinduló mutatóval helyettesíthetjük. Ezt mutatja a II/b. nomogramm. Ha a két mutató tengelyét nem akarjuk egymásra helyezni, akkor az ábrát a függőleges tengely mentén vízszintes irányban kicsit »szét is húzhatjuk«, pl. P_2 -ig.

Az eddig említett nomogrammok vetítésre (projektív leképezésre) is alkalmasak az egyes részek részletesebbé, pontosabbá tétele, a lapos metszések kiküszöbölése stb. érdekében, — hiszen e leképezés sugársort sugársorba visz át, tehát vetítés után is dolgozhatunk mutatókkal.

Ha e vetítési lehetőségről lemondunk, akkor nomogramunkat tovább-egyszerűsíthetjük: az 0 középpontú köröket helyettesíthetjük az α -mutatón alkalmazott ablakkal. Ez »megjegyzik« a mutató kívánt pontját, amely a mutató forgatásánál 0 középpontú körivet ír le, így kapjuk a II/c. nomogrammot.

A II. nomogrammok leolvasása az előzőkből és a rajtuk levő leolvasási vázlatból világos. Példaképpen II/c. használatát ismertetem: Az α mutató alapállása függőleges. A b -mutatót beállítjuk a kívánt b -értékre, majd a vízszintes $a-c$ tengelyen c értékét felvéve a milliméterpapíron függőlegesen a b mutatóig haladunk, onnan vízszintesen az $0 - \gamma$ tengelyig. Az azon kapott pontra az α -mutató ablakát beállítjuk, majd e mutatót az adott α értékhez visszük. Az ablak által így megadott ponton átmenő berajzolt γ -egyenes γ értékét adja meg. Az ugyanezen ponton átmenő berajzolt körön a P_2 -n átmenő függőlegessig, majd tovább a milliméterpapíron vízszintesen a még az elején beállított b -mutatóig, végül onnan függőlegesen lefelé haladva az $a-c$ tengelyig, azon megkapjuk α értékét is.

Nomogramunk előnye mindkét keresett adat egyidejű meghatározásának lehetőségével és az egyszerűbb kezeléssel lényegesen megnőnek. Megemlíthető, hogy e II. nomogrammtípussal bármelyik adathármas megadása esetén megoldható a háromszög. Hátránya, hogy vagy bonyolult, sok egymásra rajzolt görbesereget tartalmaz a rajz, vagy mechanikai segédeszközöket igényel. Hátrány marad, hogy egyes értékeknél még mindig nehézkes és így hosszadalmas és pontatlan meghatározást ad.

A II. nomogrammnál mondtak azt a gondolatot sugallják, nem lehetne-e nomogramm segítségével az eredeti háromszöghöz nemcsak hasonló, de vele egybevágó (illetve csak a megfelelő állandó mértékszámokkal kicsinyített) háromszöget is előállítani egy nomogramm révén.

Ez a következő mozgólapos nomogrammal oldható meg (III. nomogramm).

Rajzolunk két polárkoordinátás hálót egy-egy átlátszó lapon (pausz-papíron, vagy celluloid-lapon): az egyiket a c , α , a másikat, mely fordított helyzetű, a b , γ , a mennyiségek részére.

Használata: pl. γ és a meghatározására az elsőn megkeressük a (c, α) pontot, a másik lapot úgy helyezzük rá, hogy a megegyező alapegyenes b jelű pontja épp az első lap 0_1 középpontját fedje; a (c, α) pont feletti (a, γ) pont egyenesének kótája γ -t, a hozzátartozó köré pedig a -t adja.

Látható, hogy az O_1PO_2 háromszög egybevágó az eredeti ABC háromszöggel. Nomogramunk a háromszög megadásának mindnégy adathármasa esetén teljes megoldást ad. — A két lap kezelése egy sín segítségével mechanizálható.

Ha csak a -ra van szükségünk, akkor használhatjuk az első (III/a). lapot egymagában is lineáris skálával ellátott leolvasó transzparenssal. Használatát a III/a.-nál feltüntetett vázlat mutatja.

E nomogrammok előnye az előzőkkel szemben egyszerűségük és a kezelés könnyedsége. Hátrányuk, hogy nem vetíthetők és kis c , illetve a értékek esetén itt sem férnek el a rajzon az α , illetve γ sugarak.

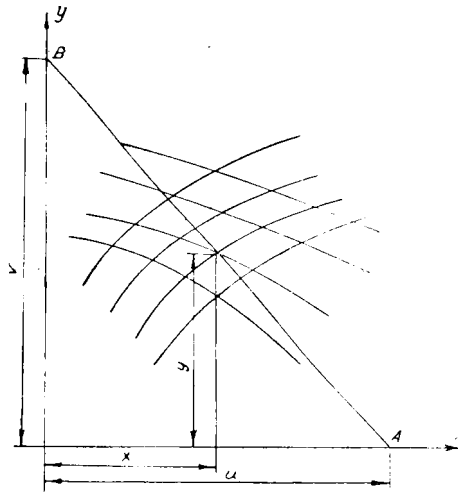
2. § Pontmezős nomogramm

A következőkben egy u. n. pontmezős nomogrammot mutatunk be, ahol a leolvasóegyenes két görbesereg megfelelő görbéinek metszéspontján és a másik két változó skáláinak megfelelő pontjain megy át (lásd a IV. nomogrammot). Ehhez az (1) összefüggést a

$$(3) \quad \frac{-\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} + \frac{\frac{b}{-\cos \alpha}}{-c} = 1$$

alakban írjuk fel.

A nomogramm megszerkesztéséhez a két görbesereget és a két egyenes-tartó skálafüggvényeit kell meghatározni. Azt akarjuk, hogy az összetartozó



2. ábra

értékek egy egyenesen legyenek (lásd a 2. ábrát). Ha az egyenes tengely-metszetes

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

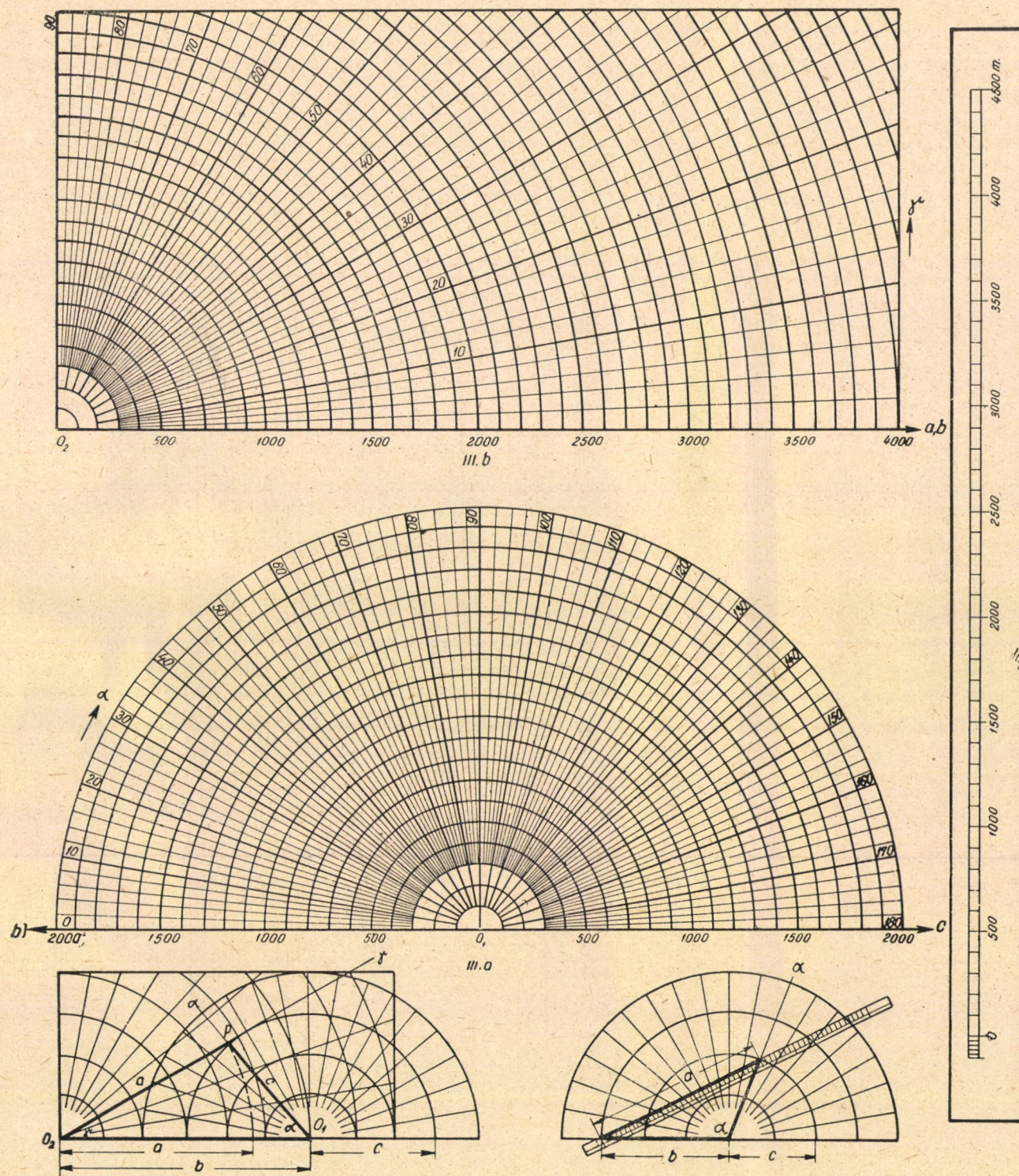
alakját összevetjük a (3) egyenlettel, akkor azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad x = -\operatorname{tg} \alpha, \quad y = -\frac{b}{\cos \alpha},$$

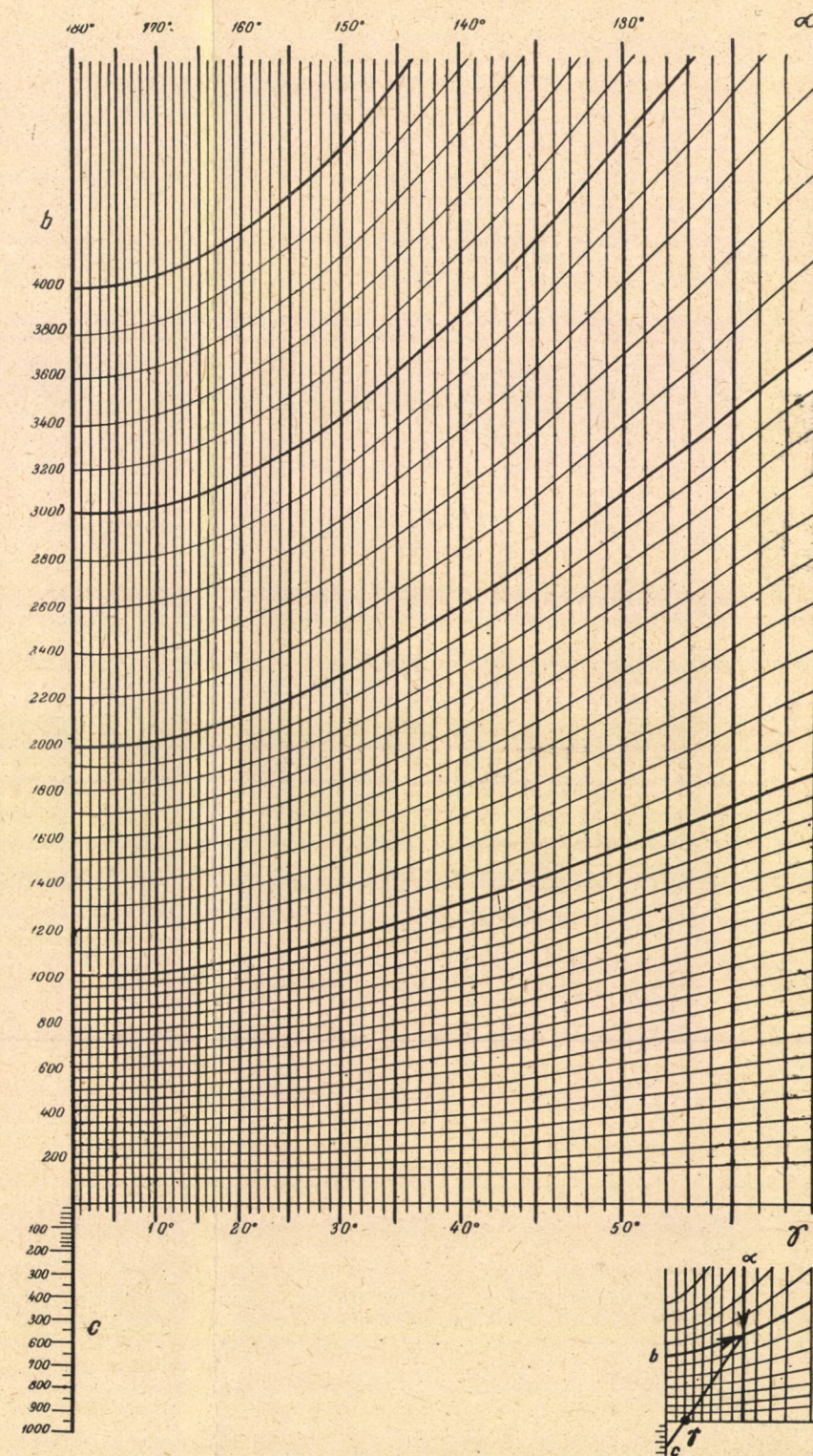
$$(5) \quad u = \operatorname{tg} \gamma$$

és

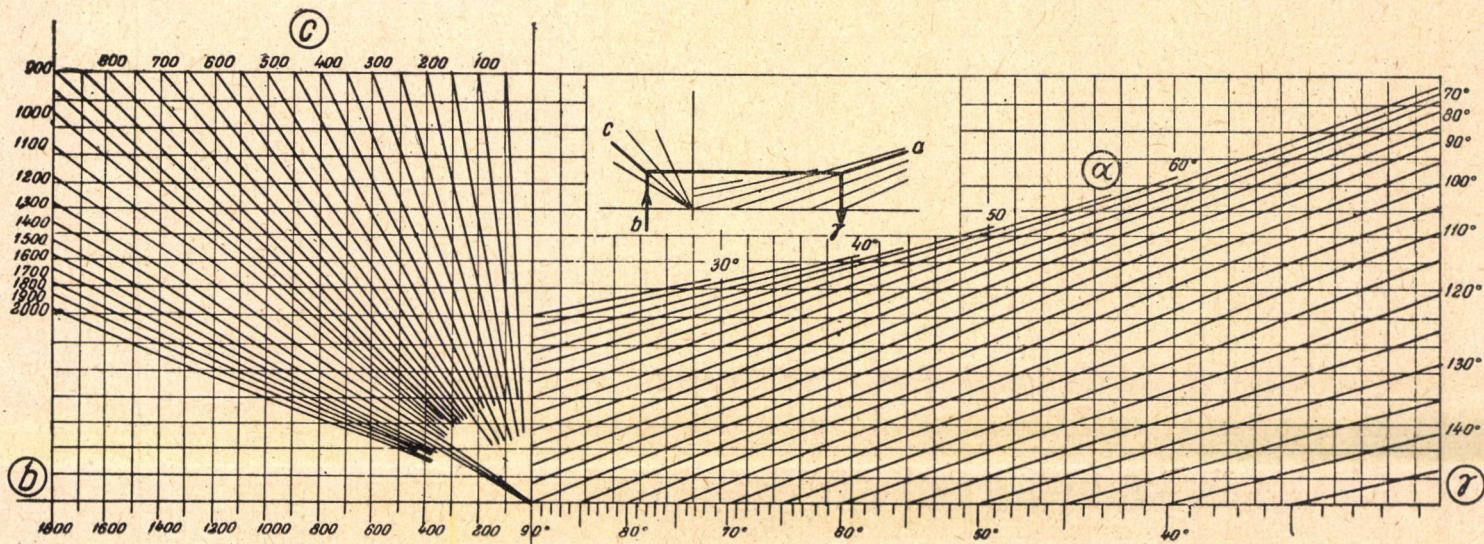
$$(6) \quad v = -c.$$



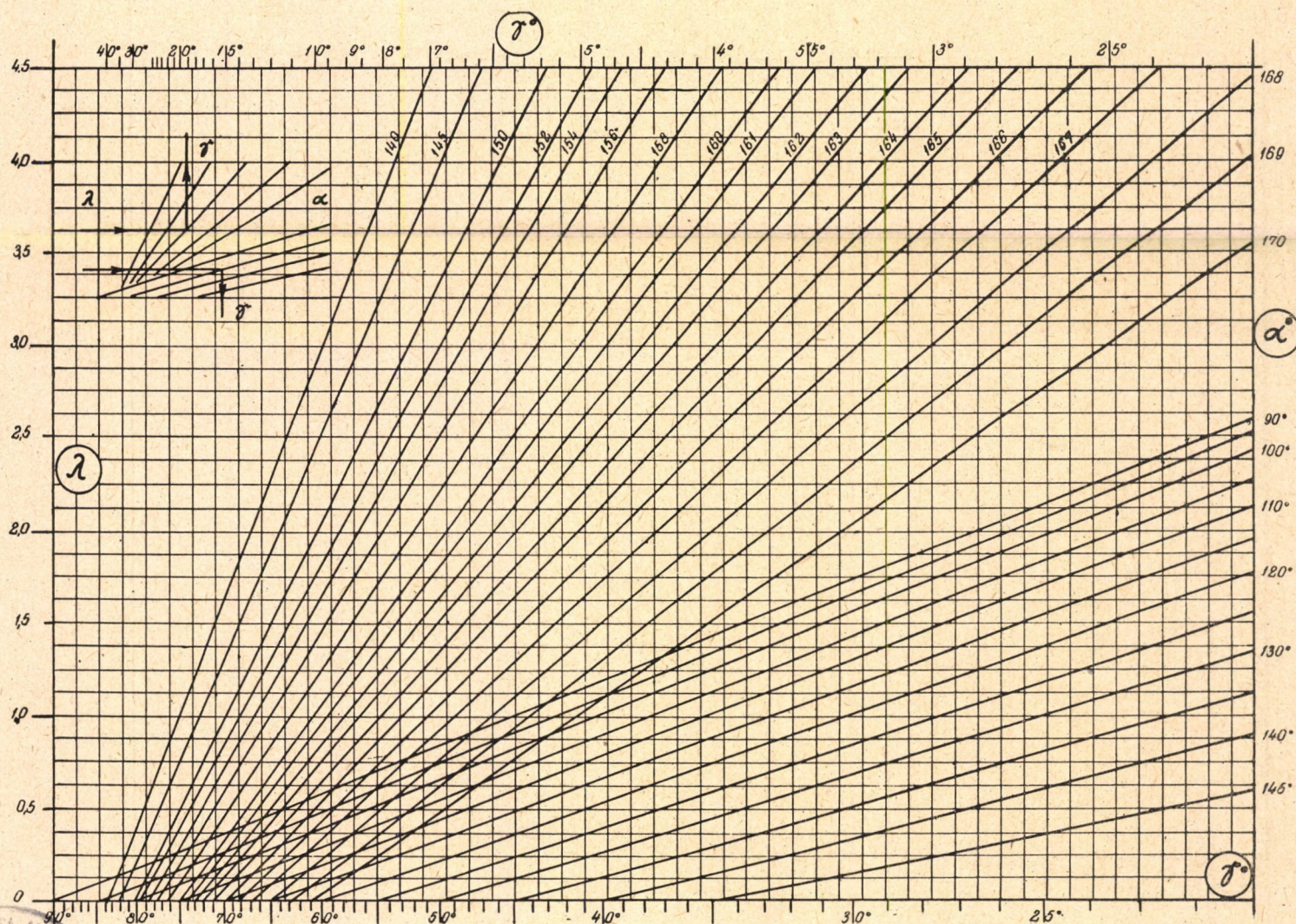
III/a, b. nomogramm



IV. nomogramm

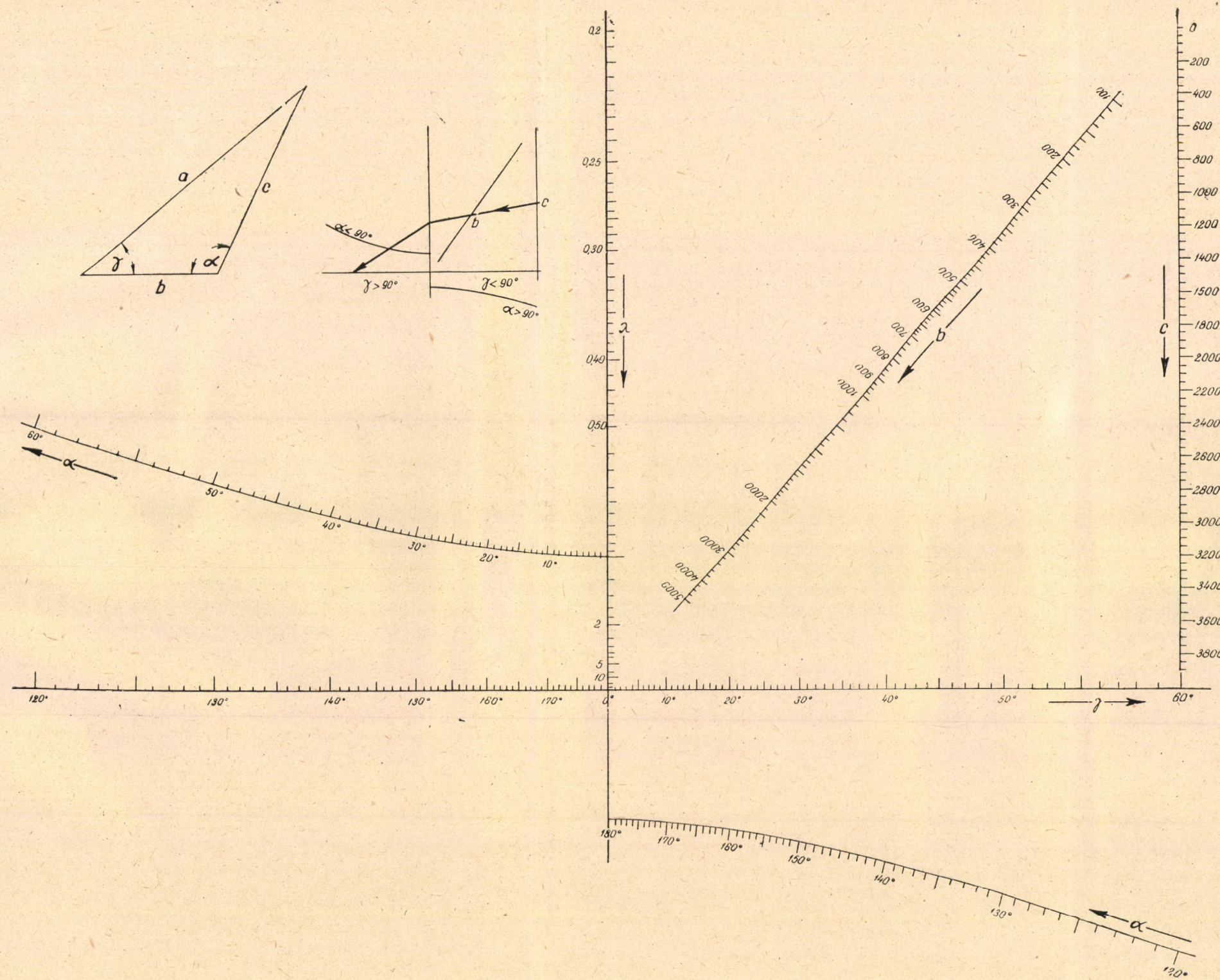


V/a. nomogramm

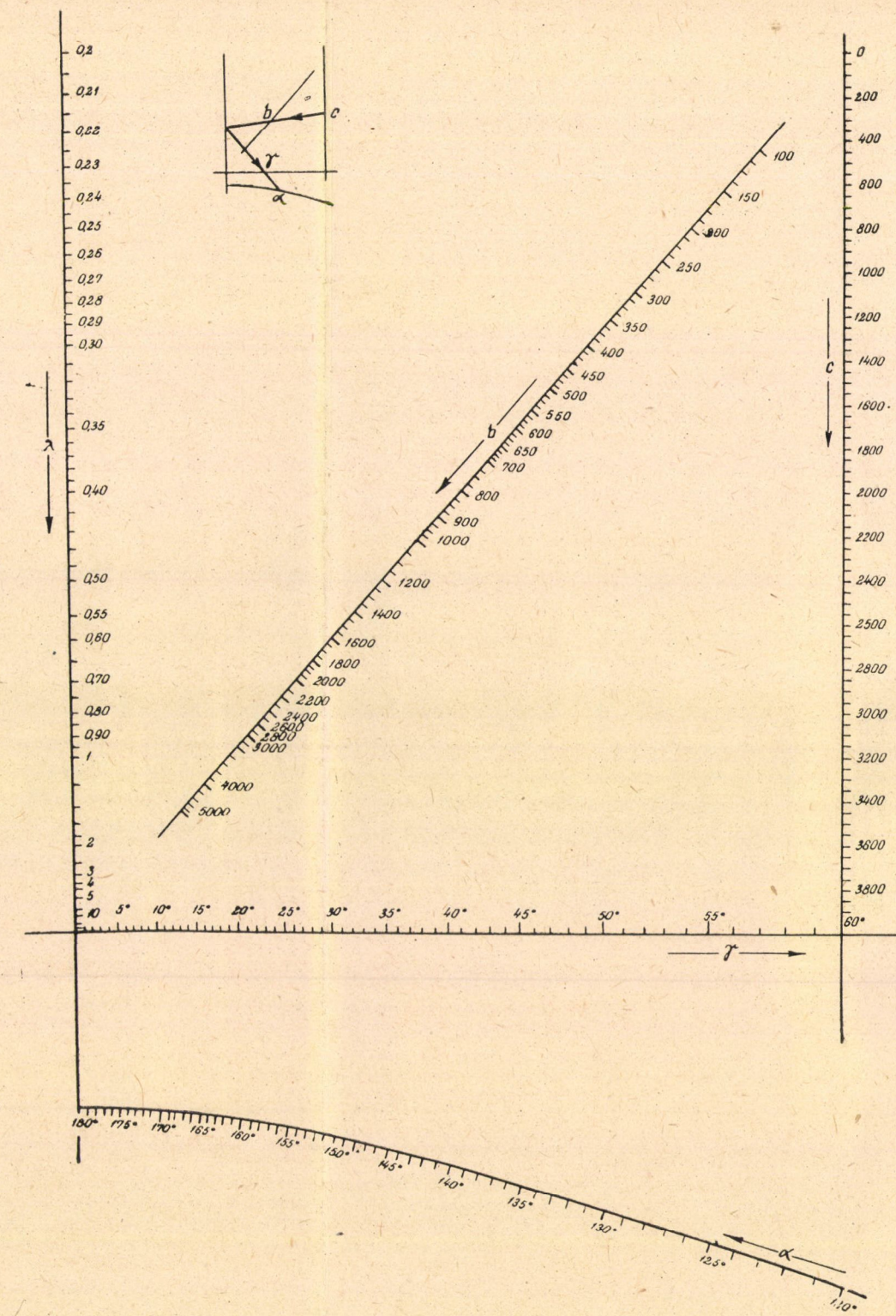


V/b. nomogramm

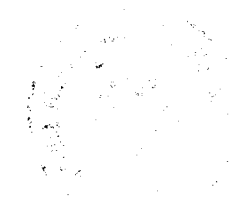




VI/a. nomogramm



VI/b. nomogramm



Az α paramétergörbék (4) alapján az y -tengellyel párhuzamos $x = -\operatorname{tg} \alpha$ egyenesek. A b paramétergörbék ugyancsak (4) alapján

$$(7) \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 - x^2 = 1$$

egyenletű hiperbolák, amelyeknél a valós féltengely hossza egyenlő b -vel, a képzetes féltengely hossza pedig mindig az egységgel egyenlő.

Aszimptotáinak egyenlete $y = \pm bx$.

A szerkesztést egyszerűsíti, hogy az egymástól egyenlő csúcsponttávolságú hiperboláknak bármely függőleges egyenessel való metszéspontjai egyenlő távolságban vannak.

A hiperbolasereg harmadik, illetve első negyedbeli része tartozik a nomogramhoz aszerint, hogy α hegyes- vagy tompaszög.

(5) alapján γ skálája tangensskála a pozitív x tengelyen, a c skála pedig (6) alapján lineáris a negatív y tengely irányában.

A nomogramm előnye, hogy az egyik görbesereg egyenessereg (a másik is könnyen megrajzolható hiperbolasereg), továbbá, hogy az egyik skála lineáris, a másik pedig trigonometrikus. Ha α tompaszög a γ skála és az α egyenessereg kótázása egybeesik.

Hátránya, hogy nagy b értékhez tartozó hiperbolák a nagyobb $\alpha = \text{konst.}$ vízszintesekkel már elég lapos metszést adnak, sőt α -nak és γ -nak nagyobb értékei már kívülesnek a nomogramm határain. Ezenkívül hegyesszögű α -nál a negyedik síknegyed nincsen kihasználva és a nomogramm vízszintes irányban nagyon is hosszúra nyúlik.

3. § Egyenessereges és pontsoros nomogrammok

A következőkben az (1) összefüggést ábrázoló két összetett nomogrammot ismertetünk: az egyik kapcsolt egyenessereges nomogramm, a másik ennek a duál megfelelője: kapcsolt pontsoros nomogramm.

Kiindulásul bontsuk fel az (1) összefüggést

$$(8) \quad \frac{b}{c} = \lambda$$

és

$$(9) \quad \lambda = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$$

részekre. A (8) összefüggés bármilyen osztónomogrammal nehézség nélkül ábrázolható.

A (9) összefüggés ilyen alakban írható:

$$\lambda = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \cos \alpha.$$

Ez pedig, ha α állandó, a $(\lambda, \operatorname{ctg} \gamma)$ koordinátarendszerben egy egyenes egyenlete. A (9) összefüggés tehát α paraméterű egyenessereggel ábrázolható. Ennek egyenesei az első síknegyedben vannak és nincs közös metszéspontjuk. Ez az egyenessereg könnyen megszerkeszthető (V. nomogrammok).

A (8) összefüggést szintén egyenessereges nomogrammal, mégpedig a c paraméterű $\lambda = \frac{1}{c} \cdot b$ sugársorral ábrázoltuk.

A két nomogramm a közös λ tengelyén keresztül kapcsolódik egymáshoz. A leolvasás az ábrán feltüntetett kulcs szerint történik (V/a. nomogramm).

A nomogrammot értékelve megállapíthatjuk, hogy előnye a könnyű megszerkeszthetőség, a könnyen kezelhetőség, hátránya, hogy nem vihető fel sem a teljes α , sem a teljes γ skála. (Pl. a γ tengelyen a 30° -nál kisebb szögek lemaradtak, az α tengelyen pedig a 30° -nál kisebb és a 145° -nál nagyobb szögek.) További hátrányként említhető meg, hogy az $\alpha = \text{konstans}$ egyenesek csak kb. 5° -onként rajzolhatók fel, de nagy szögeknél még ezek az egyenesek sem húzhatók végig, mert elég lapos szögben metszik egymást.

Ha például a teljes $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ tompaszögű intervallumra van szükség, akkor a fenti nehézségek azáltal oldhatók meg, hogy a γ tengelyen kétfelé egységet, illetve két γ tengelyt veszünk fel. Hogy a tévesztési lehetőséget kiküszöböljük, a felső egyenessereghez tartozó γ tengelyt felülre, az alsó egyenessereghez tartozó γ tengelyt pedig alulra rajzoljuk.

A $\lambda = \frac{b}{c}$ osztónomogrammot itt elhagytuk, helyette a $\lambda = \text{konstans}$ egyenessereget kótáztuk. Elképzelhető ugyanis, hogy a $\frac{b}{c}$ osztást logarléccel előre elvégezzük. A leolvasás a feltüntetett kulcs szerint történik (V/b. nomogramm).

Az (1) összefüggés ábrázolására felhasználhatjuk az ismertetett egyenessereges nomogrammal duális pontsoros nomogrammot is.

Az előző nomogramm, ha a $\lambda = \text{konst.}$ és $\gamma = \text{konst.}$ egyenesekkel kiegészítjük, három-egyenessereges nomogramm. Mivel az $\alpha = \text{konst.}$ egyenessereg nem halad át közös ponton, a $\lambda = \text{konst.}$ és a $\gamma = \text{konst.}$ egyenessereg ellenben igen, tudniillik az illető egyenesek végtelen távoli pontjában, azért ennek a nomogrammnak a duálja két egyenes és egy görbe skálát tartalmazó nomogramm.

Most a (9) összefüggést

$$\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{-\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \gamma} = 1$$

alakban írjuk. Ebből kiolvasható a két egyenes és a görbe skála egyenlete. Fenti alakjában az egyenlet azt fejezi ki, hogy az y tengely $\frac{1}{\lambda}$ koordinátájú pontja, az x tengely $\operatorname{tg} \gamma$ koordinátájú pontja és az

$$x = -\operatorname{tg} \alpha, \quad y = \frac{1}{\cos \alpha}$$

koordinátájú pont egy egyenesen van.

Az y tengelyre tehát $\frac{1}{\lambda}$ reciprok skálát kell felvinni, az x tengelyre pedig $\lg \gamma$ skálát. A görbe tartó paraméteres egyenletrendszeréből az α paraméter kiküszöbölésével az $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola adódik.

Egyenlő x és y egységek esetén ez egyenlőszárú hiperbola. Hegyes-, ill. tompaszögek esetén a hiperbola második, illetve negyedik síknegyedbeli része szerepel. Mindezeket az eredményeket a dualitás alapján közvetlenül is megkaphattuk volna, pl. a hiperbola az előző nomogramm egyenesseregének burkoló görbéje.

A VI/a. nomogrammban a (8) összefüggést pontsoros Z -nomogrammal ábrázoltuk.

Hátrányként jelentkezik ennél a nomogrammnál abban az esetben, ha hegyes- és tompaszögek egyaránt szerepelnek, a rossz helykihasználás, valamint, hogy a $\frac{\pi}{2}$ -hez közeleső szögek kiesnek a nomogramm kereteiből.

A kétszeri egyenesátfektetés is gyakran nehézkes. Előnye viszont ennek a nomogrammnak az, hogy a mindkét szögnegyed tartalmazó α , γ skála folytán a háromszög teljes megoldására alkalmas.

Ha tompaszögű α értékekre szorítkozhatunk, viszonylag jó helykihasználású könnyen kezelhető nomogrammot kapunk (VI/b. nomogramm).

4. § Logaritmikus egyenessereges és mozgóskálás nomogrammok

Az általános háromszög megoldására készítettünk olyan logaritmikus egyenessereges és mozgóskálás nomogramokat is, amelyek segítségével a háromszög megoldható, ha adott két oldal és egy szög vagy egy oldal és két szög. A megoldás alapjául a tangens- és a sinustétel szolgált:

$$(b - c) : (b + c) = \operatorname{tg} \frac{\beta - \gamma}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

A tangens- és a sinustételnek megfelelően készítettünk két egyenessereges nomogrammot (VII/a. és VII/b.). Az ismert adatokból az ismeretlen meghatározása a nomogramokon található magyarázó rajzok szerint történik. Mindkét nomogramm ugyanazon elv alapján készíthető el s éppen ezért elegendő, ha csak a sinustétellel foglalkozunk.

A sinustétel szerint:

$$a_1 \sin \alpha_2 = a_2 \sin \alpha_1.$$

Ezt

$$\lg a_1 + \lg \sin \alpha_2 = \lg a_2 + \lg \sin \alpha_1$$

alakban is felírhatjuk. Ha úgy a jobb-, mint a baloldalt y -nal tesszük egyenlővé, kapjuk, hogy

$$y = \lg a_1 + \lg \sin \alpha_2$$

és

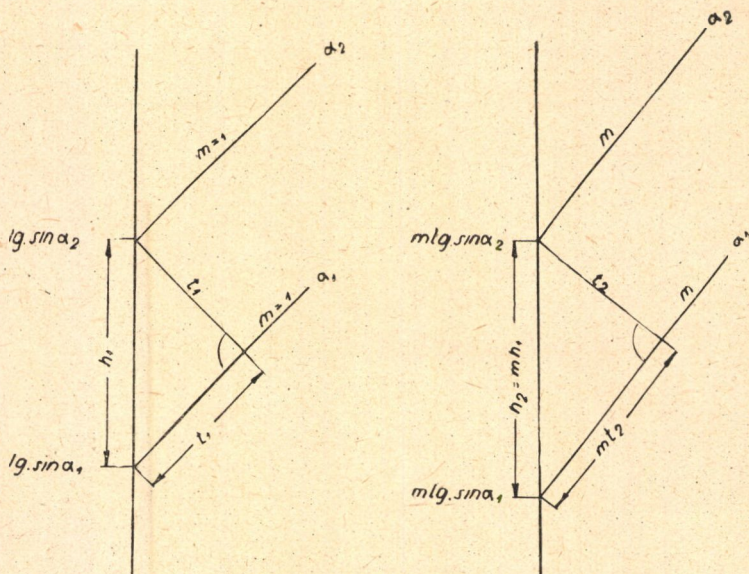
$$y = \lg a_2 + \lg \sin \alpha_1.$$

A logaritmikus papíron e függvények képe olyan egyenes, amelynek irányítányezője 1, ugyanis jelöljük $\lg a_1$ -et, illetve $\lg a_2$ -t x -szel, $\lg \sin \alpha_2$ -t, illetve $\lg \sin \alpha_1$ -et d -vel, akkor

$$y = x + d.$$

d minden értékéhez tartozik egy egyenes. Ezek összessége az 1 irányítányezőjű egyenesek seregét alkotja.

A logaritmikus papír vízszintes tengelyét távolságskálának választjuk, másik tengelyén pedig kitűzzük a szögeknek megfelelő d értékeket. Ha a kitűzött pontokon át a távolságskálához 45° alatt hajló egyeneseket húzunk, már el is készítettük a sinustétel megoldásához szükséges nomogrammot.



3. ábra

90° közelében a sinusértékek igen közel esnek egymáshoz, ami az egyenessereg erős sűrűsödését jelenti. Ez hátránya ennek a nomogrammnak. Mint az alábbiakban látjuk, az y tengely egységének növelésével mód nyílik az egyenessereg némi széthúzására. Ha ezt az egységet m -szeresre nyújtjuk, a sereg egyenseinek iránytangense m . A VII/b. nomogrammon 2 irányítányezőjű egyenessereg szerepel.

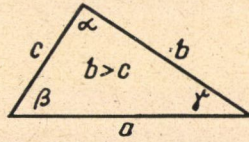
Nézzük meg, hogy az α_1 és α_2 -höz tartozó párhuzamos egyenesek távolsága hogyan függ m -től. A 3. ábrán először 1 az irányítányező, másodszor m . Az ábrákból adódik, hogy

$$2t_1^2 = h_1^2, \quad t_2^2 + m^2 t_2^2 = h_2^2, \quad h_2 = m h_1,$$

tehát

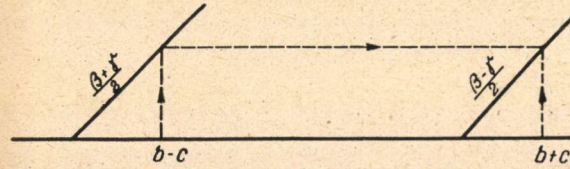
$$t_1 = \frac{h_1}{\sqrt{2}}, \quad t_2 = \frac{h_2}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{m h_1}{\sqrt{1+m^2}}$$

Adott:
b, c és α .



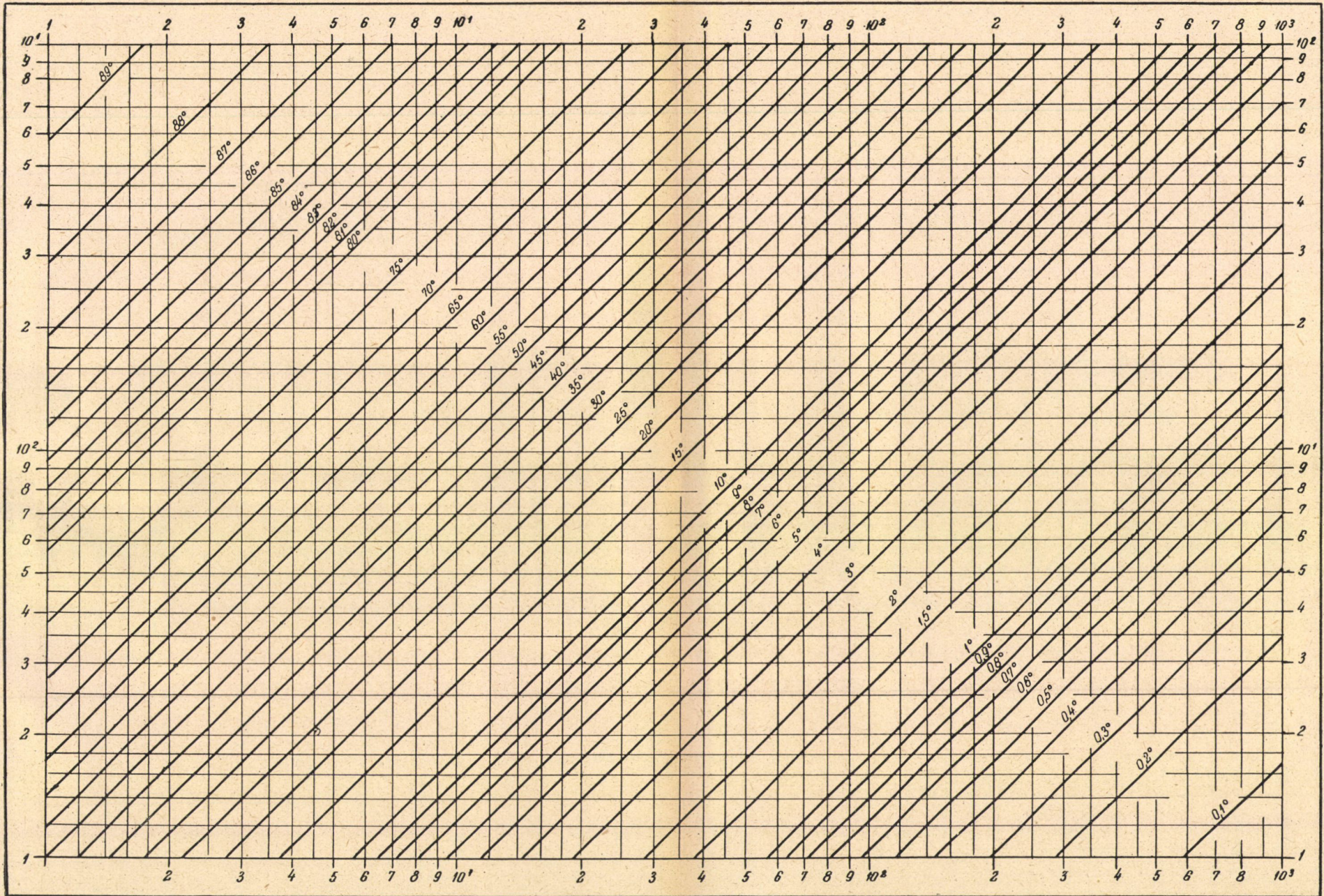
$$(b-c) \cdot (b+c) = \lg \frac{\beta-\gamma}{2} : \lg \frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

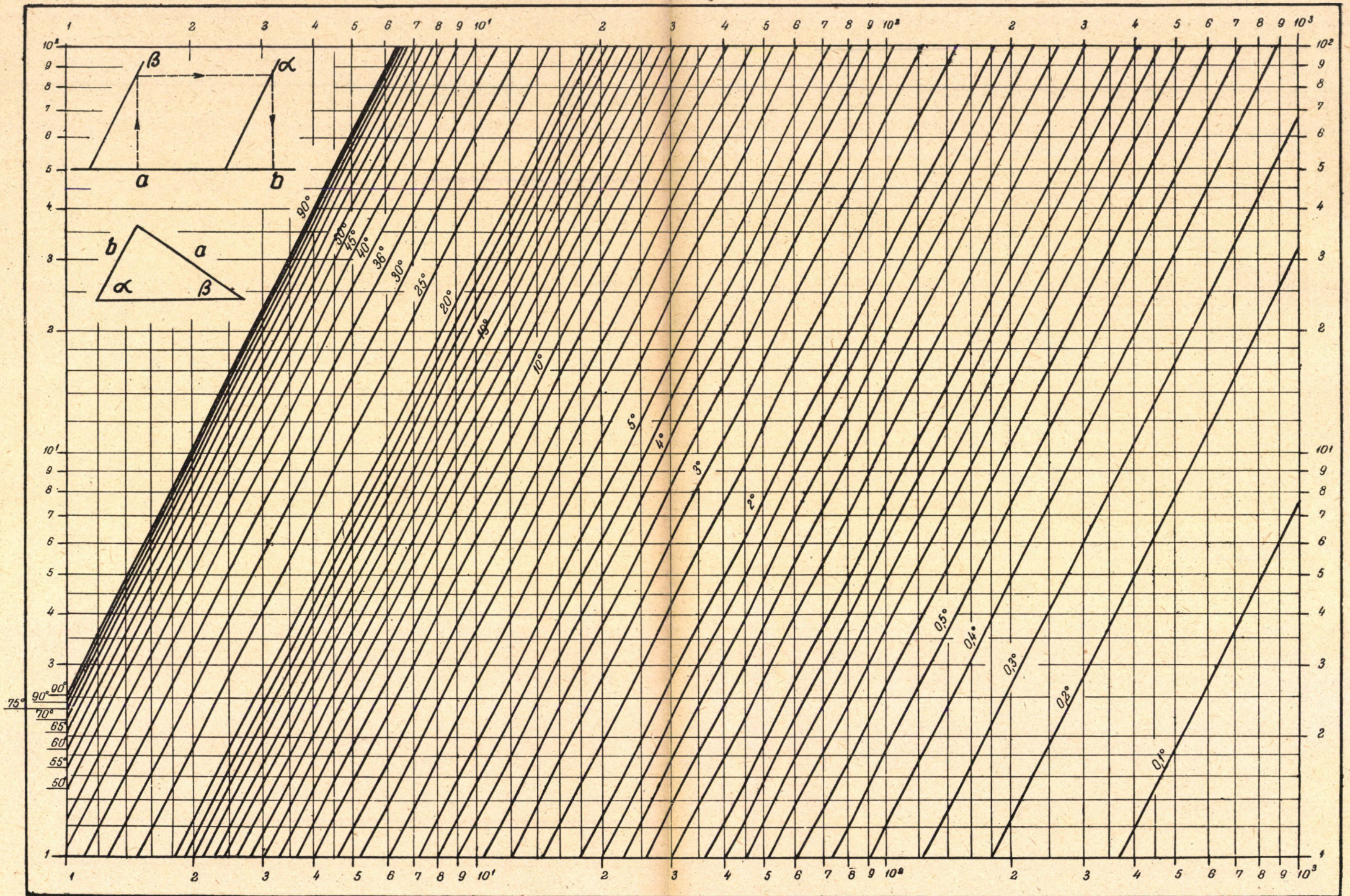


$$\frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2} = \beta$$

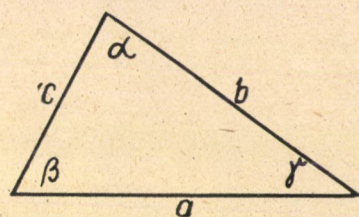
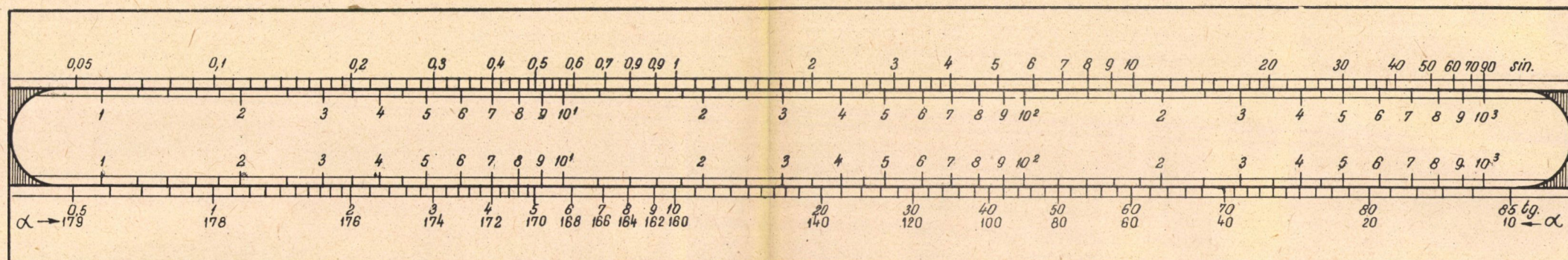
$$\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = \gamma$$



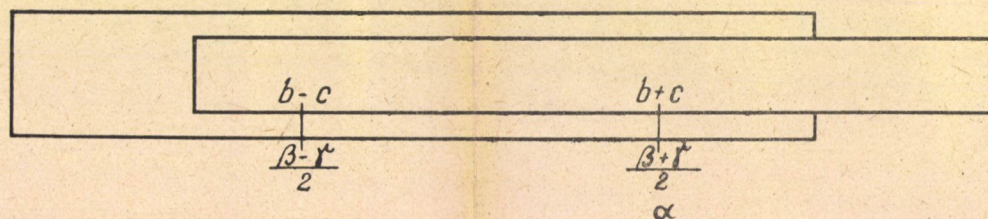
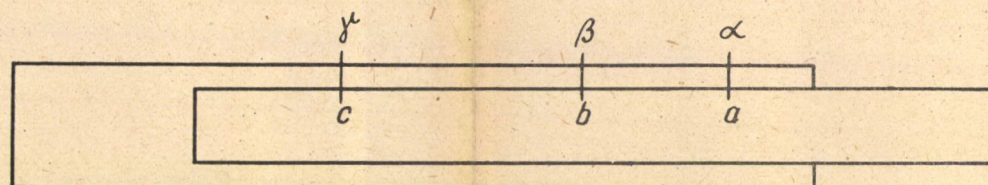
$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$



VII/b. nomogramm



$$b > c; \quad \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

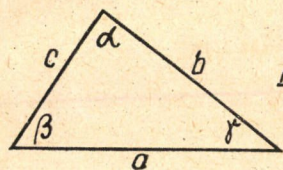
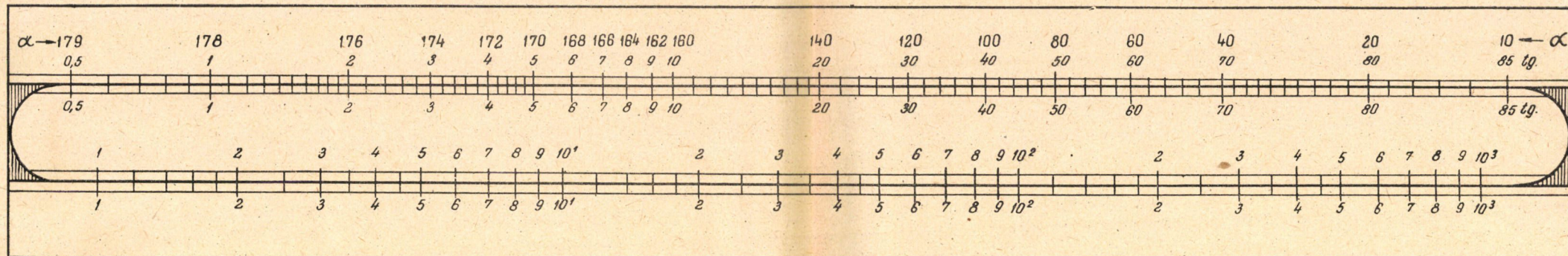


$$\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} = \beta$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} = \gamma$$

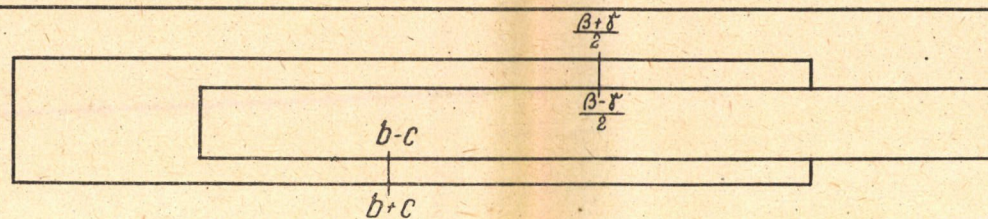
VIII/c. nomogramm





$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

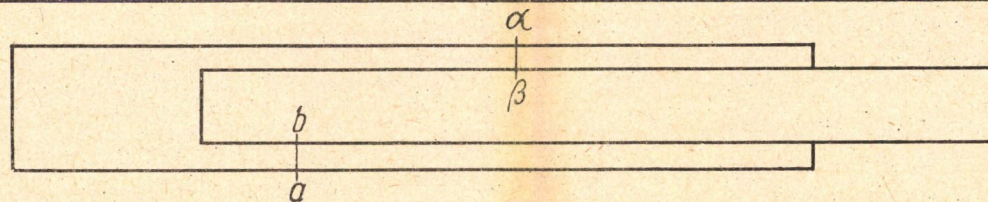
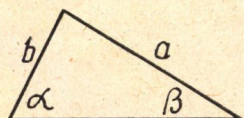
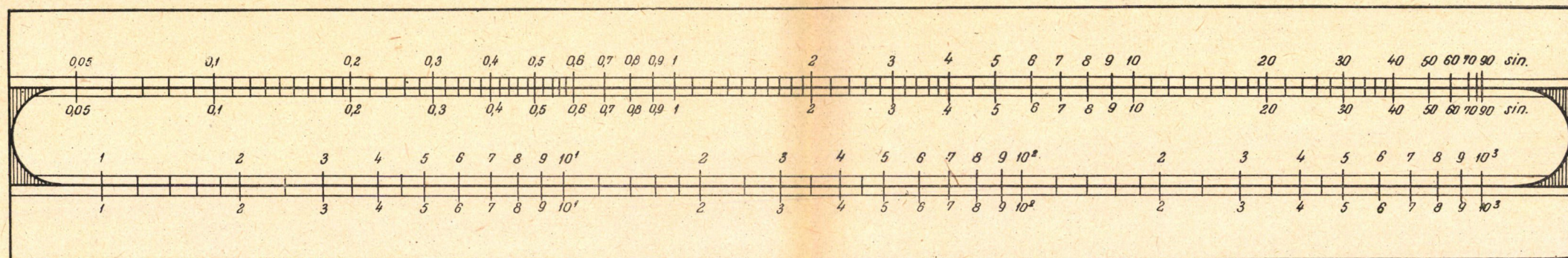
$$b > c$$



$$\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} = \beta$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} = \gamma$$

VIII/a. nomogramm



VIII/b. nomogramm

és

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{mh_1}{h_1} \sqrt{\frac{2}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{2m^2}{1+m^2}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{m^2} + 1}}.$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $t_2 > t_1$, ha $m > 1$ és $\frac{t_2}{t_1}$ felső határa $\sqrt{2} = 1,414 \dots$ Ha például

$$m = 2, \text{ akkor } t_2 \approx 1,265 t_1$$

$$m = 3, \text{ akkor } t_2 \approx 1,342 t_1$$

Az m értékét 2-nél nem célszerű nagyobbra választani, mert egyrészt az éles metszés miatt a leolvasás pontatlanná válik, másrészt pedig nagyobb m esetén a szomszédos egyenesek közötti t távolság olyan kis mértékben nő, hogy az már gyakorlatilag lényegtelen.

Teljesen hasonló elv alapján készült a VII/a. nomogramm a tangens-tételre, itt azonban nem volt szükség a nomogramm megnyújtására a $\log \operatorname{tg}$ függvény egyenletesebb viselkedése miatt. Ennek használatához az adott b

és c értékekből előbb $(b-c)$ és $(b+c)$, az adott α -ból pedig $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

számítandó ki, a leolvasott $\frac{\beta - \gamma}{2}$ és a már kiszámított $\frac{\beta + \gamma}{2}$ értékekből összeadással, illetve kivonással adódik β , illetve γ . E külön számítások levonnak a nomogramm értékéből, viszont viszonylagos egyszerűsége miatt így is használható.

Mindkét nomogramm kielégítő pontosságú, egyszerűen készíthetők és kezelhetők, kezelésük azonban tévesztési lehetőségekkel is jár. Ezért ezeket mozgószkálás, logarlécszerű megoldással is elkészítettük.

A VIII/a. és a VIII/b. nomogramm külön-külön a tangens-, illetve a sinustétel alkalmazásával készült, a VIII/c. nomogramm a kettőt egyetlen mozgószkálás nomogrammban egyesíti.

A nomogrammok skálái logaritmikusak. A távolságskálára a számok logaritmusait mértük fel 1-től 1000-ig, a szögskálákra pedig a tangens-, illetve a sinusértékek logaritmusait.

A VIII/a. nomogramm magyarázó rajza szerint, ha az adott két oldal összegéhez állítjuk ugyanezen két oldal különbségét, akkor az adott közbezárt szög alatt két szög összege, illetve különbsége megadja a még ismeretlen két szög értékét. (Az adott közbezárt szöget a nomogrammon külön is megjelöltük.)

Egy oldalból és két szögből az ismeretlen oldal, illetve két oldalból és az egyikkel szembeni szögből az ismeretlen szögek meghatározása a VIII/b. nomogramm segítségével történhet. Amint a magyarázó rajz is mutatja, itt az ismeretlen értékek közvetlenül adódnak.

Megoldhatnánk ezzel a nomogrammmal akkor is a háromszöget, ha két oldala és az általuk bezárt szög adott. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy a két

ismert oldal mérőszámát egymás mellé állítjuk és utána a szögskálákon olyan egyvonalon fekvő értékpárt keresünk, amelyeknek összege a közbezárt szög kiegészítő szögével egyenlő. Az egy vonalon fekvő két szög az adott oldalakkal szemben fekvő szögek. Ez az eljárás mindenesetre nehézkesebb, mint a VIII/a. illetve VII/a. nomogramm használata.

A VIII/c. nomogramm magában foglalja az előbb ismertetett két nomogrammot. Ezen a már jól ismert skálák vannak. A nomogramm kezelését a magyarázó rajzok mutatják. Előnye ennek a nomogrammnak, hogy könnyen kezelhető, vele a háromszög megoldása egyszerű (egy lécen két beállítással elvégezhető) és az értékek leolvasása jóval egyszerűbben végezhető, mint az egyenessereges nomogrammoknál. Igaz viszont, hogy — különben egyszerű — elkészítése költségesebb, hosszadalmasabb, mint az egyenesseregeseké. Hátránya marad, hogy tangenstétel esetén még külön összeadási és kivonási műveleteket kell végezni.

IRODALOM

- [1] М. В. Пентковский: Номография. (М. V. Pentkovszkij: Nomográfia) ГТТИ. Moszkva—Leningrád, 1949.
- [2] E. Soreau: Nomographie ou traité des Abaques. (Chiron, Paris) 1921.
- [3] H. Körwien: Graphisches Rechnen. (GMBH, Leipzig) 1952. 6. kiad.

НОМОГРАММЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Я. Ацель, Д. Беда, И. Гати и Ш. Тэрэк.

Резюме

Видимые на чертежах составные номограммы и номограммы с подвижными элементами, снабженные описанием способа употребления, служат для определения неизвестных данных общего треугольника в случае, когда даны одна сторона и два угла или две стороны и один угол. С помощью номограммы II, а еще проще, применяя номограмму III при упомянутых данных, а также и в том случае, если известны три стороны, имеется возможность определить одновременно величины всех прочих составных частей.

NOMOGRAMMES POUR LA RÉOLUTION DES TRIANGLES GÉNÉRAUX

J. ACZÉL, GY. BÉDA, I. GÁTI ET S. TÖRÖK

Résumé

Les nomogrammes d'alignements multiples resp. de points condensés resp. des points à deux côtes resp. d'éléments mobiles de l'article servent à trouver les dates inconnues d'un triangle général dont un côté et deux angles resp. deux côtés et un angle sont donnés. (Les nomogrammes II. et surtout le nomogramme III. peuvent servir aussi dans le cas où les trois côtés sont donnés et ces nomogrammes présentent tous les dates inconnues au même temps.)

INTEGRÁLGÖRBÉK MOMENTUMAINAK FELHASZNÁLÁSA DIFFERENCIÁLEGYENLETEK NUMERIKUS MEGOLDÁSÁNÁL

FREI TAMÁS

Összefoglalás

Szerző a megoldandó differenciálegyenlethez hozzárendel olyan integrálegyenleket, amelyeket a megoldás-függvény kielégít. Az integrálegyenletekben szereplő integrálokat mechanikus kvadraturával közelíti; az így kapott formulákban a keresett integrálgörbe bizonyos — önkényesen választott — helyeken felvett értékei szerepelnek. E formulák, ill. ezek rendszerei és különböző kombinációi alkalmasak közönséges differenciálegyenletek kerületérték- és kezdetiérték-feladatainak megoldására. A bemutatott módszerek mindkét problémakört illetően felveszik a versenyt az eddig ismert módszerekkel, kivéve a kezdeti-érték feladatok ú. n. kezdeti szakaszának számítását.

Bevezetés

Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásánál az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer: egy integrálegyenletet definiálunk, amelynek — bizonyos feltételek alapján kiválasztott — rész-megoldásrendszere kielégíti az eredeti differenciálegyenletet. Felmerül az a kérdés, nem lehet-e a numerikus megoldást megkönnyíteni azáltal, hogy nem egy, hanem több integrálegyenletet rendelünk az adott differenciálegyenlethez, amelyeknek — bizonyos feltételek alapján kiválasztott — rész-megoldásrendszere közös és kielégíti az eredeti differenciálegyenletet. Jelen dolgozat célja, hogy egyrészt megmutassa, hogyan juthatunk el legegyszerűbben ilyen integrálegyenletek sokaságához és hogyan tudjuk azt a numerikus megoldásnál felhasználni. Már a bevezetésben szeretnők hangsúlyozni, hogy a bemutatott módszerek elsősorban a magasabbrendű differenciálegyenletek kerületérték-feladatainak numerikus megoldására lesznek alkalmasak. Tárgyalásunkat inkább a módszer egyszerű ismertetése céljából kezdjük az elsőrendű egyenletek esetével.

1. § Elsőrendű differenciálegyenletek

Azokkal a differenciálegyenletekkel foglalkozunk csak, amelyek

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

alakúak. Ismeretes [1], hogy az adott differenciálegyenlethez hozzárendelve az

$$(2) \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletet, az (1) egyenlet bármely olyan megoldása, amely az x_0 helyen az $y(x_0)$ értéket veszi fel, kielégíti a (2) integrálegyenletet; ha továbbá feltesszük, hogy $f(x, y)$ az $x_0, y(x_0)$ helyet tartalmazó valamely G tartományban folytonos függvény és a (2) integrálegyenletnek csak a G tartományban folytonos megoldásaira szorítkozunk, úgy ezen megoldások kielégítik az (1) differenciálegyenletet és az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt. Parciálisan integrálva azonnal belátható, hogy az (1) egyenlet bármely megoldása kielégíti az

$$(3) \quad \int_{x_0}^x y(\xi) d\xi = y_0(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

illetve általában az

$$(4) \quad \int_{x_0}^x (x - \xi)^k y(\xi) d\xi = y_0 \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{k+1}}{k+1} f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

egyenletek bármelyikét is. (Ezen egyenletekhez úgy is eljuthatunk, ha a (2), majd a (3) stb. egyenleteket rendre integráljuk az x_0 és x határok között.) Differenciálva az egyenleteket, közvetlenül adódik, hogy a (3), ill. (4) egyenletek bármelyikének folytonos megoldása egyszersmind (2)-nek is folytonos megoldása, s így kielégíti az (1) egyenletet is.

Ezen egyenletekben fellépnek a keresett integrálgörbe különböző rendű momentumai is, innen származik a módszer elnevezése.

Meg kell jegyeznünk, hogy a (4) egyenletekhez hasonlóan további integrálegyenleteket tudunk származtatni valamely $\psi(x)$, az $[x_0, x]$ intervallumban differenciálható függvény segítségével. Az $\int \psi(x) dx = \Psi(x)$ jelölést használva, parciális integrálással közvetlenül adódik, hogy az

$$(5) \quad \int_{x_0}^x y(\xi) \psi(\xi) d\xi = y(x_0) [\Psi(x) - \Psi(x_0)] + \int_{x_0}^x [\Psi(x) - \Psi(\xi)] f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

egyenleteket (1) bármely megoldása kielégíti; viszont (5) bármely folytonos megoldása folytonos megoldása (2)-nek, s így (1)-nek is.

Fenti integrálegyenleteink mindkét oldalát közelítsük mechanikus kvadraturával, — éspedig jelen esetben ekvidisztans alappontokra támaszkodó mechanikus kvadraturával. E célból az $[x_0, x]$ intervallumot n egyenlő részre osztva, az osztópontokat jelöljük x_i -vel ($i = 0, 1, \dots, n$). Az integrálgörbe e pontokban felvett értékeit $y_i = y(x_i)$ -vel, az f függvény megfelelő értékeit pedig $f_i = f(x_i, y(x_i))$ -vel jelöljük. Az ekvidisztans beosztásnak megfelelő Newton—Cotes-féle számokat c_i -vel, a Laurent—Cotes-számokat l_i -vel jelöljük. (2), (3), (4), ill. (5) egyenleteink a következő összefüggéseket adják:

a) A Newton—Cotes formulákat használva

$$(2') \quad y_n = y_0 + (x_n - x_0) [c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n],$$

$$(3') \quad (c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = y_0 + [c_0 (x_n - x_0) f_0 + c_1 (x_n - x_1) f_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1}) f_{n-1}],$$

$$(4') \quad c_0 (x_n - x_0)^k y_0 + c_1 (x_n - x_1)^k y_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})^k y_{n-1} = \\ = \frac{1}{k+1} [y_0 (x_n - x_0)^{k+1} + c_0 (x_n - x_0)^{k+1} f_0 + c_1 (x_n - x_1)^{k+1} f_1 + \dots \\ \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1})^{k+1} f_{n-1}],$$

$$(5') \quad c_0 \psi(x_0) y_0 + c_1 \psi(x_1) y_1 + \dots + c_n \psi(x_n) y_n = \\ = \frac{1}{x - x_0} y_0 [\Psi(x_n) - \Psi(x_0)] + c_0 [\Psi(x_n) - \Psi(x_0)] f_0 + c_1 [\Psi(x_n) - \\ - \Psi(x_1)] f_1 + \dots + c_{n-1} [\Psi(x_n) - \Psi(x_{n-1})] f_{n-1}.$$

b) A Laurent—Cotes-formulák alkalmazásával kapcsolatban [amikor az (x_0, x) intervallumot $2n$ egyenlő részre osztjuk], csak a (2) integrálegyenletből származó

$$(2'') \quad y_{2n} = y_0 + (x_{2n} - x_0) (l_1 f_1 + l_2 f_3 + l_3 f_5 + \dots + l_n f_{2n-1})$$

relációt említjük.

Legyenek ismeretesek az $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ értékek közelítőértékei: $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$; ezek segítségével számítani tudjuk az f_i értékek közelítőértékeit is, éspedig az

$$F_i = f(x_i, Y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

értékeket. Feladatunk, hogy ezek felhasználásával további pontokban keressünk megfelelő közelítőértékeket. A (2') egyenlet alapján pl. az Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} és az F_0, F_1, \dots, F_{n-1} értékek segítségével számítani tudjuk Y_n értékét, a (4') egyenletek bármelyike segítségével pedig az Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-2} és F_0, F_1, \dots, F_{n-2} felhasználásával az Y_{n-1} értéket — csakhogy általában egy nem-lineáris egyenlet megoldása árán. Ezzel szemben a (3'), (5'), ill. a (2'') egyenletek lineárisak az Y_n ismeretlenben, s így segítségükkel ennek értéke [t. i. az $y(x_n)$ közelítőértéke] egyszerűen számítható. Megjegyezzük, hogy egyenleteink általában más-más közelítőértékét szolgáltatják ugyanannak az értéknek.

Nem foglalkozunk a »kezdeti szakasz« pontjainak számításával [jóllehet erre akár a (3') egyenlet, akár pedig a (2'), (3'), (4'), (5') egyenletek megfelelő rendszere alkalmas volna], mert ennél lényegesen egyszerűbb módszerek állnak rendelkezésünkre e feladat megoldásához, pl. a Runge—Kutta módszer, különböző numerikus iterációs eljárások stb.

A kezdeti szakasz közelítőértékeinek ismeretében a (3') egyenlet alkalmazása tűnik első pillanatra leghasználhatóbbnak, további közelítőértékek számításánál; a következő bekezdésekben azonban látni fogjuk, hogy nem a (3') formulával, hanem a (3'), (4'), (5') és (2') egyenletek bizonyos kombiná-

cióival jobb dolgoznunk; sőt, e kombinációk megalkotásánál bizonyos mértékig figyelembe vehetjük a megoldandó differenciálegyenlet speciális tulajdonságait is. E célból vázlatosan megvizsgáljuk a formulák alkalmazásakor fellépő hibák forrásait.

Elsősorban a formulák »lépésközét«, azaz két szomszédos alappont távolságát, továbbá az integrációs intervallum hosszát, azaz az (x_0, x_n) távolságot kell rögzítenünk, hogy azután már konkrétan vizsgálhassuk az egyes formulákat. A lépésköz nagyságrendjét a megkívánt pontosság megszabja; ezen belül úgy választjuk azt, hogy a 10-es számrendszerben lehetőleg kevés jegyű legyen. Az integrációs intervallumot illetően már néhány próbálkozás meggyőz bennünket arról, hogy annak növelése — általában — bizonyos határig fokozza a pontosságot, majd ismét romlik a számítás jósága. (Ezt a tényt a mechanikus kvadratura hibabecslő formulájával indokolni lehet. Tekintettel azonban arra, hogy ekvidisztáns alappontok esetén a hibabecslő-formula csaknem áttekinthetetlen, praktikus következtetést úgysem tudnánk az indokolásból kiolvasni.) Meggondolandó az is, hogy a formulák kezelése növekedő alappontszám esetén egyre nehezkesebbé válik, mert a tagok száma egyre nő. Az egyetlen praktikus következtetés, amit a *Runge—König*: *Numerisches Rechnen* c. könyvben [3] közölt vázlatos hibabecslő-formulából kiolvashatunk (l. 78. §. 271 o.), hogy páratlanszámú alappontra támaszkodó formulát érdemes csak használnunk. A könyv ezen megjegyzése a mi feladatunkkal kapcsolatban az integrációs intervallum növekedése miatt még sokkal inkább helytálló. Mi a következőkben elsősorban az öt alappontra támaszkodó formulákat vizsgáljuk, azonban hat alappontra támaszkodó relációkat is megadunk.*

A kombinációs formulák alkalmazását az a tény indokolja, hogy a kvadraturahiba mellett a formulák alapján számított közelítőértékeket a felhasznált közelítőértékek hibája is befolyásolja, sőt, a tapasztalat szerint ez az ú. n. öröklött hiba¹ általában messze felülmúlja a kvadraturahibát. Elsősorban ezt az öröklött hibát akarjuk csökkenteni. Fejezzük ki tehát az alkalmazott formulából a számítandó Y_n -et:

$$(6) \quad Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i Y_i.$$

Jelöljük Y_i hibáját ε_i -vel, F_i hibáját η_i -vel ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), és keressük meg ε_n értékét. A kvadraturahibát elhanyagoljuk, és feltesszük, hogy az ε_i és η_i értékek elég kicsinyek; ekkor

$$\eta_i \approx f'_y(x_i, Y_i) \varepsilon_i.$$

Így:

$$(7) \quad \varepsilon_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i] \varepsilon_i.$$

* Azért használtunk párosszámú alappontra támaszkodó formulát is, mert a kombinációképzésnél szóba jövő (3'), (4'), (5') és (2') egyenletek közül csak így lehetséges elegendőszámú, azonos nagyságrendű kvadraturahibával rendelkező formulát kiválasztanunk.

Innen kiolvasható, hogy az öröklött hibát csökkentendő, az $|a_i f'_y(x_i; Y_i) + \beta_i|$ értékeket mennél kisebbé kell tennünk a formulákban. Tekintettel arra, hogy f'_y értéke a számítás folyamán általában változik, nagyságrendi alakulását lépésről-lépésre figyelemmel kell kísérnünk és szükség esetén más formula alkalmazására kell áttérnünk.

Megjegyezzük, hogy a kvadratúrahibát is kompenzálni tudjuk bizonyos mértékig alkalmasan választott formulával. Feltételezhetjük ugyanis, hogy a kvadratúrahibák lépésről-lépésre csak keveset változnak (t. i. az integrációs tartományok szomszédos alappontokhoz tartozó közelítőértékek számításánál nagyrésztben átfedik egymást). Ha tehát sikerül olyan formulát találnunk, amelynél

$$|a_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i| \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-2)$$

elég kicsi és e mellett

$$-0,5 > a_{n-1} f'_y(x_{n-1}, Y_{n-1}) + \beta_{n-1} > -1,$$

akkor az előzőleg számított érték hibájával korrigáljuk (legalábbis részben) a következő lépés kvadratúrahibáját.

Az eddig elmondottakat jól illusztrálja a következő példa:

Az $y' = \frac{1}{10} y^2 - xy$; $y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot először a (3')

egyenletből adódó formulával oldjuk meg. $h = 0,1$ nagyságú lépésközt választunk, öt alappontra támaszkodunk, azaz integrációs intervallumunkat 0,4 hosszúságúnak választjuk. A számítást tehát a (3') egyenletből adódó

$$Y_4 = 11,857143 Y_0 - 4,571429 Y_1 - 1,714286 Y_2 - \\ - 4,571429 Y_3 + 0,4 F_0 + 1,371429 F_1 + 0,342857 F_2 + 0,457143 F_3$$

formulával végezzük. A táblázatban közöljük az egyes közelítőértékek tényleges hibáját (ε) és azt a hibát, amelyet a (7) formula felhasználásával kap-

x	Y	$10^4 \varepsilon_s$	$10^4 \varepsilon_s$
0	1,0	0	
0,1	1,005046		
0,2	1,000068	$\pm 0,5$	6 tizedesjegyre pontos »kiindulási« értékek
0,3	0,985113		
0,4	0,960541	$+ 4 \pm 0,5$	± 9
0,5	0,926967	$- 20 \pm 0,5$	$- 19 \pm 7$
0,6	0,885460	$+ 90 \pm 0,5$	$+ 87 \pm 6$
0,7	0,836414	$- 419 \pm 0,5$	$- 411 \pm 6$

hatunk (ε_s); az egyezés majdnem tökéletes, amit az mutatja, hogy esetünkben a kvadratúrahiba valóban elhanyagolhatóan kisebb az öröklött hibánál.

A táblázatból látható, hogy a (3') egyenlet használatakor ennél a feladatnál az öröklött hibák hatására milyen gyorsan nő az egyes közelítőértékek hibája. Az $|\alpha_i f'_y + \beta_i|$ kifejezések átlagos értéke [az alkalmazott formula és a megoldásgörbe (0,3, 1,2) szakaszát tekintve] 4, 5 nagyságrendű; ez nemcsak kvalitatíve magyarázza a hibák gyors növekedését, hanem kvantitatíve is »meghatározza« a hibasorozat egyes értékeinek nagyságrendjét.

Ugyanezt a feladatot a (3') és (4'), valamint az eggyel kevesebb alapontra támaszkodó (2') formula bizonyos kombinációjából származó

$$Y_4 = 0,740780 Y_0 + 1,014026 Y_1 - 0,317922 Y_2 - 0,436884 Y_3 - \\ - 0,011045 F_0 + 0,277928 F_1 - 0,052461 F_2 + 0,278825 F_3$$

formulával is megoldottuk. Ekkor az $|\alpha_i f'_y + \beta_i|$ ($i = 0, 1, 2$) mennyiségek átlagos értéke [ismét a (0,3 ; 1, 2) szakaszra vonatkozóan] 0,7 körül van, $\alpha_3 f'_y + \beta_3$ értéke pedig (ugyanezen intervallumban) — 0,5 és — 0,8 között változik. (Meg kell jegyeznünk, hogy az adott feladathoz a fenténél »lényegesen jobb« formulát is találhatunk.) A hibasorozat így alakult :

x	$10^4 \varepsilon_T$	$10^4 \varepsilon_S$
0	0	
0,1—0,3	$\pm 0,5$	
0,4	$\pm 0,5$	$\pm 1,3$
0,5	$+3 \pm 0,5$	$\pm 1,5$
0,6	$+7 \pm 0,5$	$-1,5 \pm 1,5$
0,7	$+6 \pm 0,5$	$-3,6 \pm 1,5$
0,8	$+16 \pm 0,5$	$+0,5 \pm 1,5$
0,9	$+18 \pm 0,5$	-1 ± 2
1,0	$+17 \pm 0,5$	-4 ± 2
1,1	$+21 \pm 0,5$	$+2 \pm 2$
1,2	$+25 \pm 0,5$	$+4 \pm 2$

Ezen táblázatnál összehasonlítva ε_t és ε_s értékeit, látható, hogy a fenti formula alkalmazásakor az öröklött hibák mellett elég erőteljesen szobajön a kvadratúrahiba is : egyrészt azért, mert az öröklött hibák hatását a formula elég erősen letompította, másrészt, mert a (4') és az eggyel kevesebb pont-

számra támaszkodó (2') formula kvadratúrahibája fenti $y(x)$ függvényt illetően nagyságrenddel nagyobb, mint (3')-é, s így a kombinációképzésnél a kvadratúrahiba növekedett.

A következőkben módszerünket egy példa kapcsán összehasonlítjuk a leggyakrabban alkalmazott eljárásokkal: az Adams—Nyström-féle extrapolációs eljárással és a Runge—Kutta-módszerrel.

Az

$$yy' + 1,7 y^2 = 13,125 e^{1,6x}; y(0) = 2,5$$

feladatot választottuk ki a célból, amelynek megoldása:

$$y(x) = \sqrt{e^{-3,4x} + 5,25e^{1,6x}}.$$

A vizsgált tartományban f'_y értéke $-3,8$ és $-4,2$ között van. Ennek megfelelően módszerünkkel kapcsolatban a következő kombinációs formulát használtuk fel:

$$19 Y_5 = 1,8571358 Y_0 + 12,2014736 Y_1 + 6,2894944 Y_2 - \\ - 4,4220368 Y_3 + 3,073933 Y_4 - 0,53905366 F_0 + 2,37808096 F_1 + \\ + 1,12166796 F_2 - 0,15819536 F_3 + 4,3164917 F_4,$$

amiből kerekítéssel:

$$Y_5 = 0,097744 Y_0 + 0,642184 Y_1 + 0,331026 Y_2 - 0,232740 Y_3 + \\ + 0,161786 Y_4 - 0,028371 F_0 + 0,125162 F_1 + 0,059032 F_2 - \\ - 0,008326 F_3 + 0,227184 F_4.$$

A megadott kezdetiértéken kívül módszerünk, ill. az Adams—Nyström-féle extrapolációs módszer alkalmazásakor 3 további függvényértéket számítottunk ki más módszerrel. A módszerünk alapján számított legelső értéket [az $y(0,3)$ közelítőértékét] az

$$Y_4 = 0,155708 Y_0 + 1,307997 Y_1 - 0,244429 Y_2 - 0,219276 Y_3 - \\ - 0,032679 F_0 + 0,220376 F_1 - 0,073267 F_2 + 0,259439 F_3$$

(öt pontos) formula segítségével kaptuk.

Az Adams—Nyström-módszerrel kapcsolatban az ötödik differenciákat még figyelembe vettük; a Runge—Kutta módszerrel kapcsolatosan a lépésközt $0,3$ nagyságúnak választottuk. Így kb. azonos időt kellett fordítanunk a három módszernél a közelítőértékek számítására. Az eredményeket a következő oldalon található táblázatunk tartalmazza.

A hibabecslést illetően a kvadratúrahibával csak keveset foglalkozunk.

Az $(n+1)$ darab ekvidisztans alappontra támaszkodó mechanikus kvadratúra esetén a hibát az

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

		módszerünkkel	Adams— Nyström- módszerrel	Runge—Kutta- módszerrel
x	y (x)	kapott eredmények		
—0,1	2,424604			
0	2,5			
0,1	2,62159			
0,2	2,78146			
0,3	2,9740	2,9741	2,9741	2,9812
0,4	3,1959	3,1959	3,1959	
0,5	3,4448	3,4449	3,4449	
0,6	3,7204	3,7205	3,7203	3,7280
0,7	4,0228	4,0229	4,0231	
0,8	4,3528	4,3530	4,3521	
0,9	4,7123	4,7123	4,7146	4,7201
1,0	5,1026	5,1027	5,0960	
1,1	5,5262	5,5262	5,5446	
1,2	5,9856	5,9856	5,9333	5,9946

függvény segítségével a következő alakban becsülhetjük [2]:

$$|H| \leq \frac{\text{Max } |g^{n+1}(x)|}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x_n} |\omega(\xi)| d\xi,$$

ahol g^{n+1} jelenti az integrálandó $g(x)$ függvény $n+1$ -edik deriváltját.

A gyakorlatban azonban ezen becslőformulánál sokkal jobban használható a következő közelítő hibabecslő formula:

$$H_n \sim \begin{cases} \Omega_n \left[\frac{(n-1)h}{2} \right]^{n+1} \frac{g^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}, & \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \\ \Omega_n \left[\frac{(n-1)h}{2} \right]^n \frac{g^n(\xi)}{n!}, & \text{ha } n \text{ páros szám,} \end{cases}$$

$$\text{ahol } \Omega_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2} - \sum_{i=0}^n \left(-1 + \frac{2i}{n}\right)^{n+2} C_i, & \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \\ \frac{1}{n+1} - \sum_{i=0}^n \left(-1 + \frac{2i}{n}\right)^{n+1} C_i, & \text{ha } n \text{ páros szám,} \end{cases}$$

h jelenti a lépésközt, C_i a Newton—Cotes-számokat, és $x_0 < \xi < x_n$ [3]. Ω_n néhány értékét közöljük:

$$\Omega_3 = -\frac{2}{15}; \quad \Omega_4 = -\frac{8}{135}; \quad \Omega_5 = -\frac{1}{42}; \quad \Omega_7 = -\frac{56}{8505}.$$

Ennek alapján felírhatjuk bármely kombinációs formula hibabecslését. Így pl. a (3') formulával kapcsolatban a pontos értékek között fennáll a következő reláció:

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_i + \varepsilon_q$$

ahol α_i , ill. β_i jelentése a (7) képletből ismert,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{c_n} [\varepsilon_{qj} - \varepsilon_{qb}],$$

ahol ε_{qj} , ill. ε_{qb} a (3') formula jobb-, ill. baloldalán szereplő kvadratúra hibája,

Mivel a közelítő értékek között az

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i F_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i Y_i$$

egyenlet áll fenn, a két egyenlet kivonásával azonnal kapjuk a hibákra vonatkozó

$$(10) \quad \varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \eta_i + \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \varepsilon_i - \varepsilon_q \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i f'_y(x_i, Y_i) + \beta_i) \varepsilon_i - \varepsilon_q$$

összefüggést, ahol ε_i és η_i a (7) képletből ismert jelentésűek.

Több képlet kombinációjából álló formula hibabecslését hasonló módon végezhetjük.

Az elsőrendű differenciálegyenletek tárgyalását ki kellene egészítenünk olyan formulagyűjteménnyel, amelyből f'_y különböző értékeihez jól használható formulákat választhatnánk ki. Ilyen formulagyűjtemény azonban még nem készült.

2. § A magasabbrendű differenciálegyenletek kezdetiérték-feladatai

Ezt a problémakört csak érintjük. Az

$$(1) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

alakú differenciálegyenlet numerikus megoldásával foglalkozunk. Módszerünk elvben az 1. §-ban alkalmazott módszerrel megegyezik.

Így pl. — az 1. §-ban elmondottakhoz hasonlóan — könnyen belátható, hogy az (1) egyenlet bármely megoldása kielégíti az

$$(2) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(x_0) + (x - x_0) y^{(k-1)}(x_0) + \\ + \int_{x_0}^x (x - \xi) f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletet. Ugyanígy igen egyszerűen belátható, hogy a (2) egyenlet bármely, egy G tartományban $(k - 1)$ -szer folytonosan differenciálható megoldása kielégíti az (1) differenciálegyenletet.

Felhasználjuk ezenkívül az

$$(3) \quad y^{(i)}(x) = y^{(i)}(x_0) + \int_{x_0}^x y^{(i+1)}(\xi) d\xi; \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-3),$$

alakú integrálegyenletek rendszerét is, amelyeket nyilván bármely $(i + 1)$ -szer differenciálható függvény kielégít.

A numerikus megoldással kapcsolatban a kezdeti szakasz számításával itt sem foglalkozunk. Ismertnek tekinthetjük tehát az

$$\begin{array}{ll} y(x_0); y(x_1); \dots; & y(x_{n-1}) \\ y'(x_0); y'(x_1); \dots; & y'(x_{n-1}) \\ \dots & \dots \\ y^{(k-1)}(x_0); y^{(k-1)}(x_1); \dots; & y^{(k-1)}(x_{n-1}) \end{array}$$

értékrendszer

$$\begin{array}{ll} Y_0; Y_1; \dots; & Y_{n-1} \\ Y'_0; Y'_1; \dots; & Y'_{n-1} \\ \dots & \dots \\ Y_0^{k-1}; Y_1^{k-1}; \dots; & Y_{n-1}^{k-1} \end{array}$$

közelítőértékeinek rendszerét, ahol x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , és x_n az $[x_0, x_n]$ szakasz ekvidisztans osztáspontjai.

Ezen közelítőértékek segítségével számítani tudjuk az

$$f(x_0, y(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)); f(x_1, y(x_1), \dots, y^{(k-1)}(x_1)); \dots; f(x_n, y(x_n), \dots, y^{(k-1)}(x_n)) \text{ értékek}$$

$$F_0; F_1; \dots; F_{n-1}$$

közelítő értékeit.

Az y_n helyen először $y^{(k-2)}(x_n)$ közelítőértékét, Y_n^{k-2} -et számítjuk ki, és pedig a (2) egyenletből mechanikus kvadratúrával adódó:

$$(2') \quad Y_n^{k-2} = Y_0^{k-2} + (x_n - x_0) [Y_0^{k-1} + c_0(x_n - x_0) F_0 + \\ + c_1(x_n - x_1) F_1 + \dots + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) F_{n-1}]$$

formula segítségével.

Ezután Y_n^{k-3} értékét számítjuk, és pedig a (3) egyenletből mechanikus kvadratúrával előálló :

$$(3') \quad Y_n^{k-3} = Y_0^{k-3} + (x_n - x_0) [c_0 Y_0^{k-2} + c_1 Y_1^{k-2} + \dots + c_n Y_n^{k-2}]$$

egyenlet segítségével. Ugyanígy számítjuk egymásután

$$Y_n^{k-4}; Y_n^{k-5}; \dots; Y'_n; Y_n$$

értékét.

Az x_n helyen most már csak Y_n^{k-1} és F_n értéke ismeretlen. Ha az (1) differenciálegyenlet hiányos, t. i. az f függvény $y^{(k-1)}(x)$ -től nem függ (ez a gyakorlatban elég sokszor előfordul), akkor F_n értékét egyszerű helyettesítéssel máris kiszámíthatjuk. Külön foglalkozunk tehát a hiányos és a nem-hiányos differenciálegyenletek esetével, hiszen F_n értékét az x_{n+1} helyhez tartozó közelítőértékek számításánál fel kell használnunk, Y_n^{k-1} értékére pedig csak az x_{2n} helyhez tartozó közelítőértékek számításánál van szükségünk.

A nem-hiányos differenciálegyenletek esetében F_n értékét csak Y_n^{k-1} ismeretében tudjuk kiszámítani. Y_n^{k-1} értékét (éppúgy mint az 1. §-ban Y_n értékét) az

$$(4) \quad \int_{x_0}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi = y^{(k-1)}(x_0)(x - x_0) + \\ + \int_{x_0}^x (x - \xi) f(\xi, y(\xi), y'(\xi); \dots; y^{k-1}(\xi)) d\xi$$

$$(5) \quad \int_{x_0}^x (x - \xi)^m y^{(k-1)}(\xi) d\xi = y^{(k-1)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{m+1}}{m+1} + \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^{m+1}}{m+1} f(\xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{k-1}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletek segítségével számíthatjuk. Elvileg már a (4) egyenletből mechanikus kvadratúrával adódó :

$$(4') \quad c_0 Y_0^{k-1} + c_1 Y_1^{k-1} + \dots + c_n Y_n^{k-1} = Y_0^{k-1} + \\ + c_0 (x_n - x_0) F_0 + c_1 (x_n - x_1) F_1 + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-1}) F_{n-1}$$

formula alkalmas volna Y_n^{k-1} értékének kiszámítására.

Az így kapott közelítőértékre azonban az öröklött hibák befolyása éppoly nagy lenne, mint az 1. §-ban (3') közvetlen alkalmazásakor az Y_n közelítőértékére. Ezért az öröklött hiba csökkentése céljából itt is előnyös az 1. §

mintájára kombinációs formulákat használunk, amelyeket egyrészt a (4') egyenlet, másrészt az (5) egyenletekből mechanikus kvadratúrával adódó

$$(5') \quad c_0 (x_n - x_0)^m Y_0^{k-1} + c_1 (x_n - x_1)^m Y_1^{k-1} + \dots + c_{n-1} (x_n - x_{n-2})^m Y_{n-1}^{k-1} = \\ = Y_0^{k-1} \frac{(x_n - x_0)^{m+1}}{m+1} + \left[c_0 \frac{(x_n - x_0)^{m+1}}{m+1} F_0 + \right. \\ \left. + c_1 \frac{(x_n - x_1)^{m+1}}{m+1} F_1 + \dots + c_{n-1} \frac{(x_n - x_{n-1})^{m+1}}{m+1} F_{n-1} \right]$$

egyenletek, végül az

$$(6) \quad y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi), y'(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi$$

integrálegyenletből mechanikus kvadratúrával kapott

$$(6') \quad Y_p^{k-1} = Y_0^{k-1} + (x_p - x_0) [c_0^* F_0 + c_1^* F_1 + \dots + c_p^* F_p]$$

egyenlet felhasználásával képezhetünk. A (6') egyenletben *-gal jelöltük, hogy az együtthatók az $(n-1)$, ill. $(n-2)$ alapponthoz tartozó Newton-Cotes-számokat jelentik; p ennek megfelelően $(n-1)$ -gyel, ill. $(n-2)$ -vel egyenlő.

A legkedvezőbb formula megkeresése itt lényegesen komplikáltabb feladat, mint az 1. §-ban, mert F hibáját sokkal több közelítőérték befolyásolja. Ezt a kérdést nem akarjuk részletesen megvizsgálni ehelyütt. Az öröklött hiba csökkentése érdekében megfelelőnek látszik az az eljárás, amikor csak az $Y^{(k-1)}$ értékek hibáját vesszük tekintetbe. Ekkor — az 1. § mintájára — olyan formulát kell alkotnunk a (4'), (5'), (6') egyenletek segítségével, amelynél az $|\alpha_i f'_{y^{k-1}} + \beta_i|$ értékek lehető kicsinyek ($i = 0, 1, 2, \dots, n-2$), e mellett $-0,5 > \alpha_{n-1} f'_{y^{k-1}} + \beta_{n-1} > -1$. Az α_i és β_i értékek itt nemcsak jelentésükben, hanem számértékükben is egyeznek az 1. § hasonló kifejezésében szereplő értékekkel. Az ott alkalmazottnak talált formulák tehát itt is közvetlenül felhasználhatók.

Hiányos differenciálegyenletek esetében sokkal egyszerűbb Y_n^{k-1} értékének számítása. Ilyenkor ugyanis F_n értékét Y_n^{k-1} ismerete nélkül számíthatjuk. Ennek következtében a (6) egyenletből (de most $x = x_n$ választással) adódó

$$(6'') \quad Y_n^{k-1} = Y_0^{k-1} + (x_n - x_0) [c_0 F_0 + c_1 F_1 + \dots + c_n F_n]$$

relációt közvetlenül felhasználhatjuk Y_n^{k-1} számításához.

Megjegyezzük, hogy a lépésköz választására, ill. az integrációs intervallum hosszára vonatkozóan az 1. §-ban elmondottak változatlanul érvényesek. A hibabecslés elvileg szintén ugyanúgy történhet, mint az 1. §-ban.

Kiegészítőleg egy feladat kapcsán összehasonlítjuk módszerünket a leggyakrabban alkalmazott eljárással, a Störmer-féle extrapolációs módszerrel.

Az

$$y'' = 2y(1 + y^2); y(0) = 0; y'(0) = 1;$$

feladatot választottuk e célra. A feladat exakt megoldása :

$$y = \operatorname{tg} x.$$

x	u (x)	módszerünkkel		Störmer-módszerrel	
		kapott értékek és ezek hibáinak 10 ⁶ -szerese			
—0,1	—0,10033				
0	0				
0,1	0,10033				
0,2	0,20271				
0,3	0,30934	0,30934	0	0,30934	0
0,4	0,42279	0,42279	0	0,42280	+1
0,5	0,54630	0,54630	0	0,54630	0
0,6	0,68414	0,68413	—1	0,68412	—2
0,7	0,84229	0,84228	—1	0,84224	—5
0,8	1,02964	1,02961	—3	1,02952	—12
0,9	1,26016	1,26008	—8	1,25988	—18
1,0	1,55740	1,55722	—18	1,55672	—68

A Störmer-módszert alkalmazva a negyedik differenciákat még figyelembe vettük ; így a közelítőértékek számítására fordított idő a Störmer-módszer alkalmazásakor némileg nagyobb volt.

3. § Magasabbrendű differenciálegyenletek kerület- és sajátértékfeladatai

Amint a bevezetésben is említettük, módszerünk elsősorban az ilyen feladatok egyszerű, de mégis pontos numerikus megoldására alkalmas. Ezt egyrészt az a tény indokolja, hogy a kezdetiérték-problémáknál módszerünk bizonyos mértékig hátrányban volt a differencia-módszerekkel szemben, mert azoknál az integrációs intervallum egyetlen lépésközzre terjedt csak ki általában ; a kerületérték-feladatoknál viszont egyetlen integrációs intervallumnak kell tekintenünk a teljes tartományt. Másrészt nagymértékben fokozni tudjuk az alkalmazott mechanikus kvadratúra pontosságát azáltal, hogy nem ekvidisztrans alappontokra, hanem pl. a Gauss-féle mechanikus kvadratúra alappontjaira támaszkodunk, hiszen itt az eljárás folytatásáról nincs szó.

Az

$$(1) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

k -adrendű differenciálegyenlet megoldásával foglalkozunk tehát bizonyos előírt

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_\nu(\alpha; y(\alpha); y'(\alpha); \dots; y^{(\nu)}(\alpha)) &= b_\nu; \nu = 1; 2; \dots \\ \psi_\kappa(\beta; y(\beta); \dots; y^{(\kappa)}(\beta)) &= c_\kappa; \kappa = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

kerületi feltételek mellett.

Az eddigiekhez hasonlóan az (1) egyenlethez hozzárendeljük az integrálegyenleteknek egy seregét. (1) bármely megoldása bármelyik integrálegyenletet kielégíti, viszont bármely integrálegyenletnek valamely G tartományban folytonos és elegendően sokszor folytonosan differenciálható megoldásai kielégítik az (1) egyenletet is. Így pl. a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$(3.1) \quad y^{(k-1)}(x) = y^{(k-1)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi,$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi &= y^{(k-1)}(\alpha)(x-\alpha) + \\ &+ \int_{\alpha}^x (x-\xi) f(\xi, y(\xi), \dots, y^{(k-1)}(\xi)) d\xi; \end{aligned}$$

$$(3.p) \quad \begin{aligned} \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^{p-1} d\xi &= \frac{(x-\alpha)^p}{p} y^{(k-1)}(\alpha) + \\ &+ \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^p}{p} f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi; \end{aligned}$$

$$(4.1/a) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x y^{(k-1)}(\xi) d\xi$$

$$(4.1/b) \quad y^{(k-2)}(x) = y^{(k-2)}(\alpha) + (x-\alpha) y^{(k-1)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi;$$

$$(4.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-2)}(\xi) d\xi = (x-\alpha) y^{(k-2)}(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y^{(k-1)}(\xi) d\xi;$$

$$(4.2/b) \quad \int_{\alpha}^x y^{(k-2)}(\xi) d\xi = (x-\alpha) y^{(k-2)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} y^{(k-1)}(\alpha) + \\ + \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} f(\xi, y(\xi), \dots) d\xi;$$

.....

stb. Végül :

$$(5.1/a) \quad y'(x) = y'(\alpha) + \int_{\alpha}^x y''(\xi) d\xi;$$

$$(5.1/b) \quad y'(x) = y'(\alpha) + y''(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y'''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(5.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi = y'(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y''(\xi) d\xi;$$

$$(5.2/b) \quad \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi = y'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} y''(\alpha) + \int_{\alpha}^x \frac{(x-\xi)^2}{2!} y'''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(6.1/a) \quad y(x) = y(\alpha) + \int_{\alpha}^x y'(\xi) d\xi;$$

$$(6.1/b) \quad y(x) = y(\alpha) + (x-\alpha) y'(\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y''(\xi) d\xi;$$

.....

$$(6.2/a) \quad \int_{\alpha}^x y(\xi) d\xi = y(\alpha)(x-\alpha) + \int_{\alpha}^x (x-\xi) y'(\xi) d\xi;$$

.....

A numerikus számítás keresztülvitele céljából az integrálegyenletek fentebb megadott sokaságából bizonyos számú egyenletet választunk ki, és a bennük szereplő integrálokat mechanikus kvadratúrával közelítjük. Legegyszerűbb az integrálokat azonnal a teljes $[\alpha, \beta]$ közre számítani. Bizonyos

esetekben azonos számolási munkával nagyobb pontosságot tudunk azonban elérni, ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumot két vagy több részre osztjuk majd. Tegyük fel, hogy n darab belső osztáspontot veszünk fel az $[\alpha, \beta]$ intervallumban. Ez általában $(n + 2)k$ közelítőérték meghatározását teszi szükségessé. Közöttük a kerületi feltételek k relációt határoznak meg. Tehát $(n + 1)k$ integrálegenlet felvételére van szükség.

Az elmondottakat néhány példán fogjuk szemléltetni, amelyek kapcsán egyszersmind összehasonlítjuk módszerünk hatékonyságát az ismert módszerekével. Ezt megelőzően azonban néhány megjegyzést akarunk előre bocsátani.

A probléma természetéből következően a legnagyobb pontosságot (legkevesebb numerikus munka árán) nem a Gauss-féle mechanikus kvadrátúra alkalmazásával érhetjük el, hanem egy olyan mechanikus kvadrátúrával, amelynél az intervallum végpontjai is szerepelnek a kvadrátúra alappontjai között. A többi alappontot és a súlyokat úgy állapítjuk meg, hogy a formula a lehető legmagasabb fokszámú polinomra is pontos legyen. Így pl. $[-1, +1]$ intervallumban négy, ill. öt alappont esetén alappontokul, ill. súlyokul a következőket kapjuk:

alappont	-1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$+\frac{1}{\sqrt{5}}$	1	
súly	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	
alappont	-1	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{7}}$	1
súly	$\frac{1}{20}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{64}{180}$	$\frac{49}{180}$	$\frac{1}{20}$

Hogy így (ugyanakkora munkával) a Gauss-féle kvadrátúránál nagyobb pontosságra számíthatunk, az egyszerűen abból a tényből következik, hogy az integrációs intervallum két szélső pontjában felvett függvényértékek és deriváltértékek egyenleteinkben mindenképp szerepelnek, Gauss-féle mechanikus kvadrátúra alkalmazása esetén azonban nem használjuk fel őket.

Az integrációs intervallumot a kerületi feltételek megszabják. Esetleg ugyanakkora munkával nagyobb pontosságot érhetünk azonban el, ha az $[\alpha, \beta]$ közt két vagy több, egymást esetleg részben átfedő szakaszra osztjuk, egyenleteinket az egyes szakaszokra külön-külön írjuk fel, és ezeket mint egyetlen egyenletrendszert oldjuk meg.

Első pillanatra meglepő az a tény, hogy olyan integrálegenletekből indulunk ki, amelyek nem függetlenek, s a közelítőértékekre felírt egyenletrendszer általában mégis egyértelműen megoldható. Ennek igazolásával itt nem foglalkozunk; példáink azonban meggyőznek erről.

Az eljárás hibabecslésével sem foglalkozunk, csak megjegyezzük, hogy a hibabecslés elvégezhető az 1. § hibabecslésének, valamint a lineáris egyenletrendszer megoldása hibabecslésének alapján.

Első példaként az

$$y'' = -(y + x); \quad y(0) = y(1) = 0$$

kerületértékproblémát tárgyaljuk, amelynek exakt megoldása :

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

Ezt a feladatot összehasonlításképp a Ritz-féle eljárással, továbbá a hibanégyzet-minimalizálásával is megoldottuk.

Ez utóbbi módszer abban áll, hogy a kerületi feltételeket kielégítő, határozatlan mennyiségeket is tartalmazó függvények közül azt a függvényt keressük meg, amelyre a differenciálegyenlet oldalaiból alkotott különbség négyzetének integrálja minimális. Feladatunknál az

$$a_1 (x - x^2) + a_2 (x - x^3)$$

függvényekkel dolgoztunk így.

Ugyanezt a függvényosztályt használtuk a Ritz-módszerrel való megoldásnál is.

Módszerünket a következő módon alkalmaztuk : a $[0, 1]$ intervallumot 3 belső osztásponttal négy egyenlő részre osztottuk.

A megoldásnál a következő integrálegyenletekből adódó összefüggéseket használtuk fel :

- (6.1/a) egyenlet, a $(0;0,5)$ szakaszon integrálva,
- (3.1) egyenlet, a $(0;0,5)$ szakaszon integrálva (esetünkben $k = 2$),
- (6.1/b) egyenlet, a $(0;0,5)$ szakaszon integrálva,
- (6.1/b) egyenlet, a $(0,25 ; 0,75)$ szakaszon integrálva,
- (6.1/b) egyenlet, a $(0,5;1)$ szakaszon integrálva, és végül
- (6.1/b) egyenlet, a $(0;1)$ szakaszon integrálva.

Ezen egyenletekben 6 ismeretlen szerepei, éspedig $y(0,25)$; $y(0,5)$; $y(0,75)$; $y'(0)$; $y'(0,25)$ és $y'(0,5)$ közelítőértéke. A 6 egyenletből álló rendszer egyértelműen megoldható.

Mindhárom módszernél a numerikus munka körülbelül azonos időt emésztett fel — az általunk javasolt módszer talán minimálisan többet. Az alábbiakban közlünk egy táblázatot, amelyben az $Y_{0,5}$ -re és az Y_0 -ra talált értékek hibáit hasonlítjuk össze.

	Pontos érték	Ritz-módszer	Hibája	Hibanégyzet m	Hibája	Momentum m	Hibája
$Y_{0,5}$	0,06975	0,06944	—0,45%	0,06807	—2,4%	0,07014	—0,55%
Y_0'	0,18840	0,19241	+2,1%	0,18754	—0,46%	0,19004	+0,87%

Második feladatként az

$$(1 + x) y'' + y' + \lambda (1 + x) y = 0 ; y'(0) = y(1) = 0$$

sajátértékproblémát tárgyaljuk. E feladatot *Collatz* (Numerische Behandlung von Differentialgleichungen c. könyvében) több különböző módszer segít-

ségével oldja meg, pl. a Ritz-módszerrel, differenciálegyenletek segítségével, továbbá néhány ú. n. többpontos differenciálegyenlet segítségével. Az eredményeket és a módszerek leírását a 101, 115, 119–120, továbbá a 140. oldalon találjuk meg.

Módszerünket alkalmazva a differenciálegyenletet ilyen alakban írjuk fel:

$$[(1+x)y'(x)]' = -\lambda(1+x)y(x).$$

Az egyenlet kétszeri, ill. háromszori integrálásával (és egyes, az egyenletekben szereplő integrálok parciális integrálás segítségével történő átalakításával) a következő két integrálegyenletet származtathatjuk:

$$\begin{aligned}(1+x)y(x) - y(0) - \int_0^x y(\xi) d\xi &= -\lambda \int_0^x (x-\xi)(1+\xi)y(\xi) d\xi; \\ \int_0^x (1+\xi)y(\xi) d\xi - xy(0) - \int_0^x y(\xi)(x-\xi) d\xi &= \\ &= -\frac{\lambda}{2} \int_0^x (x-\xi)^2(1+\xi)y(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

A felírt integrálegyenletekben szereplő integrálokat az $x=0$; $x=\frac{1}{2}$ és $x=1$ pontokra támaszkodó mechanikus kvadratúrával (Simpson-szabály) közelítjük. Így kétismeretlenes (homogén) egyenletrendszert kapunk $y(0)$ és $y\left(\frac{1}{2}\right)$, ill. λ közelítőértékei számára.

Az összehasonlításnál szóba jövő módszerek numerikus keresztülvitelére fordított időtartamokat illetően megjegyezzük, hogy a közönséges differenciálegyenletmódszer, továbbá az általunk javasolt módszer időráfordítás szempontjából a legkedvezőbb, a Ritz-módszer pedig a legkedvezőtlenebb, csaknem kétszerannyi munkát ad, mint az előbbieket.

Az első két (értékre legkisebb) sajátértékre a következő közelítéseket kapjuk:

Collatz könyvének adatai:

Pontos érték		101. oldal		115. oldal		119–120. oldal		Ritz-módszer		Módszerünk	
		érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba	érték	hiba
λ_1	3,2191	2,836	–12%	3,0413	–5,5%	3,0968	–3,8%	3,2185	–0,02%	3,1771	–1,3%
λ_2	22,9643	13,164	–43%	18,00	–22%	19,29	–16%	25,334	+10,3%	21,8229	–4,97%

Az eddig bemutatott két feladatnál a kerületi feltételek homogének voltak. A következőkben bemutatunk egy inhomogén kerületi feltételekkel kapcsolatos feladatot is. Az

$$y'' = y; y'(0) = 0; y(2) = 1$$

kerület-értékfeladat megoldása kapcsán pontosság és időráfordítás szempontjából is összehasonlítjuk a leggyakrabban alkalmazott módszert, a Ritz-módszert és módszerünk néhány változatát.

Ritz-módszerrel dolgozva

$$\varphi_1 = a_0 + x^2 \left[(1 - a_0) \frac{1}{4} + a_1 (x - 2) \right],$$

ill.

$$\varphi_2 = b_0 + x^2 \left[(1 - b_0) \frac{1}{4} + b_1 (x - 2) + b_2 (x - 2)^2 \right]$$

alakú függvényekkel közelítettünk.

Módszerünket ekvidisztans felosztás mellett és a 326. oldalon javasolt, a táblázatban optimálisnak nevezett felosztás mellett is kidolgoztuk. A függvényértékek közelítőértékeit a (4.1/b), (4.2/b) stb. egyenletekből származó megfelelő számú relációk segítségével számítottuk. Ezek ismeretében $y'(2)$ közelítőértéke a (3.1) egyenlet segítségével közvetlenül adódik. Az első derivált további közelítőértékeinek számítására viszont egyrészt a (6.1/a) egyenletet, másrészt a (6.2/a) és (3.2); (6.3/a) és a (3.3) stb. egyenletekből származó relációkból elegendő számú egyenletet használtuk fel.

Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

	Pontos érték	2 együt- hatós Ritz	3 együt- hatós Ritz	1 belső osztópont	2 belső ekvi- disztans osztópont	2 belső osztáspont és pedig *optimális*	3 belső osztáspont és pedig *optimális*
Idő- ráfordítás órában	—	2	7	0,25	0,8	1,3	3,2
$y(0)$ értéke	0,26580	0,27166	0,26546	0,26316	0,26453	0,26589	0,265796
hibája	—	+2,16%	-0,13%	-0,99%	-0,48%	+0,03%	0,0000%
$y(0,5)$ értéke	0,41016	0,40542	0,41012	0,42105	—	—	0,410153
hibája	—	-1,16%	-0,01%	+2,58%	—	—	~0%
$y'(0,5)$ értéke	0,31237	0,31584	0,31098	0,30702	—	—	0,312363
hibája	—	+1,1%	-0,45%	-1,71%	—	—	~0%
$y'(1)$ értéke	0,96403	0,92164	0,95968	0,98245	0,97272	0,96443	0,964027
hibája	—	-4,4%	-0,45%	+1,91%	+0,9%	+0,04%	~0%

- [1] *I. G. Petrovskij*: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről. Akadémiai Kiadó, 1952.
 [2] *I. P. Natanson*: Konstruktív függvénytan. Akadémiai Kiadó, 1952.
 [3] *C. Runge—R. König*: Numerisches Rechnen. Springer, Berlin.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. Фрей

Резюме

К решаемому дифференциальному уравнению найдены такие интегральные уравнения, которым удовлетворяет его решение. Приближения входящих в интегральное уравнение интегралов вычисляются с помощью механической квадратуры. В полученных таким образом формулах фигурируют значения искомой интегральной кривой находящиеся в некоторых произвольно выбранных точках. Упомянутые формулы, их системы и различные комбинации применимы для решения задач с начальными условиями и краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Описанные методы, в отношении обоих кругов задач, равноценны с известными до сих пор методами, за исключением вычисления исходной фазы задач с начальными условиями.

ANWENDUNG DER MOMENTE DER INTEGRALKURVEN ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

T. FREI

Zusammenfassung

Einer Differentialgleichung werden Integralgleichungen zugeordnet, die durch die Lösungsfunktion erfüllt sind. Die in den Integralgleichungen auftretenden Integrale werden durch mechanische Quadratur approximiert; in den so erhaltenen Formeln treten einige — willkürlich gewählte — Funktionswerte der gesuchten Integralkurve auf. Mit diesen Formeln, bzw. mit ihren Systemen und verschiedenen Kombinationen kann man die Rand- bzw. Anfangswertaufgaben der gewöhnlichen Differentialgleichungen numerisch lösen. Die hier besprochenen Methoden sind, mit Ausnahme der Berechnungen des sogenannten Anfangsabschnittes der Anfangswertaufgaben, in keinem der oben genannten beiden Problemklassen den bisher bekannten Methoden unterlegen.

EGY MAGYAR AUTOMATIKUS MÁSOLÓBERENDEZÉS MÁSOLÁSI PONTOSSÁGÁNAK MATEMATIKAI VIZSGÁLATA

FAZEKAS FERENC

Összefoglalás

A *Mintagépgyár* nemrég hozta nyilvánosságra *Hydrofix* nevű, hidraulikus elven működő, esztergapadra szerelhető automatikus másolóberendezését.

A szerző jelen cikkében a *Hydrofix*-ben lejátszódó másolási folyamat matematikai vizsgálatával foglalkozik. A szakirodalomban szokásos egyszerűsítő feltételekkel élve, a berendezés egy-két egyszerű (elsősorban a lineáris, holtjáték-mentes) matematikai modelljére végez itt minőségi tájékoztatásra alkalmas számításokat.

A szerző vizsgálja a másolási hiba nagyságának, durvább és finomabb becslésének, aszimptotikus magatartásának, ilyen hibák halmozódási módjának, csökkentésének, stb. a gyakorlatban jelentős kérdéseit és megállapításait konkrét sablon-meridián-görbékben szemlélteti. Érint továbbá a szerző olyan kérdéseket is, mint pl. a sablon előjavítása, a ferde kés-beállítás, stb.

Végül a szerző összehasonlítás céljából és a hazai kutatások részére ismerteti a *Turmakin* szovjet szerző cikkében leírt kétfokozatos, hidraulikus másolóberendezést és ennek egy-két javasolható változatát.

Bevezetés

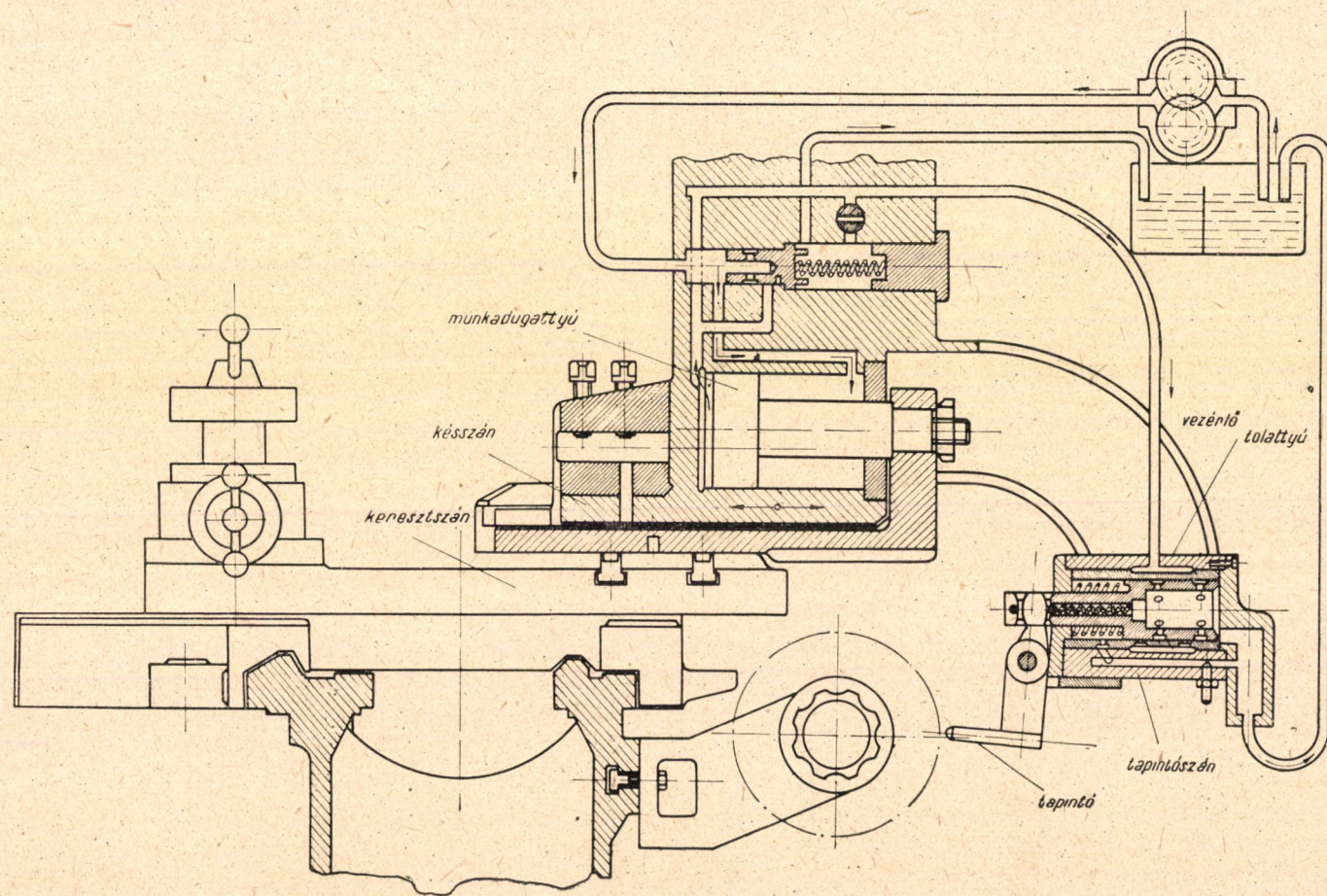
Az alábbiakban azon automatizálási tárgyú számítások első eredményeit ismertetjük, amely számítások a múlt év folyamán kezdődtek az *Alkalmazott Matematikai Intézet*ben, a *Mintagépgyár* felkérésére, e gyár szerszámgépen alkalmazott automatikus másolóberendezéseivel kapcsolatban.

A műszaki elmélet e nálunk eddig alig művelt területén csak a legutóbbi időben indult meg a munka — a külföldi, mindenekelőtt a gazdag szovjet szakirodalomra, valamint a szovjet és hazai gyakorlati tapasztalatokra támaszkodva. Így születtek a most ismertetendő kezdeti eredmények is. Számításaimról alkalmam volt beszámolni a *Magyar Tudományos Akadémia Mechanikai Automatizálási Szakbizottságának*, amely számos értékes útmutatással segítette további munkámat.

1. §

Ezek előrebocsátása után néhány szót e számítások tárgyáról, a *Mintagépgyár Hydrofix* nevű másolóberendezéséről!

Amint a sajtóból ismeretes, a *Mintagépgyár* a közelmúltban mutatta be a szakköröknek az általa tervezett és mintapéldányokban előállított



1. tábla

Hydrofix nevű készüléket. A bemutatónak az adott különös jelentőséget, hogy a *Hydrofix* az első hazai tervezésű és gyártmányú, esztergapadra szerelhető, hidraulikus elven működő automatikus másoló (kopírozó) berendezés. A Minta-gépgyár e sikeres kezdeményezésével jelentős lépést tett előre a hazai műszaki berendezések automatizálásának — ennek a szocializmus építése szempont-jából is döntő feladatnak — a területén. Az említett gyár már egy másik, ÉHM 200 (elektrohidraulikus másoló) nevű tökéletesebb készülék terveivel, kísérleteivel is szép előrehaladást ért el.

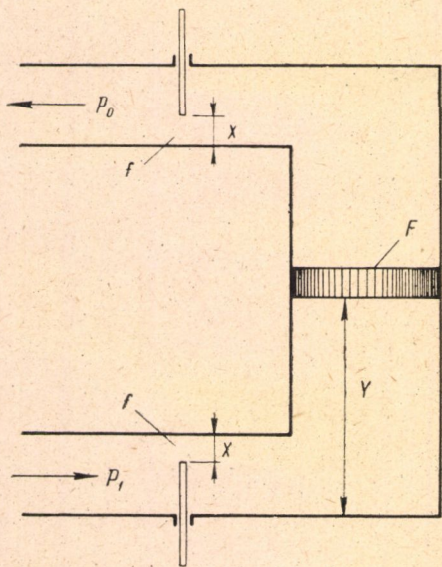
A *Hydrofix* szerkezete az 1. táblabeli elrendezési rajzon látható.

A készülék működéséről röviden a következőket mondhatjuk. — A for-gástest alakú mintadarabot, az ú. n. *sablont* az ú. n. *tapintó* tapogatja le. Elmoz-dulásával (amelyből a vele összeépített s a szerszámkést működtető szervó-motor elmozdulása levonódik) karos áttétel útján mozgásba hozza a *vezérlő tolattyút*, amely viszont az olajadagolást szabályozva a *szervómotort* működ-teti. Ennek dugattyúja az esztergapadhoz van erősítve, tehát a szervómotor hengere és a hozzá rögzített *szerszámkés* mozdul el. Ez utóbbi végül a *munka-darabra* másolja — több-kevesebb hűséggel — a sablon meridiángörbéjét.

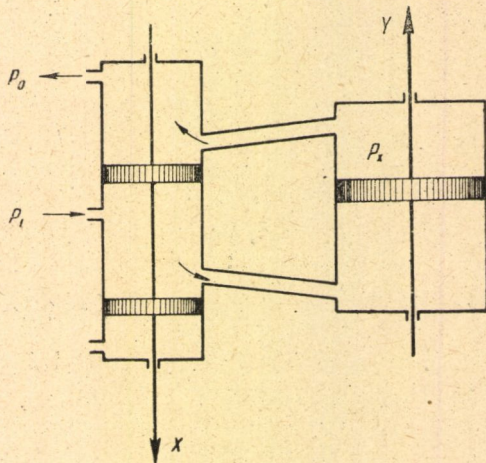
2. §

a) A másolóberendezésben központi helyet foglal el a szervómotor (vezérlőtolattyújával együtt). Tanulmányozzuk ezért előljáróban a *szervó-motor mozgásegységet* és vizsgáljuk meg a számítások megkönnyítését célzó egyszerűsítések, elhanyagolások lehetőségét.

Vegyük szemügyre a szervómotorból és vezérlőtolattyúból álló rendszer szerkezeti és elvi vázlatrajzát! (L. az 1. és 2. ábrát!) Jelölje f a tolattyú momen-tán nyílásának területét, p_1 a rajta beömlő, p_x a henger dugattyúja mögötti, p_0 a tolattyú nyílásán kiömlő olaj nyomását, γ az olaj fajsúlyát; F a henger dugattyújának homlokfelülete, X a ve-zérlőtolattyú elmozdulása, Y a dugaty-



1. ábra



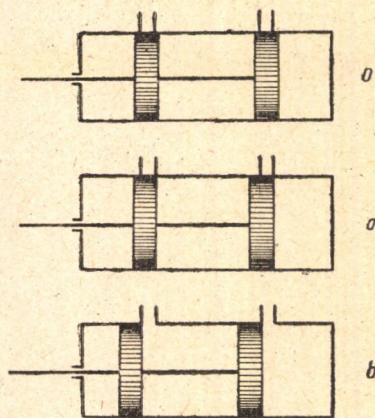
2. ábra

tyú elmozdulása. Legyen F mellett f elhanyagolhatóan kicsiny, azaz $f \ll F$. Egyelőre tegyük fel, hogy a hengerben a teljes $p_1 - p_x$ nyomáskülönbséggel meghatározott potenciális energia átalakul kinetikai energiává (ideális szervomotor). Ez esetben az olajszerű folytonosságot kifejező és a Bernoulli-egyenletre támaszkodó differenciálegyenlet így alakul: *

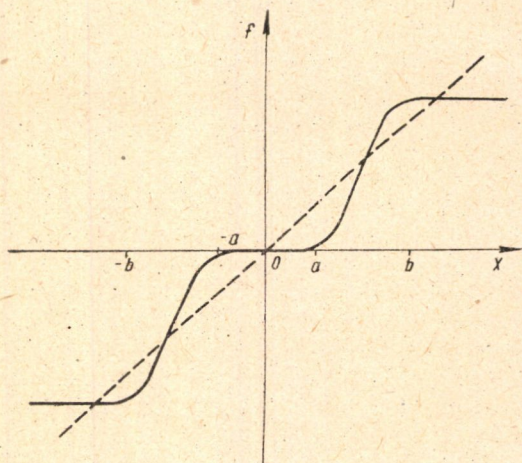
$$(1) \quad f \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_x)} dt = f \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_x - p_0)} dt = F dY,$$

vagy a

$$p_1 - p_x = p_x - p_0 = \frac{p_1 - p_0}{2}$$



3. ábra



4. ábra

körülmény figyelembevétele és rendezés után:

$$\dot{Y} = \frac{f}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0)} = f S,$$

ahol

$$(2) \quad S = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0)}.$$

Megjegyzendő, hogy a tolattyúnyílás f területe a tolattyú X elmozdulásának a függvénye:

$$(3) \quad f = \varphi(X).$$

Vizsgáljuk közelebbről e függvényt! A tolattyúábrázolt (l. a 3. ábrát) 0 és a helyzete között gyakorlatilag nem keletkezik nyílás, a és b helyzete között a nyílás f területe az X elmozdulás függvényében közel lineárisan változik,

* L. pl. Айзерман cit. [4]

végül a b helyzetén túl a nyílás gyakorlatilag állandó marad. Ilyen meggondolásokkal magyarázható a *tolattyú karakterisztikájának* a 4. ábrán látható alakja.

b) Az ideális szervómotor után most lássuk a *valóságos szervómotor* viszonyait. Ennél nem alakulhat a teljes $p_1 - p_x = \frac{p_1 - p_0}{2}$ nyomáskülönbség

sebességgé, mert ennek egy része felhasználódik a következő célokra: $\alpha)$ *hidraulikus ellenállások* legyőzésére [ez függ a dugattyú sebességétől, $\Delta p(\dot{Y})$], $\beta)$ a mozgatott tömegek, elsősorban a dugattyú *gyorsítására* $[M(Y)\ddot{Y}]$, és $\gamma)$ valamely hasznos *műszaki célra* [esetünkben a hengerből eszközölt forgácsolásra, $N(Y)$]. A $\beta)$ és $\gamma)$ erők a hengerben működnek s ezért területegységre vonatkoztatott értéküket F -fel való osztás útján nyerjük. A *valóságos szervómotor mozgásegyenlete* tehát — ezek figyelembevételével — így alakul:

$$(4) \quad \dot{Y} = \frac{\varphi(X)}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left[p_1 - p_0 - \Delta p(\dot{Y}) - \frac{M(Y)\ddot{Y}}{F} - \frac{N(Y)}{F} \right]}$$

Az itt szereplő mennyiségek *nagyságrendje* pl. egy gyorsjárású szervómotor esetén a következő: *

$$p_1 - p_0 \cong 5 \text{ kg/cm}^2, \Delta p \cong 0,5 \text{ kg/cm}^2, F \cong 10 \text{ cm}^2,$$

$$M(Y) \cong 0,0005 \text{ kgsec}^2/\text{cm}, N(Y) \cong 0,5 \text{ kg};$$

ezekkel a gyökalatti kifejezés:

$$\dot{Y} \cong 0,5 - \frac{0,0005 \ddot{Y}}{10} - \frac{0,5}{10} = 4,45 - 0,00005 \ddot{Y}$$

A most levezetett mozgásegyenlet némi átrendezéssel

$$\dot{Y}^2 + \frac{g\varphi^2(X)}{\gamma F^2} \left[\Delta p(\dot{Y}) + \frac{M(Y)}{F} \ddot{Y} + \frac{N(Y)}{F} - (p_1 - p_0) \right] = 0,$$

vagy további rendezés és általánosítás után

$$(5) \quad \dot{Y} + \Phi(X, Y, \ddot{Y}) = 0$$

alakra hozható. Ezen Y -ban és \dot{Y} -ben *nem-lineáris differenciálegyenlet* exakt megoldása általában nem lehetséges. Ezért láthatóan kényszerítve vagyunk — legalább minőségi tájékoztatásra felhasználható számítások elvégzése érdekében — *egyszerűsítéseket, elhanyagolásokat* eszközölni, figyelembevéve a fentebbi számadatokat és a *tolattyú* $f = \varphi(X)$ karakterisztikáját.

c) Szokás szerint a $\Delta p(\dot{Y})$ és az $\frac{N(Y)}{F}$ függvények (mérések útjántör-

tető) meghatározása helyett ezeket állandónak, tapasztalati átlagértékükkel egyenlőnek vesszük. Az utóbbit — a számadatok szerint — el is hanyagolhatjuk. Hasonlóan kezelhetjük az $M(Y)\ddot{Y}/F$ tagot, annál is inkább, mert ez — az említett számadatok mellett — még $a \cong g$ gyorsulás esetén is mind-

* Айзерман cit. [4], 71—89. o.

össze $0,05 \text{ kg/cm}^2$ nagyságrendű. Ilyen egyszerűsítések, elhanyagolások után mozgásegyenletünk a következő alakban írható :

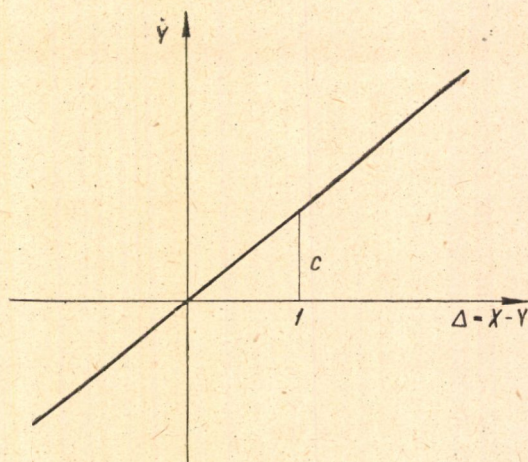
$$(6) \quad \ddot{Y} = S_0 \varphi(X), \text{ ahol } S_0 = \frac{1}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} (p_1 - p_0 - \Delta p^*)} ;$$

itt Δp^* tehát a hidraulikus ellenállásokra, esetleg forgácsoló és tehetetlenségi erőkre számításba vett tapasztalati állandó. Mivel p_1 és p_0 előírt értékűek, ilymódon az S_0 állandónak tekinthető. Az

$$\ddot{Y} = S_0 \varphi(X)$$

mozgásegyenlet tehát azt jelenti ki, hogy a dugattyú \ddot{Y} sebessége arányos a tolattyú f nyílásával, mely utóbbi az X tolattyúelmozdulás $\varphi(X)$ függvénye.

d) A szervomotor lineáris modelljének mozgásegyenletéhez jutunk, ha



5. ábra

a most említett f tollattyúnyílást az X tolattyúelmozdulás lineáris (homogén) függvényének tekintjük, azaz :

$$(7) \quad f = b X,$$

ahol b nem egyéb, mint a 4. ábrán szaggatva rajzolt [az Ob szakaszon a tényleges $f = \varphi(X)$ görbét helyettesítő] egyenes irány-tg-e. Ezzel a szervomotor (holtjáték-mentes) lineáris modelljének mozgásegyenlete :

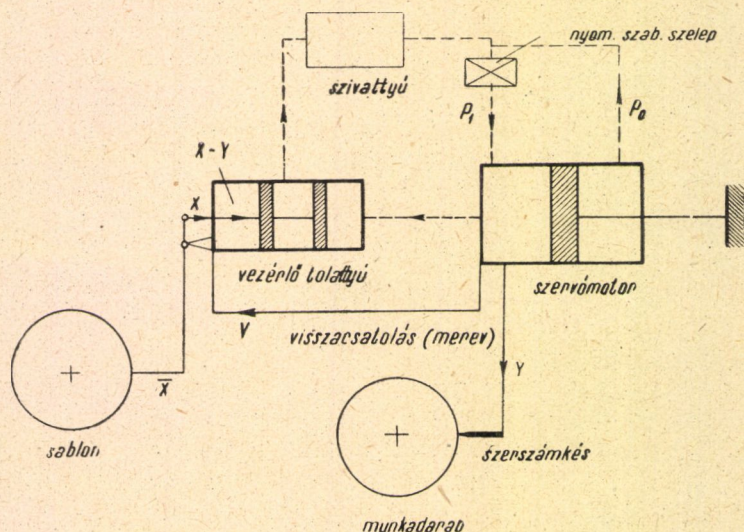
$$(8) \quad \ddot{Y} = cX, \text{ ahol } c = S_0 b.$$

Az alábbiakban elsősorban e differenciálegyenlet [-nek a szerszám és tapintó közti merev visszacsatolást is figyelembe vevő változata] alapján teszünk majd a másolási folyamat lefolyásáról, a másolás pontosságáról s ennek javításáról néhány megállapítást. A fentebb részletezett elhanyagolások, egyszerűsítések miatt a matematikai modellre előállítandó eredmények természetesen

szükségképen eltérnek majd a valóságos folyamat mérési adataitól és *csak első közelítő, tájékoztató eredményeknek tekinthetők*. Mindazonáltal a valóságos szervómotor mozgásegyenletének bonyolultsága való tekintettel e tájékoztató megállapításokat is becsesnek kell minősíteni. Megjegyzendő, hogy a szakirodalomban rendszeresen használják a szervómotor fentebb felírt egyszerűsített elsőrendű lineáris differenciálegyenletét.*

Ki fogunk térti végül röviden egy-két, a valósághoz közelebb álló tolaty-tü-karakterisztikájú modell vizsgálatára is.

e) Esetünkben — amint ez az 1. táblán és az 5. ábrán világosan látható — nem a tolattyúrúd X elmozdulása, hanem — a szervómotor [mozgó] hengere [és a hozzárögzített szerszámkés], valamint a vezértolattyú hengere közötti [az összeépítés folytán] *merev visszacsatolás* miatt — a tolattyú X



6. ábra

elmozdulásának és a szerszámkés Y elmozdulásának $\Delta = X - Y$ különbsége határozza meg a tolattyú f nyílását. Készülékünk *linedris modelljének differenciálegyenlete* tehát **

$$(9) \quad \dot{Y} = c(X - Y) = cA, \text{ azaz } \dot{Y} + cY = cX.$$

(L. az 5. ábrát!) Még egyszer kiemeljük, hogy Y — szemben a fentebbiekkel — a *Hydrofix*-nél a szervomotor hengere és a hozzáerősített szerszám elmozdulását jelenti [u. i. esetünkben a dugattyú rögzítve van], az X pedig — miként eddig — a tolattyúrúd elmozdulását, amely a *karos áttétel* miatt *arányos* a tapintó \bar{X} elmozdulásával. Az egyszerűség kedvéért az X -et fogjuk mégis a tapintó elmozdulásaként emlegetni. Ez ugyanaz, mint az X/\bar{X} áttételt 1-nek

* Айзерман cit. [4]

** Tumarkin cit. [3]

venni. [Megjegyezendő, hogy X -szel, a tapintó elmozdulásával és $X/\bar{X} = \alpha \neq 1$ áttétellel dolgozva, mozgásegyenletünk így alakulna :

$$\dot{Y} + c Y = \alpha X, \text{ ahol } \alpha = a c.$$

Mind az X , mind az Y az előtolás irányára *merőleges* elmozdulást jelent! A *Hydrofix* lineáris modellje a 6. ábrán látható, *blokkdiagramm* formájában.

3. §

a) Vizsgáljuk ezeketán matematikailag a *Hydrofix holtidékmentes, lineáris karakterisztikájú modelljében lejátszódó másolási folyamatot* — előbb általában, majd néhány, a gyakorlatban előforduló sablon-meridiángörbe esetére.

Egyelőre tegyük fel, hogy a másolási folyamat *kezdetén* a szerszámkés és a tapintó egyaránt *nyugalmi helyzetben* van, azaz a másoló *kezdeti hibája zérus*:

$$(10) \quad Y(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad \Delta(0) = X(0) - Y(0) = 0.$$

A másolási folyamat *differenciálegyenlete* és a *kezdeti feltétel* tehát így alakul :

$$(11) \quad \frac{dY(t)}{dt} + c Y(t) = c X(t), \quad Y(0) = 0.$$

b) Állítsuk elő a hiba kifejezését tetszőleges t időpontra vonatkozólag és ennek birtokában keressünk lehetőleg egyszerű hibabecslő formulát. E célból szükségünk van e differenciálegyenletnek a *kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldására*. A közismert elemi megoldási módszer helyett itt célszerűbb [a későbbiekre való tekintettel és az automatikában kialakult szokás szerint] az

$$(12) \quad L[Y(t)] = \int_0^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt = y(p)$$

módon definiált *Laplace-transzformációval* dolgozni, felhasználva a

$$(13,a) \quad L[\dot{Y}(t)] = py(p) - Y(0) = y'(p)$$

ismert *transzformációs* és az

$$(13,b) \quad L^{-1}[y_1(p) y_2(p)] = \int_0^{+\infty} Y_1(\tau) Y_2(t-\tau) d\tau$$

inverziós formulát. Megjegyezendő, hogy a *Laplace-transzformáció* definíciója megköveteli, hogy $Y(t) = 0$ legyen, ha $t < 0$; ennek megfelelően :

$$L[Y(t)] = \int_0^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) e^{-pt} dt.$$

c) *Differenciálegyenletünk Laplace-transzformáltja*, a kezdeti feltétel figyelembevételével :

$$p y(p) + c y(p) = c x(p), \text{ azaz } y(p) = \frac{c}{p+c} x(p).$$

Ebből nyerhető a szerszám és tapintó elmozdulása (az ú. n. kimenő és bemenő jel) *Laplace-transzformáltjának* hányadosaként (a visszacsatolás miatt *zárt rendszerünk* ú. n. *átviteli (transzfer) függvénye*:

$$(14) \quad M(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{c}{p+c} = \frac{1}{1+Tp}, \quad T = \frac{1}{c};$$

továbbá a másolási hiba és a tapintó elmozdulása (a jelkülönbség és a bemenő jel) *Laplace-transzformáltjának* hányadosaként a *hiba-átviteli függvény*:

$$(15) \quad D(p) = \frac{\delta(p)}{x(p)} = \frac{x(p) - y(p)}{x(p)} = 1 - M(p) = \frac{p}{p+c} = \frac{Tp}{1+Tp}.$$

Megjegyzendő, hogy e fogalmak sok egyéb között fontos szerepet játszanak a *szervomechanizmusok modern* (nálunk még kevésbé használatos) *vizsgálati módszerében*. E széles matematikai alapokon álló, a matematikai eredményekből egyszerű fogalmakat, összefüggéseket, szabályokat, algoritmusokat, praktikus szimbolikát, szemléletes ábrákat kialakító ú. n. frekvencia-módszer különösen bonyolultabb lineáris rendszerek vizsgálatánál előnyös. E módszer (itt mellőzve!) matematikai alapjai és alkalmazása tekintetében utalok az Intézetben előkészületben lévő »*Automatikus szabályozások matematikai vizsgálata (különös tekintettel a másoló szerszámgépekre)*« c. cikkekre.*

A berendezés átviteli függvényének *pólusai* (másként az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei) mértekadók a másolási folyamat *stabilitása* szempontjából; kell, hogy e pólusok (gyökök) negatívak, ill. negatív valós részfűek legyenek. Egyszerű esetünkben nyilvánvaló a stabilitás, mert :

$$p_1 = -c < 0, \text{ lévén } c = \frac{1}{T} > 0.$$

A *másolási hiba* transzformáltja :

$$(16) \quad \delta(p) = D(p) x(p) = \frac{p x(p)}{p+c} = \frac{\dot{x}(p)}{p+c}.$$

Ebből látható, hogy :

$$(17) \quad \delta_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \delta(p) = \frac{x_0}{c}, \quad A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{c} \dot{X}_\infty;$$

* Jelen problémákkal kapcsolatban *Török Vilmos* kartárs volt szíves a frekvencia-módszer használatát röviden bemutatni; l. a következő cikket.

vagyis $t \rightarrow \infty$ -nél a hiba kiküszöbölődik, ill. állandósul, amennyiben

$$X \rightarrow \text{const, ill. } X \rightarrow at + b.$$

A másolás *jóságára* jellemző a másolási sebesség, gyorsulás, magasabb deriváltak, valamint a másolási hiba *Laplace*-transzformáltjának viszonya, ill. e viszony magatartása $p \rightarrow 0$ esetén. Most, mint a differenciálegyenletből világos, állandóan

$$(18) \quad J = \frac{\dot{y}}{\dot{\delta}} = \frac{c\dot{\delta}}{\dot{\delta}} = c.$$

A c tényező növelése tehát javítja a másolást.

d) Állapítsuk meg ezek után, visszatranszformálás útján, a szerszámkés elmozdulását, valamint a *másolás hibáját, tetszőleges t időpontra vonatkozólag*. A (14) és (15) alapján írható :

$$(19) \quad Y(t) = L^{-1} [M(p) x(p)] = L^{-1} \left[\frac{c}{p+c} x(p) \right] = \\ = c \int_0^t X(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau,$$

$$(20) \quad \Delta(t) = L^{-1} [D(p) x(p)] = L^{-1} \left[\frac{\dot{x}(p)}{p+c} \right] = \\ = \int_0^t \dot{X}(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau.$$

A 0 alsó határ helyett mindkét integrálban $-\infty$ is írható, tekintve, hogy $\tau < 0$ -ra $X(\tau) = \dot{X}(\tau) = 0$. Feltételezzük továbbá (egyelőre), hogy $X(\tau)$ görbéje folytonos (ugrásmentes) és rész-szakaszonként sima. A másolási hiba *ilyen alakban is* előállítható :

$$(21) \quad \Delta(t) = L^{-1} \{ [1 - M(p)] x(p) \} = X(t) - c \int_0^t X(\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau = \\ = ce^{-ct} \int_{-\infty}^t [X(t) - X(\tau)] e^{c\tau} d\tau.$$

e) A másolási hiba most nyert pontos kifejezéseit felhasználhatjuk *hibabecslő formulák* előállítására. Jelöljük V -vel az $X(\tau)$ görbe $0 \leq \tau \leq t$ szakaszminti *legnagyobb meredekségét*, vagy másként a tapintó $0 \leq \tau \leq t$ időközbeli legnagyobb sebességét :

$$V = \max_{[0,t]} |\dot{X}(\tau)|.$$

Ennek felhasználásával, a (20) alapján írható :

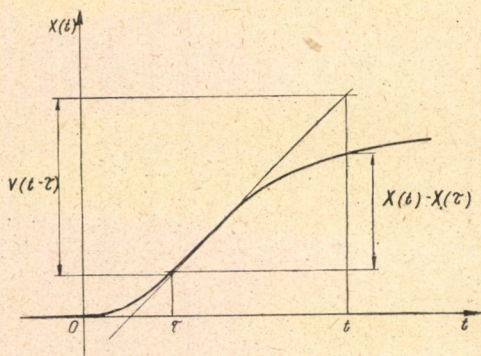
$$H = |A(t)| < V \int_{-\infty}^t e^{-c(t-\tau)} d\tau = \frac{V}{c}.$$

Ugyanez a (21)-ből is nyerhető, az

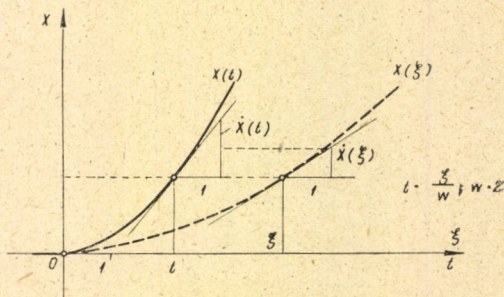
$$|X(t) - X(\tau)| < V(t - \tau), \text{ ha } -\infty < \tau < t$$

körülmény figyelembevételével :

$$H = |A(t)| < cV \int_{-\infty}^t e^{-c(t-\tau)} (t - \tau) d\tau = \frac{V}{c}.$$



7. ábra



8. ábra

A következő egyszerű hibabecslő formulát nyertük tehát :

$$(22) \quad H < \frac{V}{c}.$$

Figyelemre méltó, hogy differenciálegyenletünk értelmében :

$$|\dot{Y}| = cH$$

és a most megismert hibabecslő formula szerint :

$$V > cH, \text{ következésképpen } \max_{[0,t]} |\dot{X}| > |\dot{Y}|;$$

vagyis a szerszámkés sebessége a $0 \leq \tau \leq t$ véges időközben nem éri el a tapintó legnagyobb sebességét. A $H < \frac{V}{c}$ hibabecslő formulánk a $0 \leq \tau \leq t$ véges időközre is megerősíti az állandósult hibára már korábban tett megállapításunkat ; a másolás pontossága e szerint javítható a c jósági tényező növelése és a tapintó V maximális sebességének csökkentése útján.

Megjegyzendő, hogy e V -t a lemásolandó sablon $X(\zeta)$ -meridiángörbéjének alakja határozza meg, ahol ζ az $[X$ és Y tapintó-, ill. szerszám-elmozdu-

lásra merőleges irányú] *előtolási* elmozdulás, vagy másként a sablon és munkadarab elmozdulása. Ha ezen előtolás állandó $\dot{\zeta} = w$ sebességű [mint a gyakorlatban rendszerint], azaz $\zeta = wt$, akkor a *tapintó* $X(t)$ *út-időgörbéje* és a *sablon* $X(\zeta) = X(wt)$ *meridiángörbéje* egymásból egyszerű nyújtással v. zsugorítással előállítható, vagyis e két görbe *hasonló*. Meredekségük $\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\zeta} \frac{1}{w}$

értelmében egymással arányos (l. a 8. ábrát). E szerint a *másolás pontossága annál jobb, minél lankásabb a sablon meridiángörbéje*. Az $X(t)$ - és az $X(\zeta)$ -görbe hasonló lévén, a rövidség kedvéért az $X(t)$ görbét fogjuk a továbbiakban sablon-meridiángörbéként emlegetni, vagy ami ugyanaz, a *w* előtolási sebességét 1-nek vesszük.

A (20) és (21) alapján a (22)-nél pontosabb, de kevésbé egyszerű *hiba-becselő formulát* is nyerhetünk. Pl. a (20) alapján :

$$(23) \quad H \leq V \int_0^t e^{-c(t-\tau)} d\tau = \frac{V}{c} (1 - e^{-ct});$$

a (21) alapján pedig :

$$(24) \quad \begin{aligned} H &\leq cV \int_0^t (t-\tau) e^{-c(t-\tau)} d\tau + c|X(t)| \int_{-\infty}^0 e^{-c(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{V}{c} [1 - e^{-ct} (ct + 1)] + e^{-ct} |X(t)|. \end{aligned}$$

E becsléseknek a (22)-nél *pontosabb* volta nyilvánvaló, lévén :

$$1 > 1 - e^{-ct}, \text{ ill. } V\left(t + \frac{1}{c}\right) > |X(t)|.$$

A (23) és (24) egyenlőtlenségek $X(\tau) = a\tau$, vagyis egyenes sablon-meridiánvonal esetén válnak egyenlőségekké ; a $t \rightarrow \infty$ esetén pedig egyaránt a (22) egyenlőtlenségbe mennek át.

4. §

A holtjáték-nélküli, lineáris karakterisztikájú *Hydrofix*-modell másolási hibájára vonatkozó *eme általános megállapításokat most szemléltessük néhány gyakorlati meridiángörbén*.

a) *Lineáris sablon-meridiángörbe másolása.*

Ekkor a sablon-meridiángörbe egyenlete (l. a 9. és a 10. ábrát) :

$$X_0(t) = 0, \text{ ha } t < 0; \quad X_0(t) = vt = wtg \alpha \cdot t, \text{ ha } t \geq 0,$$

ahol X a tapintónak az előtolás irányára merőleges elmozdulása, v ugyan-

ennek a sebessége, w az előtolás [állandó] sebessége. A (19) felhasználásával a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete:

$$Y_0(t) = X_0(t) - \frac{v}{c}(1 - e^{-ct}), \quad t \geq 0.$$

tehát a másolási hiba:

$$\Delta_0(t) = \frac{v}{c}(1 - e^{-ct})$$

és nyilván $|\Delta_0(t)| < \frac{|v|}{c}$, összhangban a (20)- és (21)-gyel; $t \rightarrow \infty$ esetén pedig:

$$\Delta_{0,\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_0(t) = \frac{v}{c},$$

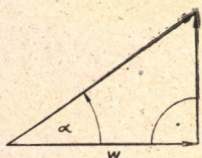
a (17)-nek megfelelően. A másolási hiba csökkentése tekintetében nyilvánvalóan helytálló a 3. § e)-ben tett megállapításunk.

b) Törött meridiánvonal másolása.

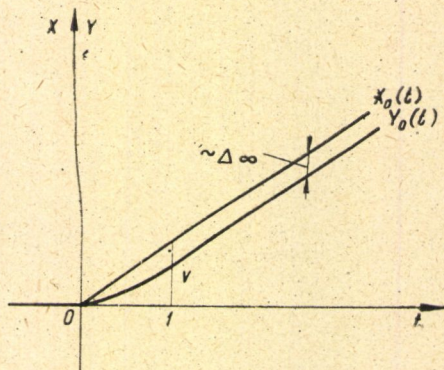
Legyen a lemásolandó meridiángörbe egyenlete (l. a 11. ábrát):

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ vt, & \text{ha } 0 \leq t \leq t_1 \\ vt_1, & \text{ha } t > t_1 \end{cases}.$$

Függvényünk az előbbi $X_0(t)$ függvény segítségével a következő módon fejezhető ki (l. a 12. ábrát):



9. ábra



10. ábra

$$X(t) = X_0(t) - X_0(t - t_1),$$

ahol mindegyik függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentum-értékekre. A Laplace-transzformáció lineáris függvényművelet lévén, a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete így írható:

$$Y(t) = Y_0(t) - Y_0(t - t_1),$$

a hiba kifejezése pedig:

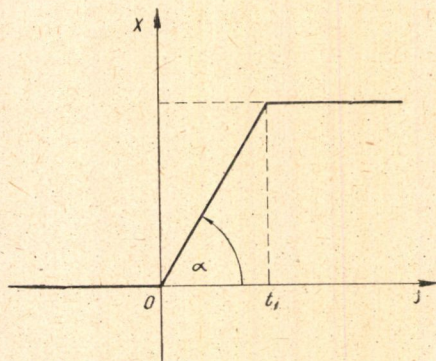
$$\Delta(t) = \Delta_0(t) - \Delta_0(t - t_1).$$

ahol $Y_0(t)$ és $\Delta_0(t)$ jelentése a fentebbi; valamennyi most említett függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentum-értékekre. Látható, hogy a t_1 -nél gyakorlatilag állandósult $\Delta(t_1) \approx \frac{v}{c}$ hiba $t \gg t_1$ esetén aszimptotikusan kiküszöbölődik, $\Delta_\infty = 0$. Ez összhangban van a (17)-tel.

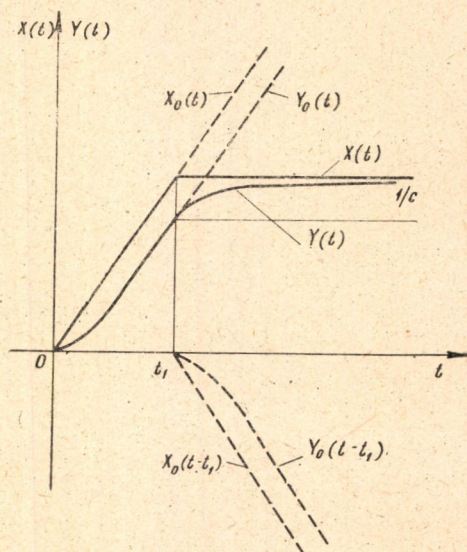
c) Háromszög alakú meridiángörbe másolása.

A 13. ábrán látható görbe egyenlete, az előbbi szerint

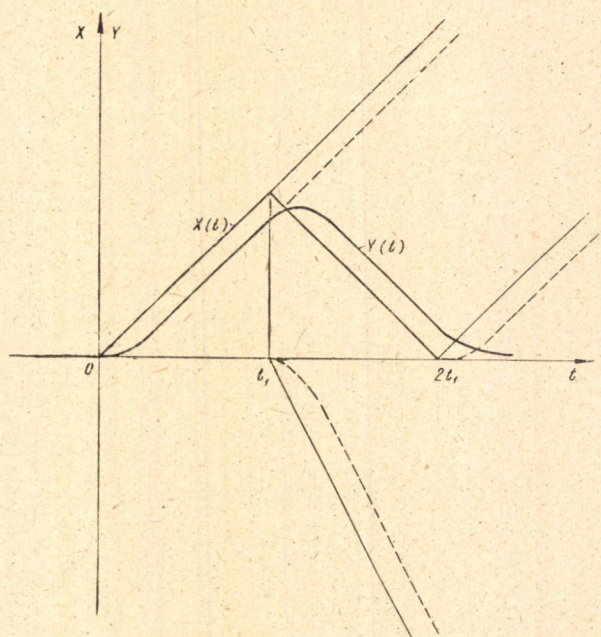
$$X(t) = X_0(t) - 2X_0(t - t_1) + X_0(t - 2t_1)$$



11. ábra



12. ábra



13. ábra

módon állítható elő s ennek megfelelően a munkadarab meridiángörbéjének egyenlete :

$$Y(t) = Y_0(t) - 2Y_0(t-t_1) + Y_0(t-2t_1),$$

a másolási hiba kifejezése pedig :

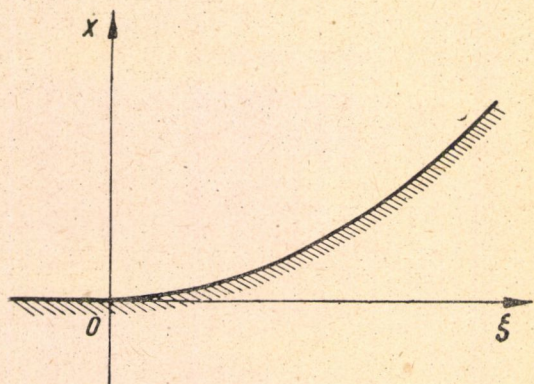
$$\Delta(t) = \Delta_0(t) - 2\Delta_0(t-t_1) + \Delta_0(t-2t_1),$$

ahol $X_0(t)$, $Y_0(t)$ és $\Delta_0(t)$ jelentése a fentebbi, továbbá valamennyi függvény 0 értékű 0-nál kisebb argumentumokra. A hiba láthatóan $t \gg 2t_1$ esetén aszimptotikusan elenyészik, $\Delta_\infty = 0$, összhangban a (17)-tel.

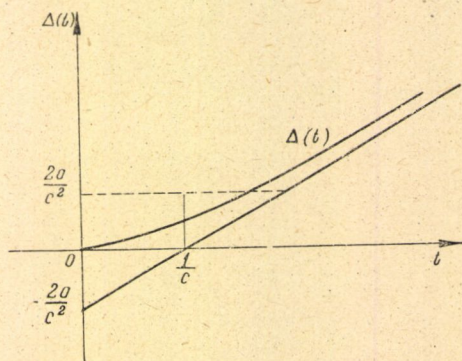
d) Másodfokú parabola meridiángörbe másolása.

Ez esetben (l. a 14. ábrát) :

$$X = a\xi^2 = \alpha (wt)^2 = at^2, \text{ ahol } a = \alpha w^2 \text{ és } t \geq 0.$$



14. ábra



5. ábra

A munkadarab meridiángörbéjének egyenlete :

$$Y(t) = X(t) - \frac{2a}{c} \left[t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right],$$

a másolási hiba pedig (l. a. 15. ábrát) :

$$\Delta(t) = \frac{2a}{c} \left[t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right].$$

Megfigyelhető, hogy a másolási hiba görbéje hasonló az α -beli $Y_0(t)$ görbéjéhez. Lévéen most

$$\max_{[0,t]} |\dot{X}(\tau)| = V = |\dot{X}(t)| = 2|a|t,$$

így a hiba abszolút értéke nyilván :

$$H < \frac{2|a|}{c} t,$$

a (22)-nek megfelelően, vagy pontosabb becsléssel :

$$H < \frac{2|a|t}{c} \left[1 - e^{-ct} \left(1 + \frac{ct}{2} \right) \right],$$

a (24)-nek megfelelően.

5. §

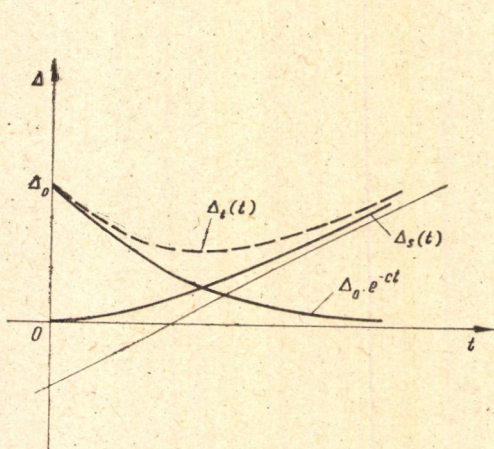
a) Az eddigi vizsgálatok során feltételeztük, hogy a másolás kezdeti hibája 0, azaz :

$$\Delta(0) = X(0) - Y(0) = 0.$$

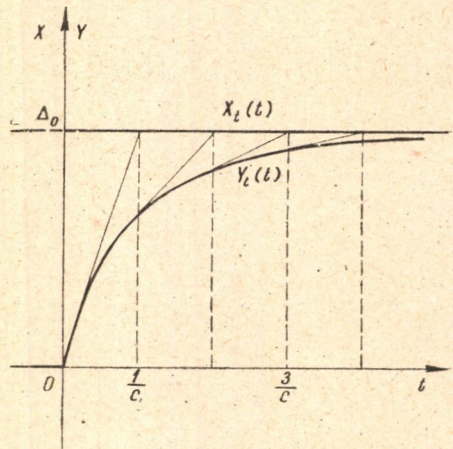
Most vizsgáljuk a másolási folyamatot 0-tól különböző kezdeti hibával, amikor is :

$$(25) \quad X(0) = \Delta_0 \neq 0, \quad Y(0) = 0, \quad \text{azaz } \Delta(0) = X(0) = \Delta_0.$$

A kezdeti Δ_0 hibát nyilvánvalóan úgy lehet tekinteni, mint a másolási folyamat előbbi szakaszának végső [esetleg már állandósult] hibáját. Gyakorlati szem-



16. ábra



17. ábra

pontból fontos tudni, hogy eme öröklött hiba hogyan befolyásolja az új másolási folyamat saját [vagyis öröklött hiba nélkül, 0 kezdeti hiba esetén adódó] hibáját.

Az öröklött és saját hiba egyszerű szuperpozíciójáról nyilván nem lehet szó, mert a szerszámkés sebessége a folyamat

$$\dot{Y} = c(X - Y) = c\Delta$$

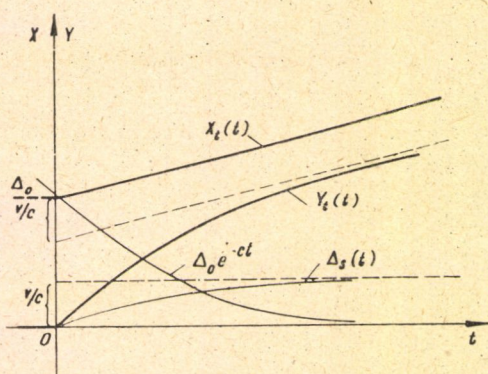
differenciálegyenlet értelmében arányos a másolási hibával.

b) Másoljunk egy tetszőleges $X_s(t)$ egyenletű meridiángörbét, Δ_0 kezdeti hibával. Ekkor a tapintó teljes elmozdulása, nyugalmi helyzetéhez képest:

$$(26) \quad X_t(t) = \Delta_0 + X_s(t).$$

A teljes másolási hiba a (21) szerint most így alakul [figyelembevétel, hogy $X_t(t) = X_s(t) = 0$, ha $t < 0$]:

$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta_t(t) &= ce^{-ct} \left\{ \int_0^t [X_s(t) - X_s(\tau)] e^{c\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 [X_s(t) + \Delta_0] e^{c\tau} d\tau \right\} = \\ &= ce^{-ct} \int_{-\infty}^t [X_s(t) - X_s(\tau)] e^{c\tau} d\tau + \Delta_0 e^{-ct} = \Delta_s(t) + \Delta_0 e^{-ct}. \end{aligned}$$



18. ábra

(L. a 16. ábrát!) Látható tehát, hogy a $\Delta_s(t)$ sajáthiba nem a teljes Δ_0 öröklött hibára; hanem ennek exponenciálisan csökkenő és idővel elenyésző $\Delta_0 e^{-ct}$ értékére szuperponálódik. A készülék eme — az öröklött másolási hibát idővel kiküszöbölő magatartása kedvező, mert meggátolja a hibák halmozódását.

Lássunk most néhány konkrét példát az öröklött és a saját másolási hiba együtműködésére.

c) Állandó meridiángörbe másolása, a szerszámkés kezdeti lemaradása esetén.

Legyen esetünkben (l. a 17. ábrát):

$$X_t(t) = X(0) + X_s(t) = \Delta_0 \text{ és } Y_t(0) = 0.$$

Ekkor a munkadarab meridiángörbéje a (19) szerint:

$$Y_t(t) = \Delta_0 (1 - e^{-ct}),$$

a teljes másolási hiba pedig:

$$\Delta_t(t) = \Delta_0 e^{-ct},$$

összhangban a (27)-tel, mert most $A_s(t) = 0$ volt. A hiba $t \rightarrow \infty$ esetén nyilván aszimptotikusan elenyészik, mégpedig annál gyorsabban, minél nagyobb a c jóssági tényező.

d) *Lineáris meridiángörbe másolása, a szerszámkés kezdeti lemaradása esetén.*

Legyen most (l. a 18. ábrát):

$$X_t(t) = A_0 + vt \quad \text{és} \quad Y_t(0) = 0.$$

Ez esetben a munkadarab meridiángörbéje és a teljes másolási hiba:

$$Y_t(t) = A_0(1 - e^{-ct}) + v \left[t - \frac{1}{c}(1 - e^{-ct}) \right],$$

ill.

$$A_t(t) = \frac{v}{c}(1 - e^{-ct}) + A_0 e^{-ct} = A_s(t) + A_0 e^{-ct},$$

a (27)-nek megfelelően.

6. §

a) A másoló szerszámgépekkel végzett tömeggyártásban, a másolási hiba minimumra való csökkentésének módjait keresve, felvetődött a *sablon előjavításának* lehetősége.

Amint a számítások során láttuk, a munkadarab meridiángörbéje a lemásolt sablon-meridiángörbétől többé-kevésbé eltér — egyszerűbb esetekben közelítő számítással is követhetően. E módosulással számolva, nyilván *lehetséges a sablon meridiángörbét előzetesen úgy javítani, hogy ezt lemásolva, a munkadarabon* [elméletileg pontosan, gyakorlatilag közelítően] *éppen a kívánt meridiángörbe jelentkezzen.*

A kérdés *matematikai szempontból* így fogalmazható: miként alakítandó a sablon $X(t)$ meridiángörbéje, hogy az adott differenciálegyenletű másolási folyamat során a munkadarabon előírt $Y(t)$ meridiángörbe valósuljon meg.

b) A *Hydrofix*

$$\dot{Y} + cY = cX$$

differenciálegyenletű modelljével dolgozva, az előírt $Y(t)$ függvényhez a keresett $X(t)$ függvény a következő módon nyerhető, éppen a differenciálegyenlet alapján:

$$(28) \quad X(t) = Y(t) + \frac{1}{c} \dot{Y}(t).$$

A sablon keresett $X(t)$ meridiángörbét ennélfogva a munkadarab előírt $Y(t)$ meridiángörbéjének és az $[Y(t)$ deriváltjával arányos] $\frac{1}{c} \dot{Y}(t)$ függvény görbéjének szuperpozíciójával nyerjük. A

$$(29) \quad K(t) = \frac{1}{c} \dot{Y}(t)$$

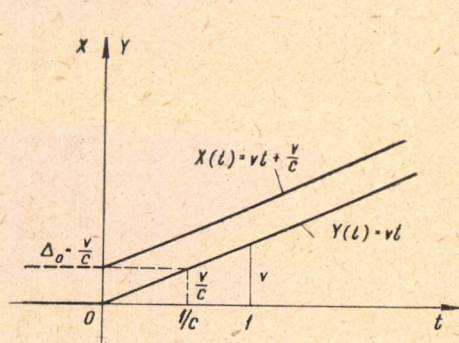
függvény határozza meg tehát a szükséges előjavítást. Ez utóbbi annál jelentéktelenebb, minél nagyobb a szervomotor c jósági tényezője.

Állapítsuk meg egy-két konkrét esetben az előjavított sablon-meridián-görbe egyenletét!

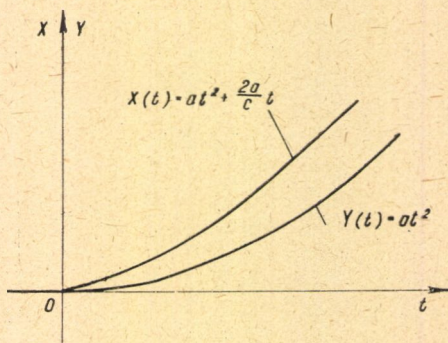
c) Legyen pl. $Y(t) = vt$; akkor a fentebbi formula szerint:

$$X(t) = vt + \frac{v}{c},$$

vagyis a sablon-meridiángörbe a munkadarabon megvalósítandóhoz képest $\frac{v}{c}$ állandó ráhagyással készítendő, ami gyakorlatilag igen egyszerűen megoldható. Másszóval $\Delta_0 = \frac{v}{c}$ kezdeti hibával indítandó a másolás, a kívánt meridiánvonallal párhuzamos egyenes mentén. A (19) alapján, valamint az 4. § a)



19. ábra



20. ábra

és 5. § c) segítségével könnyű ellenőrizni, hogy az $X(t) = vt + \frac{v}{c}$ görbe másolatként valóban a kívánt $Y(t) = vt$ görbe adódik (l. a 19. ábrát!)

d) Vagy legyen pl. $Y(t) = at^2$; ekkor (28) formula szerint:

$$X(t) = at^2 + \frac{2a}{c}t;$$

ez a (19) alapján, az 4. § a) és d) segítségével ellenőrizhető (l. a 20. ábrát).

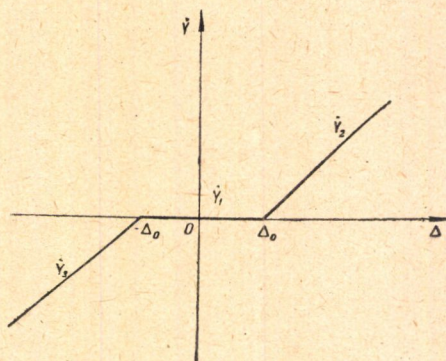
7. §

a) A 3 — 6. §-ban a *Hydrofix*-nek holtjáték-nélküli lineáris karakterisztikájú modelljét vizsgáltuk, első közelítésként, főleg minőségi tájékozódás céljából. Most lássunk egy holtjátékos, de egyébként lineáris karakterisztikájú modellt, amely valóságos esethez közelebb áll s így jobb közelítésre tarthat igényt.

Vizsgálódjunk tehát a 21. ábrán feltüntetett *szervomotor-karakterisztika* esetén. Számolva a Δ_0 holtjátékkal, valamint a készüléknek előre és hátra egyforma működésével, továbbá a középső holtszakaszon kívül lineáris karakteristikával, a másolási folyamat differenciálegyenlet-rendszere így alakul:

$$(30) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= 0, & \text{ha } -\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_0 \\ \dot{Y}_2 &= c(\Delta - \Delta_0), & \text{ha } \Delta > \Delta_0 \\ \dot{Y}_3 &= c(\Delta + \Delta_0), & \text{ha } \Delta < -\Delta_0 \end{aligned} \right\}$$

A készülék folytonos, *ugrásmentes működésének* követelményéből folyik,



21. ábra

hogy a holtszakasz határain az 1. és 2., ill. az 1. és 3. differenciálegyenlet megoldásának ugyanazon értéket kell szolgáltatnia, azaz:

$$Y_1(\Delta_0) = Y_2(\Delta_0) \text{ és } Y_1(-\Delta_0) = Y_3(-\Delta_0).$$

b) Az első differenciálegyenlet általános megoldása nyilvánvalóan:

$$Y_1 = k.$$

Ha az eddigi $Y(0) = 0$ kezdeti feltételt továbbra is fenntartjuk, akkor:

$$Y_1(t) = 0,$$

és megfelelően:

$$Y_{1/}(t_0) = Y_2(t_0) = 0$$

$$Y_{1b}(t_0) = Y_3(t_0) = 0; |\Delta| \leq \Delta_0.$$

Itt t_0 -val jelöljük azon időpontot, amelyben az $[\Delta] < \Delta_0$ hibával indulónak feltételezett] $X(t)$ -re fennáll :

$$X(t_0) = \pm \Delta_0,$$

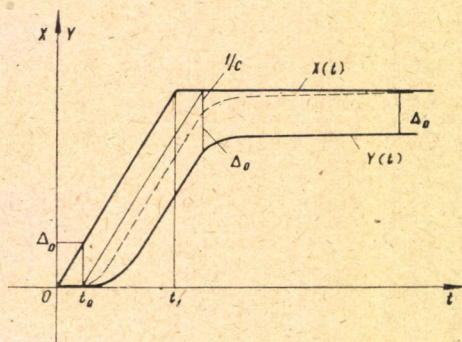
előre és hátra menetben egyforma működést feltételezve.

A 2. és 3. differenciálegyenlet, a

$$t' = t - t_0$$

új változó bevezetésével így alakul :

$$\frac{dY}{dt'} + cY = cX \mp c\Delta_0, \quad t' \geq 0; \quad |\Delta| \geq \Delta_0 \text{ és } Y(0) = 0.$$



22. ábra

A keresett partikuláris megoldást, Laplace-transzformáció segítségével, így nyerjük :

$$\begin{aligned} sy + cy &= cx \mp c\Delta_0 \frac{1}{s}, \quad y = \frac{cx}{s+c} \mp \frac{c\Delta_0}{s(s+c)} = \\ &= \frac{c}{s+c} x \mp \Delta_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+c} \right). \end{aligned}$$

Innen :

$$(31) \quad Y(t) = c \int_0^{t-t_0} e^{-c(t-t_0-\tau)} X(\tau) d\tau \mp \Delta_0 [1 - e^{-c(t-t_0)}].$$

E szerint esetünkben a holtjáték befolyása a másolási folyamatra kettős:
 $\alpha)$ Egyrészt t_0 idővel késlelteti az [egyébként, holtjáték nélkül végbemenő] másolási folyamatot. $\beta)$ Másrészt Δ_0 aszimptotikusan állandósuló hibával növeli a másolás [egyébként, holtjáték nélkül jelentkező] hibáját.

$c)$ Példaként az 4. § b) alatt tárgyalt sablon-meridiángörbe és a munkadarab meridiángörbéje látható a 22. ábrán. A szaggatva rajzolt görbe a t_0 késleltetéssel, de holtjáték-hiba nélkül nyerhető meridiángörbe. Az ábra szépen szemlélteti a holtjáték hátrányos hatását a másolási folyamatra.

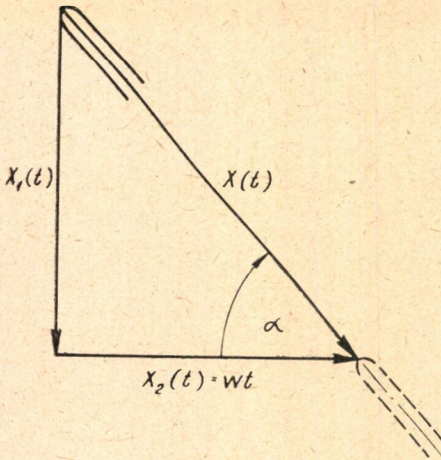
a) Végezetül még néhány szót a *Mintagépgyár* részére a *Hydrofix*-szel kapcsolatban végzett számításaim néhány további részletéről, amelyek részben másutt jelentek meg, részben pedig még folyamatban vannak.

b) A [9] cikkben kitérek a *ferde* (az előtolás irányához képest $\alpha \neq \pi/2$ hajlásszögű) *tapintó- és késbeállításra* és vizsgálom ilyen feltételek mellett a gyakorlatban kritikus

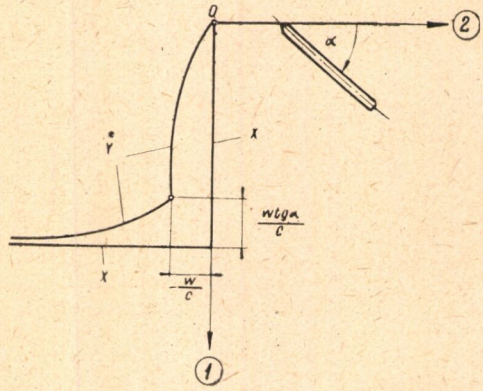
$$(32) \quad X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \frac{w}{\cos \alpha} t, & \text{ha } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{w}{\cos \alpha} t_1, & \text{ha } t > t_1 \end{cases}$$

út-idő függvényű derékszögű lépcső másolását (l. a 23. ábrát).

Jelölje most $X(t)$, ill. $Y(t)$ a tapintó, ill. a szerszámkés ferde elmozdú-



23. ábra



24. ábra

lását, $X_1(t) = X(t) \sin \alpha$, ill. $Y_1(t) = Y(t) \sin \alpha$ ugyanezeknek az előtolás irányára merőleges, $X_2(t) = X(t) \cos \alpha$, ill. $Y_2(t) = Y(t) \cos \alpha$ pedig az előtolás irányába eső elmozdulását.

A $0 \leq t \leq t_1$ időszakban, az 4. § a) szerint :

$$Y(t) = \frac{w}{\cos \alpha} \left[t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right], \quad A(t) = \frac{w}{c \cos \alpha} (1 - e^{-ct})$$

és a munkadarab meridiángörbéjének paraméteres egyenletrendszere (az előtoláshoz képest relatív mozgást tekintve) :

$$(33) \quad \begin{aligned} Y_1^*(t) &= Y_1(t) = wt g \alpha \left[t - \frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) \right], \\ Y_2^*(t) &= Y_2(t) - wt = -\frac{w}{c} (1 - e^{-ct}). \end{aligned}$$

A $t > t_1$ időszakban pedig a 5. § c) szerint (az e^{-ct} -et 1 mellett elhanyagolva):

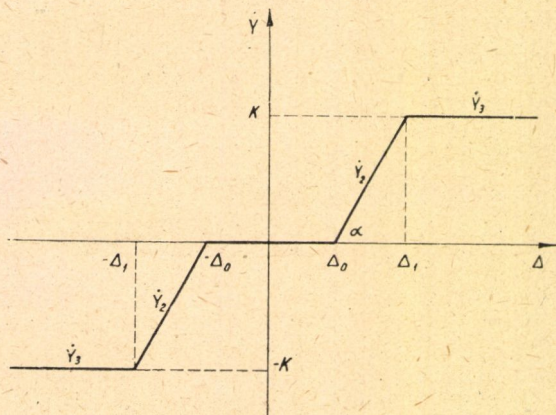
$$Y(t) = \frac{w}{\cos \alpha} \left[t_1 - \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right], \quad \Delta(t) = \frac{w}{c \cos \alpha} e^{-c(t-t_1)}$$

és a munkadarab meridiángörbéje:

$$(34) \quad \begin{aligned} Y_1^*(t) &= Y_1(t) = w \operatorname{tg} \alpha \left[t_1 - \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right], \\ Y_2^*(t) &= Y_2(t) - wt = -w \left[(t-t_1) + \frac{1}{c} e^{-c(t-t_1)} \right]. \end{aligned}$$

A legnagyobb másolási hiba tehát ferde irányban:

$$\Delta_{\max} = \Delta(t_1) \approx \frac{w}{c \cos \alpha}.$$



25. ábra

A t_1 időpont után, *elégendő idő múltán* a munkadarab meridiángörbéje a sablonéhoz simul:

$$Y_1^* \approx w \operatorname{tg} \alpha \cdot t_1 = X_1^*, \quad Y_2^* \approx -w(t-t_1).$$

(L. a 24. ábrát!)

c) Behatóbb vizsgálatra érdemes a *Hydrofix*-nek a [9] cikkben érintett

$$(35) \quad \begin{cases} Y_1 = 0, & \text{ha } |\Delta| \leq \Delta_0 \\ \dot{Y}_2 = c(\Delta \mp \Delta_0), & \text{ha } \Delta_0 < |\Delta| \leq \Delta_1 \\ Y_3 = \pm c(\Delta_1 - \Delta_0) = \pm K, & \text{ha } |\Delta| > \Delta_1 \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszerű modellje (l. a 25. ábrát).

d) A *Hydrofix* részletesen tárgyalt *lineáris modellje* — a 2. §-ban említett egyszerűsítések, elhanyagolások miatt — *csak minőségi tájékoztatásra alkalmas*. Éppen ezért a *Mintagépgyárban* kísérletek és ezekkel párhuzamosan Intézetünkben számítások vannak folyamatban, amelyek célja a *valóságos másolási folyamat hűvebb tükrözése*. Amint a 2. §-ban láttuk, a valóságos másolási folyamat *differenciálegyenlete* (a merev visszacsatolás és a lineáris, holtjátékmentes karakterisztika figyelembevételével) :

$$(36) \quad \dot{Y} = \frac{b(X-Y)}{F} \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left[p_1 - p_0 - \Delta p(\dot{Y}) - \frac{M(\dot{Y})}{F} \dot{Y} - \frac{N(\dot{Y})}{F} \right]}.$$

A gyök alatt a *tehetetlenségi tagot* változónak, a többit pedig tapasztalati átlagértékű állandónak véve, az előbbi differenciálegyenlet

$$(37) \quad \dot{Y} = c(X-Y) \sqrt{1 - a\dot{Y}}$$

alakot ölt. E nem-lineáris differenciálegyenlet, az $|a\dot{Y}| \ll 1$ körülményre való tekintettel, binomiális sorfejtés útján, két tag figyelembevételével így alakul :

$$\dot{Y} \left(1 + \frac{a}{2} \ddot{Y} \right) = c(X-Y).$$

E nem-lineáris differenciálegyenlet közelítő megoldása előállítható.

A gyök alatti *súrlódási tagot* is változónak, mégpedig a szokás szerint a sebességgel arányosnak véve, ez a nem-lineáris differenciálegyenlet adódik :

$$(38) \quad \dot{Y} = c(X-Y) \sqrt{1 - b\dot{Y} - a\ddot{Y}}$$

A *közelítő megoldás* mellett eredmény várható e nem-lineáris differenciálegyenletek *minőségi* (kvalitatív) *vizsgálatától*.

A gyök alatti $p_1 - p_0$ tagot a *nyomásszabályozó szelep* működése befolyásolja s erre vonatkozólag mérések folynak.

A vezérlő tolattyú (35) karakterisztikájú *modelljének* vizsgálata szintén közelebb viszi a számításokat a valósághoz.

f) Érdekesnek ígérkezik továbbá tekintetbe venni az *olajáramlás mennyiségi és minőségi különbségeit* a vezérlőtollattyú zárt, kissé nyitott és erősen nyitott hornyai esetén — figyelemre méltó szovjet kezdeményezések alapján. Pl. *Lescsenko* [7] cikkében *tapasztalati formulát* javasol, mely jól egyezik mind az erősen túlfedett, zárt horony és lamináris olajáramlás esetére használatos

$$(39) \quad q_1 = \frac{\pi d \delta^3 p g}{12 \nu l \gamma}$$

formulával, mind az erősen nyitott horony és turbulens olajáramlás

$$q = \mu f \sqrt{2g \frac{p}{\gamma}}$$

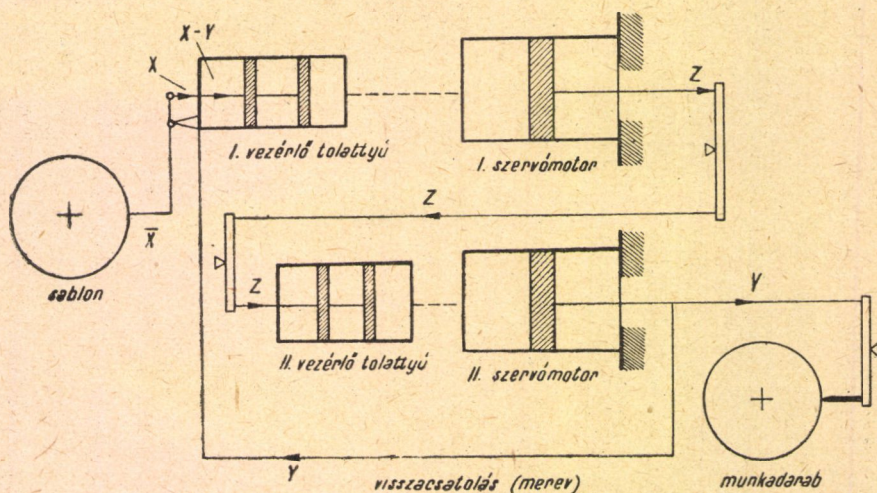
formulájával, s amely ugyanakkor — szemben ezekkel — használható kissé túlfedett, zárt, valamint kissé nyitott horony és megzavart lamináris olajáramlás esetén is, sőt felhasználhatónak látszik hidraulikus szervóberendezések számításánál is.

Számbavehetőek még olyan tényezők is, mint pl. a rúgók, az olaj összenyomhatósága lökésszerű terhelés esetén stb.

Újabb és újabb anyagot szolgáltatnak a számítások részére a *minta-gépgyári kutatások*. Előrehaladott állapotban van az *ÉHM 200* nevű, a *Hydrofix*szel rokon, nagyobb igényű és teljesítményű elektro-hidraulikus elven működő másolóberendezés tervezése és remélhető, hogy a számítások ehhez is nyújtanak segítséget.

9. §

a) Összehasonlítás céljából röviden ismertetek most *egy szovjet hidraulikus* másolóberendezést (l. bővebben a [3] cikkben), amelyhez a *Hydrofix*



26. ábra

bizonyos rokonságot mutat. Ez utóbbinál az I. szervómotor hengere nincs vezérlő tolattyújához visszacsatolva, hanem e helyett egy II. szervómotor vezérlő tolattyúját működteti és ennek a hengere van az I. vezérlő tolattyújához (mereven) visszacsatolva. Az I. fokozat kisebb méretű és gyorsjárású. E berendezés a két fokozat folytán lényegesen nagyobb erő kifejtésre képes; ez nagyobb szerszámgépek esetén fontos.

b) A *Hydrofix*nél alkalmazott egyszerűsítések mellett a berendezés differenciálegyenlet-rendszere (l. a 26. ábrát):

$$(40) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{Y} &= c_2 Z \end{aligned} \right\}$$

ill. összevont *differentiálegyenlete*:

$$(41) \quad \ddot{Y} + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 X,$$

ahol $\omega_0^2 = c_1 c_2$, vagyis a jósági tényezők szorzata. E differenciálegyenlet *Laplace*-transzformáltja, valamint a berendezés (zárt rendszer) és a hiba *átviteli függvénye*:

$$(42) \quad p^2 y + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x,$$

$$M = \frac{y}{x} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{1}{1 + T^2 p^2},$$

$$D = \frac{\delta}{x} = 1 - M = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} = \frac{T^2 p^2}{1 + T^2 p^2}; \quad T^2 = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

A munkadarab *meridiángörbéje* és a *másolási hiba* tehát:

$$(43) \quad Y = L^{-1}[Mx] = \omega_0 L^{-1} \left[\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} x \right] = \omega_0 \int_0^t X(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau,$$

$$\Delta = L^{-1}[Dx] = \frac{1}{\omega_0} L^{-1} \left[\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} p^2 x \right] = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \ddot{X}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau,$$

feltéve, hogy $X(0) = \dot{X}(0) = 0$; viszont:

$$(44) \quad \Delta = \frac{1}{\omega_0} \left[\int_0^t \ddot{X}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \dot{X}(0) \sin \omega_0 t \right],$$

ha $X(0) = 0$, de $\dot{X}(0) \neq 0$. A $G = \max_{[0,t]} |\ddot{X}(\tau)|$ és $V_0 = |\dot{X}(0)|$ jelölésekkel

a következő *hibabecslő formulát* írhatjuk fel:

$$(45) \quad H = |\Delta(t)| \leq \frac{2G}{\omega_0^2}, \quad \text{ill.} \quad H = |\Delta(t)| \leq \frac{2G}{\omega_0^2} + \frac{V_0}{\omega_0}.$$

c) A sablon középvonala felé mutató *egységlokkés* ($X = 1$, ha $t \geq 0$; $X = 0$, ha $t < 0$) esetén:

$$Y = \omega_0 \int_0^t \sin \omega_0(t - \tau) d\tau = 2 \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}; \quad \Delta = 1 - Y = \cos \omega_0 t.$$

Az $X = vt$ egyenes másolásánál ($v = w \operatorname{tg} \alpha$):

$$Y = v\omega_0 \int_0^t \tau \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = X - \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

$$A = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{w \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{c_1 c_2}} \sin t \sqrt{c_1 c_2}; \quad H \leq \frac{|v|}{\omega_0}.$$

Az $X = at^2$ görbe másolásánál pedig:

$$A = \frac{2a}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = \frac{4a}{\omega_0^2} \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}; \quad H \leq \frac{4|a|}{\omega_0^2}.$$

d) Látható, hogy a másolás pontossága annál jobb, minél lankásabban kezdődik és minél kevésbé görbült a sablon meridiángörbéje [$\operatorname{sign} \ddot{X}(\tau) = \operatorname{sign} \ddot{X}(0)$ esetén], továbbá minél nagyobb az ω_0 jósági tényező. A másolás itt szemmel láthatóan lengő, (oszilláló) jellegű, míg a *Hydrofix*-nél simuló (oszkuláló).

E kétfokozatos rendszer másolási hibája az egyfokozatoséhoz képest lényegesen lecsökkenthető, mint ezt a [3] cikk kiemeli. Az $X = vt$ egyenes másolásánál pl. az 4.§a) és 9.§c) szerint (az egyfokozatos rendszer c -jét a kétfokozatos c_2 -jével közel egyenlőnek véve) a maximális hibák aránya így alakul:

$$\varrho = \frac{A_{II \max}}{A_{I \max}} = \frac{\frac{v}{\omega_0}}{\frac{v}{c}} \approx \frac{\frac{v}{\sqrt{c_1 c_2}}}{\frac{v}{c_2}} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}};$$

Tumarkin példájában (lévén az első fokozat a másodikhoz képest gyorsjárású, azaz $c_1 \gg c_2$): $\varrho \approx \frac{1}{20}$. Az $X = at^2$ görbe másolásánál pedig:

$$\varrho = \frac{A_{II \max}}{A_{I \max}} \approx \frac{\frac{4a}{\omega^2}}{\frac{2at}{c}} \approx \frac{2}{c_1 t},$$

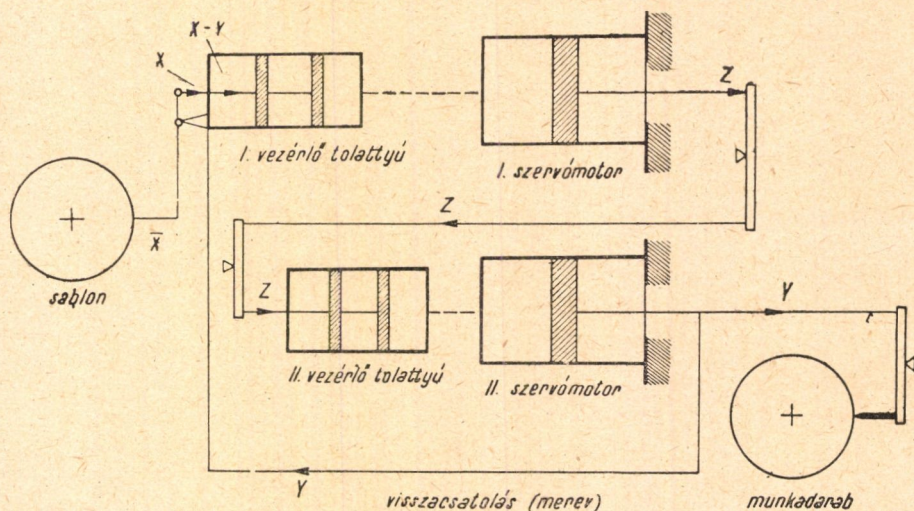
vagyis a kétfokozatos rendszer viszonylagos pontossága a parabolikus szakasz hosszával egyre növekszik.

Figyelemreméltó, hogy e készülék pontossága nemcsak mennyiségileg, hanem minőségileg is jobb a *Hydrofix*-énél, minthogy tetszőleges hosszú parabolikus szakaszt képes korlátos hibával, korlátos gyorsulás mellett másolni; ugyanis a differenciálegyenletünk értelmében:

$$(46) \quad \frac{\ddot{y}}{\delta} = \frac{\omega_0^2 \delta}{\delta} = \omega_0^2.$$

E kétfokozatos másolóberendezés elméletileg a *labilitás* határán működik, lévén a rendszer átviteli függvényének pólusai tiszta képzetesek: $p_{1,2} = \pm i\omega_0$; ennek megfelelően a kitérített szerszám (az $X = 0$ alapegyenés körül) elméletileg ω_0 körfrekvenciájú *csillapítatlan öngerjesztéseket* végez. A valóságos helyzet, főleg a súrlódási viszonyok miatt nyilván kedvezőbb; a berendezést kielégítő tapasztalatokkal használták is, a [3] cikk szerint. Mégis fel kell tételezni az említett elméleti határ-labilitás miatt, hogy a készülék a valóságban káros öngerjesztett rezgésekre hajlamos. A [3] cikkben szó esik egyébként a készülék bizonyos módosításairól.

A kétfokozatos rendszer fentebb részletezett *előnyei* miatt helyesnek látszik ez irányban is tájékozódni a hazai hidraulikus másolóberendezésekkel kapcsolatos kutatások során; annál is inkább, mert e kétfokozatos rendszer — a stabilitás biztosításán túl — aránylag egyszerűen tovább fejleszthető.



27. ábra

Megjegyzendő továbbá, hogy az említett kutatások során célszerű behatóan tanulmányozni a gőz- és gázgépek és motorok szabályozását, ahol régóta alkalmaznak hidraulikus szervóberendezéseket.

10. §

a) A fentebb tárgyalt kétfokozatos másolóberendezés elméleti stabilitását többféle módon lehet biztosítani. Egy javasolható egyszerű megoldás pl. a következő: a II. szervómotor nemcsak az I. szervómotor elé, hanem önmaga elé is mereven visszacsatolandó. Ez műszakilag megoldhatónak látszik, pl. az I. dugattyú-rúdja és a II. tolattyú-rúdja közti kétkarú emelő merev csatolással, a két ház összeépítésével és a II. dugattyú-rúdjának rögzítésével.

b) E készülék differenciálegyenlet-rendszere tehát:

$$(47) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{Y} &= c_2 (Z - Y) \end{aligned} \right\}$$

ill. differenciálegyenlete:

$$(48) \quad \ddot{Y} + 2\delta\dot{Y} + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 X, \text{ ahol } 2\delta = c_2, \omega_0^2 = c_1 c_2.$$

A rendszer és a hiba átviteli függvénye:

$$(49) \quad M = \frac{y}{x} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\eta p + 1},$$

$$D = 1 - M = \frac{p^2 + 2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{T^2 p^2 + 2\eta p}{T^2 p^2 + 2\eta p + 1}.$$

A stabilitás most biztosítva van, mert M pólusai $\delta > 0$ és $\omega_0^2 > 0$ miatt, valamint az $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 = c_2^2 \left(c_1^2 - \frac{1}{4} \right) > 0$ esetet (periodicitást) feltételezve negatív valós részűek. A másolási hiba tehát, $X(0) = \dot{X}(0) = 0$ feltevéssel:

$$(50) \quad \Delta = L^{-1} \left[\frac{p^2 + 2\delta p}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} x \right] = L^{-1} \left[\frac{\ddot{x} + 2\delta\dot{x}}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{X}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau + \frac{2\delta}{\omega} \int_0^t \dot{X}(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

c) A sablon középvonala felé irányuló *egységugrás* másolási hibája pl.

$$\Delta_1(t) = L^{-1} \left[D \frac{1}{p} \right] = L^{-1} \left[\frac{p + 2\delta}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} \right] =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta}.$$

Az ú. n. túlszabályozás csupán néhány százalékos lehet és ennek megfelelően

$$\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2c_1 c_2}{\sqrt{4c_1 c_2 - c_2^2}} = 1,03 \sim 1,07,$$

ami meghatározza a c_1/c_2 arányt.

d) A rendszer *jóssági foka*:

$$(51) \quad J = \frac{\dot{y}_0}{\delta_0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_0^2}{p + 2\delta} = \frac{\omega_0^2}{2\delta} = c_1.$$

A berendezés üze me tehát a *Hydrofixére emlékeztet*: ugyanis állandósult szer számkés-sebesség mellett állandósult hibával tud dolgozni. E hiba azonban itt sokkal kisebb, lévén, $c_1 \gg c_2$; *Tumarkin* példájában $c_1/c_2 \approx 400$. A fentebb ismertetett kétfokozatos berendezéssel szemben ennek önrezgései (stabilitá sának megfelelően) *csillapodók*, a hiba lengései szintén (az alaphibát, amelyre a rezgések szuperponálódnak, a másolandó görbe határozza meg).

A fentebbi előnyökkel szemben azonban az említett visszacsatolás *rontja* az egyszerű kétfokozatos berendezés másolási minőségét olyan értele mben, hogy nem képes tetszőleges hosszú parabolagörbe-szakaszt korlátos hibával másolni. E mellett a két merev visszacsatolás elhanyagolható tömegűnek merevvé, törekennyé teszi. Célszerű ezért rugalmasabb és a másolást minő ségileg javítani képes egyéb megoldásokat is megvizsgálni.

11. §

a) Próbálkozzunk pl. a gázmotoroknál gyakran alkalmazott csatolással, a folyadécsillapítást és rúgót tartalmazó ú. n. *izodrom csatolással*,* pl. a két szervómotor között. Az izodrom csatolás elhanyagolható tömegűnek tekintve, a berendezés *differenciálegyenlet-rendszere* így alakul :

$$(52) \quad \left. \begin{aligned} \dot{Z} &= c_1 (X - Y) \\ \dot{V} + k_1 V &= k_2 \dot{Z} \\ \dot{Y} &= cV \end{aligned} \right\},$$

ill. *sztatikus erősítésre* is képes izodrom csatolás esetén : **

$$(53) \quad \left. \begin{aligned} Z &= c_1 (X - Y) \\ V + k_1 V &= k_2 (\dot{Z} + k_3 Z) \\ \dot{Y} &= c_2 V \end{aligned} \right\}.$$

Az *első esetben* a berendezés differenciálegyenlete :

$$(54) \quad \ddot{Y} + b\dot{Y} + cY = Xc, \text{ ahol } b = k_1, c = c_1 c_2 k_2.$$

Látható, hogy a *másolás minőségileg itt sem jobb*, mint a fentebbi két merev visszacsatolásos készüléknél, mert átviteli függvényeik hasonló alakúak. Minden esetre ez műszakilag megnyugtatóbb szerkezet.

b) A *második esetben* a berendezés differenciálegyenlete :

$$(55) \quad \ddot{Y} + b\dot{Y} + c\dot{Y} + dY = c\ddot{X} + dX, \text{ ahol } b = k_1, c = c_1 c_2 k_2, d = c_1 c_2 k_2 k_3.$$

* Айзерман cit. [4], 107—108.

** Айзерман cit. [4], 145—147.

Az átviteli függvények most :

$$(56) \quad M = \frac{cp + d}{p^3 + bp^2 + cp + d} \quad \text{és} \quad D = 1 - M = \frac{p^3 + bp^2}{p^3 + bp^2 + cp + d}.$$

A jósági tényezők:

$$(57) \quad \dot{y}_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{cp + d}{p^2 + bp} = \infty, \quad \ddot{y}_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{cp + d}{p + b} = \frac{d}{b},$$

vagyis e készülék a szerszámkés állandósult gyorsulása (sebessége) mellett állandósult hibával (hiba nélkül) képes dolgozni. Az üzem akkor *stabilis*, ha a Routh—Hurwitz-kritériumnak megfelelően :

$$(58) \quad H_1 = b > 0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} b & d \\ 1 & c \end{vmatrix} > 0, \quad H_3 = \begin{vmatrix} b & d & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & b & d \end{vmatrix} > 0.$$

E berendezés tehát a stabilitás és a rugalmas üzem biztosítása mellett a másolást minőségileg is javítani tudja.

c) *Hasonló minőségű másolás* érhető el akkor is, ha az előbbi sztatikus erősítésre is képes izodrom-csatolást pl. a II. szervómotor és a szerszámkés közé helyezzük, vagy pedig a II. szervómotort egyszerű izodrom vissza-csatolással sőtöljük.*

d) *További, még tökéletesebb berendezések tárgyalása* meghaladja e cikk kereteit. Másrészt az utóbbi, vagy még bonyolultabb berendezéseket a magasabbrendű differenciálegyenletek miatt több oldalról és legcélszerűbben az ú. n. *frekvencia módszerrel* kell vizsgálni. E tekintetben a már említett »*Automatikus szabályozások matematikai vizsgálata (Különös tekintettel a másoló szerszámgépekre)*« c. készülő cikkemre utalok.

12. §

Befejezésül köszönetemet fejezem ki az akadémiai Mechanikai Automatizálási Szakbizottság elnökének, *Ritter Endre* főmérnöknek, Intézetünk igazgatójának, *Rényi Alfréd* professzornak és *Kovács K. Pál* professzornak — értékes tanácsaikért, nemkülönben *Pál Sándor*, *Kemenes Tibor*, *Korodi Albert*, *Meszlényi Marió*, *Frigyes Andor*, *Török Vilmos*, *Szöts Géza* kartársaknak — hasznos észrevételeikért.

IRODALOM

[1] *V. L. Losszievskij*: Automatikus szabályozás alapelvei a technikai folyamatokban. — Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó Vállalat, Budapest, 1951; fordítás.

[2] *Соколов-Дружинский*: Автоматическое копирование на металлорежущих станках. Москва, 1949.

[3] *M. B. Tumarkin*: A másoló szerszámgépek hidraulikus rendszerének pontossága emeléséről. — Sztanki i Instrument, 1951. évi 10. sz.; fordítás.

[4] *М. А. Айзерман*: Теория автоматического регулирования двигателей. — Гостефиздат, 1952, Москва.

* Л. Айзерман cit. [4], 146. — L. Török Vilmos alábbi cikkét.

[5] *James—Nichols—Philips: Theory of Servomechanism.* — Massachusetts Institute, New-York, 1947.

[6] А. И. Лурье: Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — Гостехиздат, 1951, Москва.

[7] *V. A. Lescsenko: Az olaj folyása a hidraulikus rendszerek vezérlatlyúinak hornyáiban.* — Sztanki i Insztrument, 1952. évf. 3. sz.; fordítás.

[8] Диткин—Кузнецов: Справочник по операционному исчислению. — Гостехиздат, 1951, Москва.

[9] *F. Fazekas: Mathematische Untersuchung der automatischen Kopiereinrichtung »Hydrofix«.* — Budapest, 1953. A Mintagépgyár közleménye a cseh-magyar műszaki dokumentáció-csere keretében.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ КОПИРОВАНИЯ ОДНОГО ВЕНГЕРСКОГО КОПИРОВАЛЬНОГО СТАНКА

Ф. Фазекаш

Резюме

Машиностроительный завод «Mintagépgyár» недавно выпустил автоматическое копировальное устройство под названием Гидрофикс, работающее по гидравлическому принципу и монтирующееся на токарный станок.

В данной статье автор занимается математическим исследованием происходящего в Гидрофиксе копировального процесса. Используя общеизвестные в литературе упрощающие условия, автор производит расчеты, дающие качественные информации о некоторых простых (в первую очередь линейных, лишенных зазора) моделях устройства.

В дальнейшем рассматриваются вопросы об, имеющие большое практическое значение: о величине погрешности копирования, об ее грубой и более точной оценке, об асимптотическом поведении; о типе накопления и уменьшения таких погрешностей, и выводы иллюстрируются конкретными шаблонами меридиальных кривых. Автор затрагивает также вопросы о прелиминарной наладке шаблонов, о косой заправке резцы и т. д.

В заключение автор, для сравнения и в интересах отечественных исследований, знакомит с описанным в статье [3] советского автора Турмакина двухступенчатым, гидравлическим копировальным аппаратом и некоторыми рекомендуемыми разновидностями его.

MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG DER GENAUIGKEIT EINER UNGARISCHEN KOPIEREINRICHTUNG

F. FAZEKAS

Zusammenfassung

Die Modellmaschinenfabrik hat unter dem Namen Hydrofix eine hydraulisch arbeitende, auf Drehbänke montierbare, automatische Kopiereinrichtung herausgebracht.

Verfasser unterwirft die Kopiervorgänge, die sich im Hydrofix abspielen, einer mathematischem Untersuchung. Es werden in bezug auf einige einfache (vornehmlich lineare, seitenspielfreie) mathematische Modelle der Einrichtung — unter den in der Literatur üblichen vereinfachenden Voraussetzungen — gewisse Rechnungen durchgeführt, die im grossen und ganzen ein Bild über die Arbeitsweise des Apparates geben.

Des weiteren behandelt Verfasser Fragen der Grösse, der Abschätzung, des asymptotischen Verhaltens und der Superposition des Kopierfehlers und veranschaulicht seine Feststellungen an konkreten Schablonen-Meridiankurven. Besondere Fragen werden noch gestreift, wie z. B. jene der Verbesserung von Schablonen, der schiefen Messereinstellung u. s. w.

Schliesslich folgt, zur Unterstützung der ungarischen Forschung und um eine Vergleichsbasis zu schaffen, die Besprechung des zweistufigen, hydraulischen Kopierapparates, den in einem Aufsatz der sowjetische Verfasser Turmakin [3] beschreibt, samt einigen möglichen Varianten zu demselben.

»HIDROFIX« MÁSOLÓESZTERGA SZABÁLYOZÁSTECHNIKAI VIZSGÁLATA

TÖRÖK VILMOS

Összefoglalás

A cikk az első magyar gyártmányú másolóeszterga, a »Hydrofix« működését szabályozástechnikai szempontból tárgyalja. A szerző a nonlinearitásokat és tehetetlenségi erőket — amely utóbbiak a normális működési sebességeknél elég jelentéktelenek lévén csak az amplitúdó fázis jelleggörbe nagyobb frekvenciákhoz tartozó szakaszán éreztetik hatásukat — elhanyagolva, a rendszert tiszta integrálszabályozásnak tekinti. A szokásos szimbolikus tárgyalásmóddal meghatározza a követési hibát néhány jellegzetes sablonalak esetére és két összetettebb sablonalaknál bemutatja a szuperpozíció elvének alkalmazását. Hasonló módon foglalkozik a sablon előjavításával. Kritikai vizsgálatnak veti alá a Fazekas Ferenc cikk 10. pontjában vizsgált visszacsatolási módot és felhívja a figyelmet a tökéletesebb, ú. n. izodrom visszavezetés előnyeire.

A Hidrofix másolóberendezés olyan egyszeres visszavezetéssel rendelkező szervórendszer (helyzet szabályozás), amely jó közelítéssel tiszta integrálszabályozásnak tekinthető, azaz feltételezhető, hogy a hidraulikus munkahenger a vezérlőtollattyú elmozdítása után azonnal állandósult sebességgel mozog. A vezérlőtollattyú elmozdulása a tolattyúházhoz képest a merev visszavezetés következtében mindig a Δ másolási hibával egyenlő.

Ha a munkahenger (illetve a kés) dx_k/dt sebessége és a vezérlőtollattyú Δ elmozdulása között

$$\frac{dx_k}{dt} = c\Delta$$

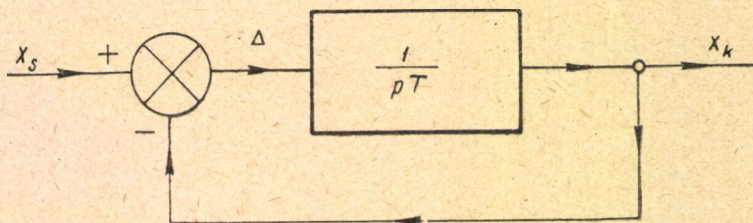
összefüggés áll fenn, akkor a nyílt szabályozókör átviteli függvénye

$$Y = \frac{x_k}{\Delta} = \frac{c}{p} = \frac{1}{pT}$$

ahol $\Delta = x_s - x_k$ és

x_s a sablon meridiángörbéjének magassága; x_k a kés elmozdulása;

$T = \frac{1}{c}$ időállandó. Így a Hidrofix blokkvázlata:



1. ábra

A zárt rendszer átviteli függvénye: $Y^* = \frac{x_k}{x_s} = \frac{Y}{1+Y} = \frac{1}{1+P^T}$

és a hibaátviteli függvény: $Y_h = \frac{1}{x_s} = \frac{1}{1+Y} = \frac{P^T}{1+P^T}$

A hibaátviteli függvényből is látható, hogy 1-es típusú szervórendszerrel van dolgunk, amelynek szabályozási ideje $T_{sz} \approx 3T$.

A követési hiba különböző jellegzetes sablonalakok esetén

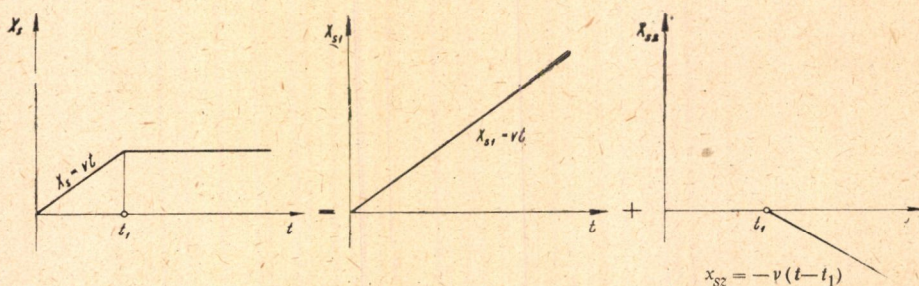
A hibaátviteli függvény alapján a követési hiba felírható. (Lásd a 4. ábrát)

Bonyolultabb meridiánvonalak másolása.

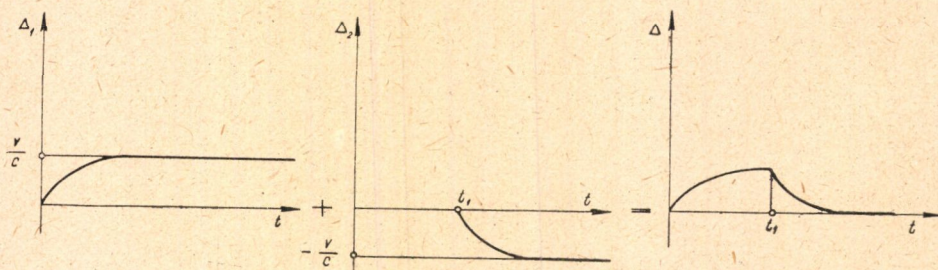
Jó eredménnyel alkalmazhatjuk a szuperpozíció elvét. A bonyolultabb törtvonalakat a már ismert jellegzetes bemenőjelekből összetettnek képzeljük. Így a hibák is szuperponálódnak, tehát az eredő hiba az eddigiek alapján közvetlenül felrajzolható.

Törött meridiánvonal:

a bemenőjel



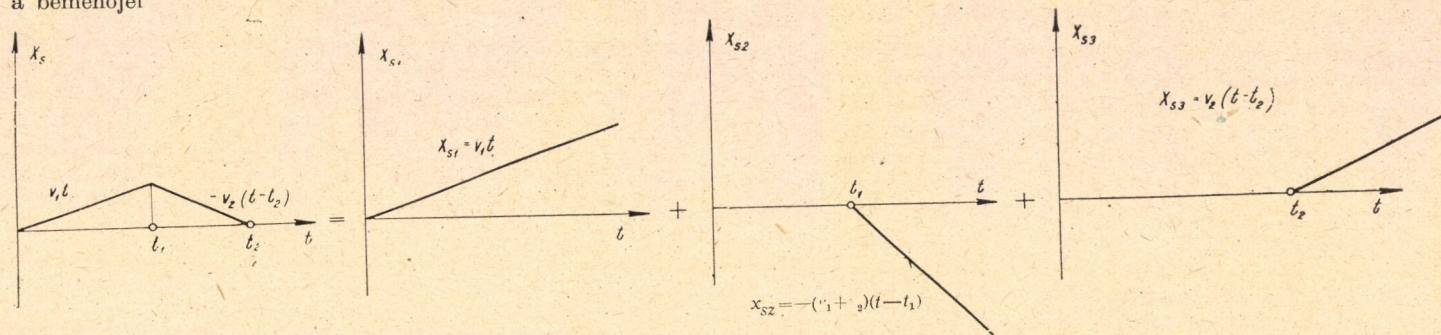
a hiba



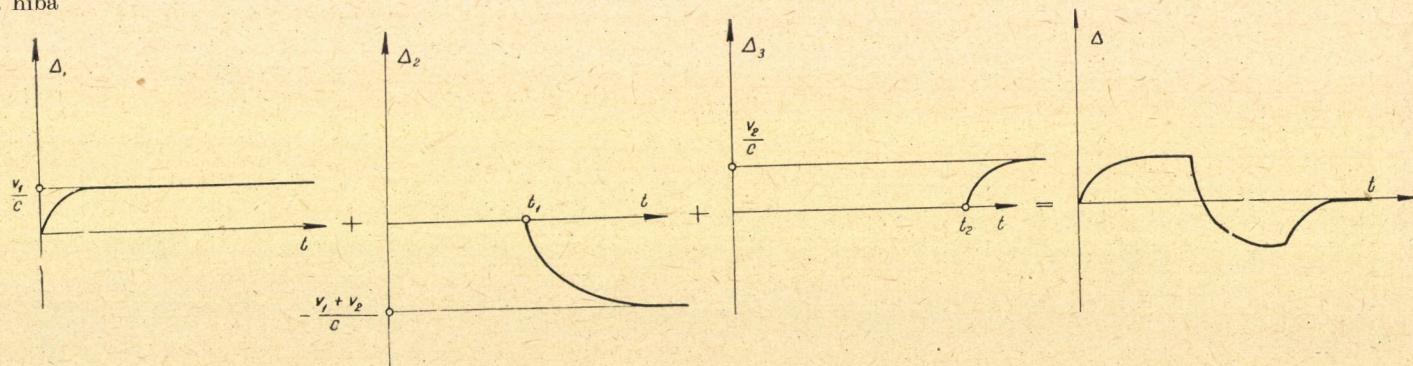
2. ábra

Háromszögalakú meridiánvonal :

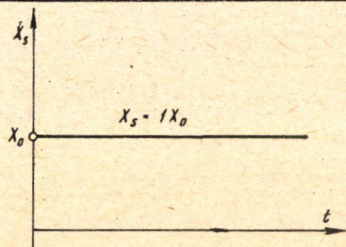
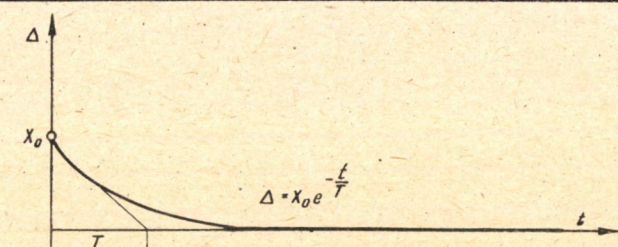
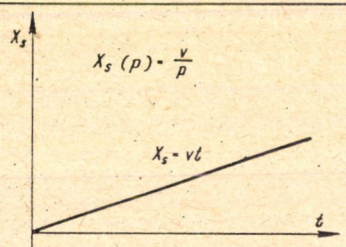
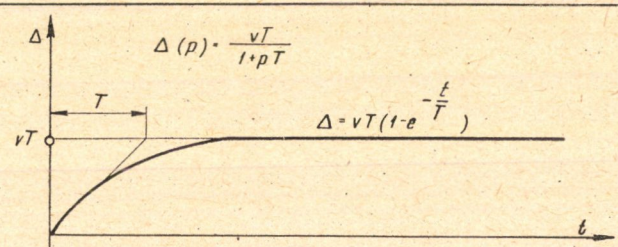
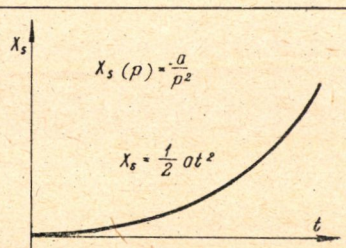
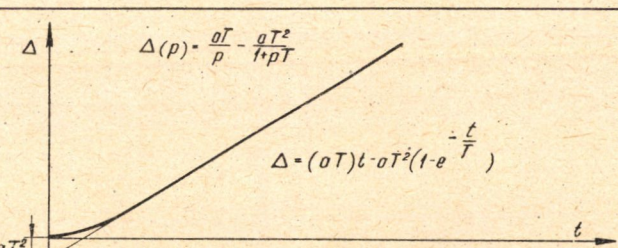
a bemenőjel



a hiba

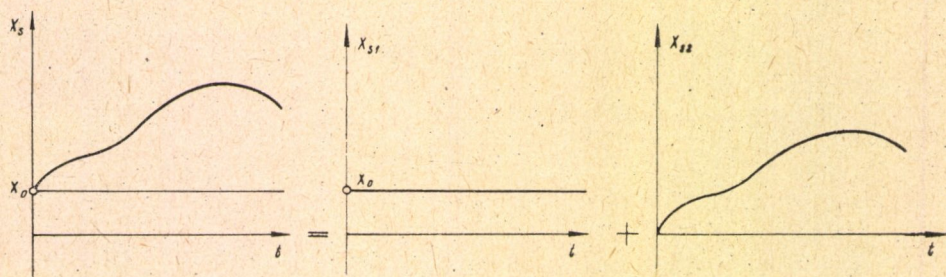


3. ábra

Sablonalak.	Követési hiba.	Követési hiba állandósult ért.
 <p>$X_s = 1 X_0$</p>	 <p>$\Delta = X_0 e^{-\frac{t}{T}}$</p>	0
 <p>$X_s(p) = \frac{v}{p}$</p> <p>$X_s = vt$</p>	 <p>$\Delta(p) = \frac{vT}{1 + pT}$</p> <p>$\Delta = vT(1 - e^{-\frac{t}{T}})$</p>	$vT - \frac{v}{c}$
 <p>$X_s(p) = \frac{a}{p^2}$</p> <p>$X_s = \frac{1}{2} at^2$</p>	 <p>$\Delta(p) = \frac{aT}{p} - \frac{aT^2}{1 + pT}$</p> <p>$\Delta = (aT)t - aT^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$</p>	∞

4. ábra

A kezdeti vagy ú. n. »öröklött« hiba a szabályozás asztatikus jellege következtében idővel teljesen eltűnik, egyébként a kezdeti hiba sztatikus szabályozás esetén is a rendszer sztatikája által meghatározott értékig lecsökken (éppen a szabályozás lényege, a visszavezetés alkalmazása következtében). Ez egyébként a szuperpozíció alkalmazásával is belátható, ugyanis a kezdeti hiba a sablon meridiángörbéjének megfelelő megemelésével vagy lesüllyesztésével egyenértékű.



5. ábra

A sablon előjavítása

A sablon előjavítása lényegében azt jelenti, hogy a munkadarab meridiángörbéjét írjuk elő, és a rendszer átviteli függvénye alapján meghatározzuk a sablon szükséges alakját. Ha x_s -sel jelöljük a sablon normális magasságát és x'_s -vel az előjavított sablon magasságát, akkor eddigi jelöléseinkkel x_k -nak kell x_s -sel egyenlőnek lennie. Tehát

$$\frac{x_s}{x'_s} = Y^*$$

vagyis

$$x'_s = \frac{x_s}{Y^*}.$$

Esetünkben

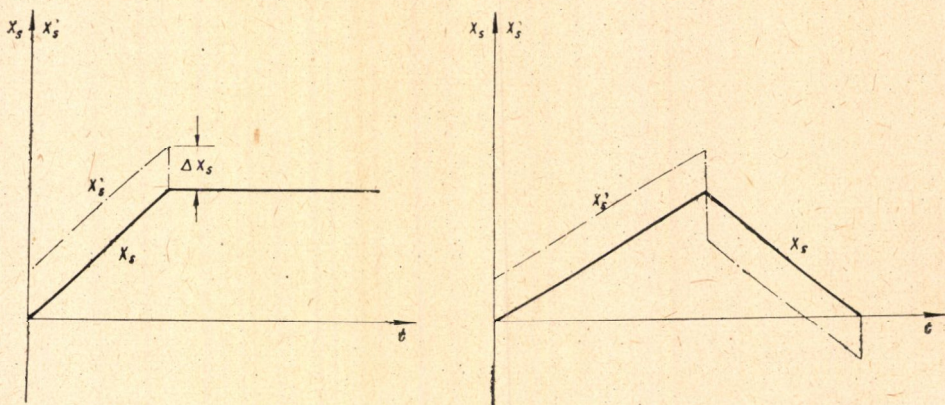
$$x'_s = x_s(1 + pT) = x_s + pTx_s$$

Az előjavítás (ráhagyás, ill. levétel) nagysága

$$\Delta x_s = x'_s - x_s = pTx_s$$

Például ha $x_s(t) = vt$, akkor $\Delta x_s = vT$.

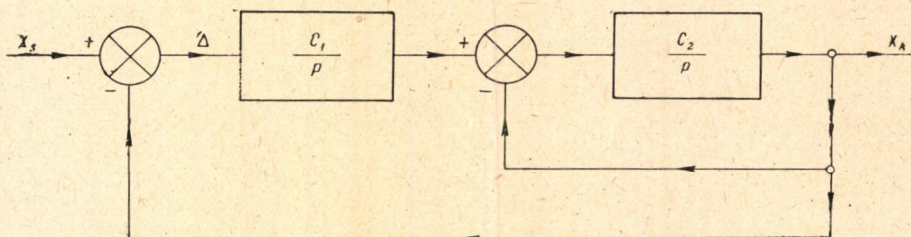
Az előjavított sablon néhány esetben:



6. ábra

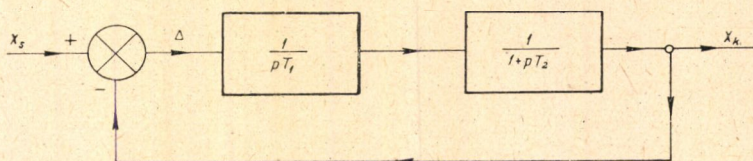
Fazekas Ferenc dolgozatának 10. pontjában vizsgált visszacsatolási mód

A dolgozatban vizsgált visszacsatolási mód lényegében az eredeti rendszerrel még egy szervórendszert kapcsol sorba. A vizsgált visszacsatolás blokkvázlata:



7. ábra

A belső visszacsatolással rendelkező kör helyett annak eredő átviteli függvényét figyelembevéve a blokkvázlat a következőképpen alakul:



8. ábra

A nyílt rendszer átviteli függvénye:

$$Y = \frac{1}{pT_1(1+pT_2)} \quad \text{ahol} \quad T_1 = \frac{1}{c_1};$$

$$T_2 = \frac{1}{c_2}.$$

A zárt rendszer átviteli függvénye :

$$Y^* = \frac{1}{p^2 T^2 + 2\zeta T p + 1}$$

$$\zeta = \frac{T_1}{2\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$$

ahol $T^2 = T_1 T_2$; $2\zeta T = T_1$;

A rendszer kielégítő működésének feltétele (5%-nál kisebb túlszabályozás egységugrás alakú bemenőjel esetén)¹

$$\zeta \geq 0,707, \text{ tehát } c_2 \geq 2c_1$$

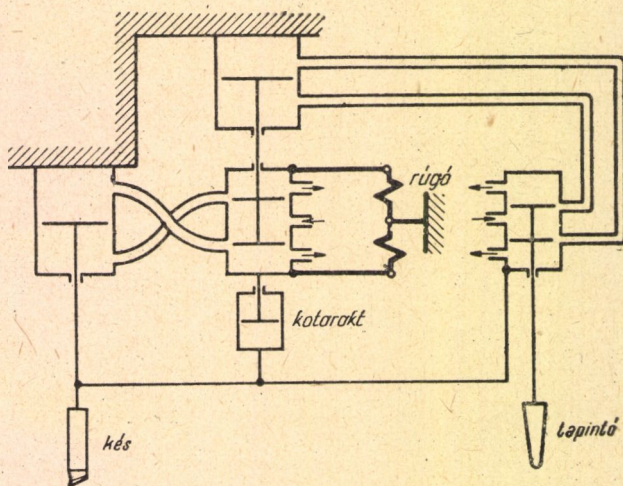
A hibaátviteli függvényből (a hasonlósági tétel figyelembevételével)

$$Y_h = \frac{pT_1(1 + pT_2)}{p^2T^2 + pT_1 + 1}$$

látható, hogy 1-es típusú szervórendszerrel van dolgunk, amelynek állandósult sebességi hibáját a c_1 tényező határozza meg. A szabályozási idő $c_2 = 2c_1$ esetben (optimális működés) $T_{sz} \approx 3T$.

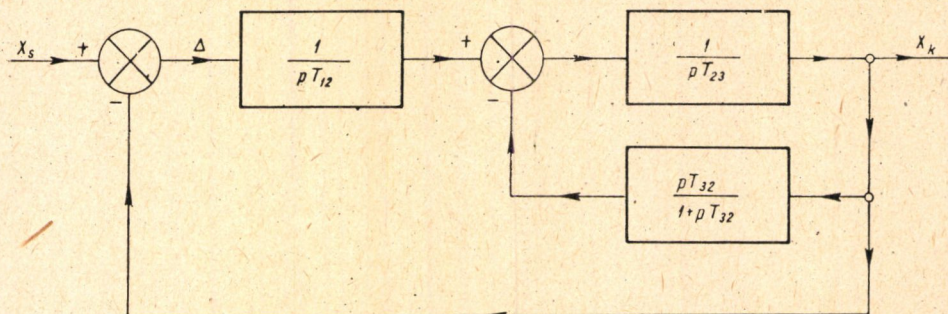
A 10. pontban vizsgált visszacsatolási mód alkalmazása tehát a jelkövetés pontosságát minőségileg javítani nem tudja, mert a rendszer továbbra sem képes parabolikusan változó meridiángörbét véges értékhez tartó hibával másolni. Ez a rendszer azonban lehetővé teszi, hogy a tapintóval kisebb vezérlőtollatytűt mozgathassunk.

A követési pontosságot minőségileg javíthatjuk akkor, ha a fenti merev belső visszacsatolás helyett ú. n. izodrom-visszavezetést alkalmazunk. A rendszer szerkezeti vázlata és blokkvázlata ebben az esetben :



9. ábra

¹ L. Chestnut—Mayer i. m. 62. o. 3. 8—4 ábra és 311. o. 11. 3—6 ábra alapján.



10. ábra

A hibaátviteli függvény:

$$Y_h = \frac{p^2 T_{12} (T_{23} + T_{32}) \left[1 + p \frac{T_{23} T_{32}}{T_{23} + T_{32}} \right]}{1 + p T_{32} + p^2 T_{12} (T_{23} + T_{32}) + p^3 T_{12} T_{23} T_{32}}$$

Ez a rendszer tehát 2-es típusú szervórendszer, amely állandó sebességű bemenőjelet állandósult hiba nélkül, állandó a gyorsulású $x_s = \frac{1}{2} at^2$ jelet pedig állandósult állapotban $a T_{12} (T_{23} + T_{32})$ hibával követ.

IRODALOM

- Fazekas Ferenc* dolgozatában megjelölt forrásmunkákon kívül
Frigyes Andor: Szabályozások vizsgálata frekvenciamódszerrel I. Közlemény, Mérés és Automatika, 1953. 9. sz.
Dukes Tivadar: Szabályozások vizsgálata frekvenciamódszerrel II. Közlemény, Mérés és Automatika, 1953. 10. sz. III. Közlemény s. e.
 Солодовников: Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Москва, Гостехиздат 1952.
H. Chestnut—R. Mayer: Servomechanisms and regulating system design. Vol. 1. John Wiley & Sons, Inc. New-York. Chapman & Hall, Ltd. London. 1951.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОПИРОВАЛЬНОГО ТОКАРНОГО СТАНКА «ГИДРОФИКС» ПО ТЕОРИИ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

В. Терек

Резюме

Рассматриваются свойства следящей системы первого изготовленного в Венгрии копирующего токарного станка «Гидрофикс». Автор, пренебрегая нелинейностью и силами инерции (последние являясь при нормальных рабочих скоростях ничтожными, деформируют только высокочастотный участок амплитудно-фазовой характеристики), считает систему чисто интегральным регулированием. С помощью обычного символического метода определяется ошибка слежения при некоторых типичных формах шаблона, и показано применение принципа наложения на двух более сложных шаблонах.

Таким же образом исследована предварительная поправка шаблона. Критически рассматривается обратная связь, предложенная в статье, Фазекаша, и внимание обращается на достоинства более совершенной, так называемой изодромной обратной связи.

AN INVESTIGATION OF THE COPYING LATHE »HYDROFIX«
BY THE THEORY OF SERVOMECHANISMS

V. TÖRÖK

Summary

The article deals with the servo system of the first copying lathe, made in Hungary, the »Hydrofix«. The author neglects the nonlinearities and the forces of inertia (the latter are negligible at the normal operational velocities and deflect only the high-frequency end of the Nyquist-diagramm) and takes the system for a simple type I servo-system. The error of the copying is determined with the usual operational method for several typical forms of pattern; the use of the superposition theorem on two more complex patterns is shown. The pre-correction of the pattern is treated in a similar way. The way of feedback treated by F. Fazekas in his article is studied critically, and attention is directed to the advantages of the internal feedback loop with a phase-lead element.

PÁRHUZAMOS VEZETÉKEKBŐL ÁLLÓ RENDSZER ELEKTROMOS TULAJDONSÁGAINAK LEÍRÁSÁRA SZOLGÁLÓ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA A MATRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL

LOVASS-NAGY VIKTOR

Összefoglalás

Jelen dolgozat a matrix-számítás néhány újabb eredményének felhasználásával vizsgálja feszültség-hullámok tovaterjedését tetszősszerűnti számú párhuzamos vezetékből álló rendszerben. Az egyes vezetékekben kialakuló feszültség- és áramerősség-eloszlást a hely és idő függvényeként leíró parciális differenciálegyenletrendszerből levezetett egyetlen matrixdifferenciálegyenlet (a skalár telegráf-egyenlet vezetékrendszerekre általánosított analogonja) általános megoldása után szerző külön tárgyalja azon esetet, mikor a vezetékrendszert alkotó vezetékek egy »nullvezeték« köré írt körhengeren aequidistans módon helyezkednek el, továbbá a vezetékek anyagi állandói és méretei azonosak; ez esetben a megoldás a ciklikus matrixok néhány tulajdonságának felhasználásával történik. Végül — példaként — szerző bemutatja a levezetett eredményeknek a háromfázisú távvezetékre való alkalmazását.

Jelen dolgozat célja, hogy a matrix-számítás néhány újabb eredményének [1] felhasználásával vizsgálja tetszősszerűnti számú párhuzamos vezetékből álló rendszerek elektromos állapotának leírására szolgáló lineáris parciális differenciálegyenletrendszer megoldását. Hasonló vizsgálatokat végeztek pl. *S. O. Rice* [2], továbbá *H. J. v. Bayer* és *R. Knechtli* [3]; jelen dolgozat a matrix-számítás lehetőségeinek fokozottabb kihasználására törekedve, az idézett szerzők által vizsgált eseteknél általánosabban felvetett probléma gyakorlati számítására is alkalmas megoldását kívánja szolgáltatni.

Jelöljük valamely, n darab párhuzamos vezetékből plusz egy nullvezetékből álló vezetékrendszer (hosszegységre vonatkoztatott) elektromos állandóit a következőképpen:

R_k = a k -edik vezeték ohmikus ellenállása,
 L_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték alkotta hurok öninduktivitása,
 L_{kl} = a k -edik vezeték-nullvezeték hurok és l -edik vezeték-nullvezeték hurok kölcsönös induktivitása,

C_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték közötti kapacitás,
 C_{kl} = a k -edik és l -edik vezeték közötti kapacitás,
 G_{kk} = a k -edik vezeték és a nullvezeték közötti levezetés,
 G_{kl} = a k -edik és l -edik vezeték közötti levezetés.

Jelöljük továbbá a k -adik vezetékben folyó áramot i_k -val, a vezeték valamely pontjában a nullvezetékhez viszonyított feszültséget pedig u_k -val. Ily módon a vezetékrendszer matrix-alakban felírt differenciálegyenleteiben szereplő matrixok a következők:

a) *Oszlop-matrixok:*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

b) *Quadratikus matrixok:*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n C_{1k} & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & \sum_{k=1}^n C_{2k} & \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^n C_{nk} \end{bmatrix};$$

$$L_{ik} = L_{ki} \quad C_{ik} = C_{ki}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n G_{1k} & -G_{12} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & \sum_{k=1}^n G_{2k} & \dots & -G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & \sum_{k=1}^n G_{nk} \end{bmatrix};$$

$$G_{ik} = G_{ki}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_n \end{bmatrix} = \langle R_1 R_2 \dots R_n \rangle \quad (\text{diagonál-matrix})$$

A k -adik vezeték mentén az áramerősség, továbbá a feszültség változását leíró egyenletek a következők [4]:

$$(1) \quad -\frac{\partial i_k}{\partial x} = G_{k1}(u_k - u_1) + \dots + G_{kk}u_k + \dots + G_{kn}(u_k - u_n) + \\ + C_{k1} \frac{\partial}{\partial t}(u_k - u_1) + \dots + C_{kk} \frac{\partial}{\partial t} u_k + \dots + C_{kn} \frac{\partial}{\partial t}(u_k - u_n)$$

$$(2) \quad -\frac{\partial u_k}{\partial x} = R_{k1}i_k + L_{k1} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \dots + L_{kk} \frac{\partial i_k}{\partial t} + \dots + L_{kn} \frac{\partial i_n}{\partial t}$$

Ezeket az egyenleteket valamennyi vezetékre képezve két (külön-külön n darab elsőrendű egyenletből álló) differenciálegyenletrendszert nyerünk, melyek — a fenti jelölések felhasználásával — matrix-alakban a következőképpen írhatók:

$$(1a) \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

$$(2a) \quad -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}$$



1. ábra

A (2a) egyenletet x szerint differenciálva és $\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}$ helyébe az (1a) egyenletből adódó kifejezést helyettesítve (a matrix-szorzatokban ügyelve a tényezők helyes sorrendjére) nyerjük, hogy:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \mathbf{LC} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{RC} + \mathbf{LG}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{RG}\mathbf{u}$$

(Ez a matrix-egyenlet szolgáltatja a skalár »telegráf-egyenletnek« vezetékrendszerre való általánosítását.) Minthogy — ismeretes módon [5] — »állóhullám« alakú megoldások segítségével a »telegráf-egyenlet« tetszés szerinti »haladó« hullám alakú megoldása is előállítható, elegendő a (3) egyenlet »állóhullám« alakú megoldásainak keresésére szorítkoznunk. Amint igazolható, a (3) egyenlet »állóhullám« alakú megoldása:

$$(4) \quad \mathbf{u} = e^{-\Gamma x} \mathbf{v}_0 e^{j\omega t}$$

ahol

$$\Gamma = [(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega\mathbf{C})]^{1/2}$$

Vizsgáljuk a továbbiakban a következő esetet: A vezetérendszer elrendezése történjék az 1. sz. ábra szerint, tehát a vezetékrendszert alkotó n darab vezetékek egy »nullvezeték« köré írt körhengeren aequidistans módon helyezkedik el; továbbá a vezetékek anyagi állandói és méretei azonosak.

Ez esetben a (3) egyenletben szereplő matrixok mind ciklikusak [6]; ugyanis

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \dots = R_k = \dots = R_n = R \\ L_{1,k} &= L_{2,k+1} = \dots = L_{k,2k-1} = \dots = L_{n,n+k-1} = L_{k-1} \\ C_{1,k} &= C_{2,k+1} = \dots = C_{k,2k-1} = \dots = C_{n,n+k-1} = C_{k-1} \\ G_{1,k} &= G_{2,k+1} = \dots = G_{k,2k-1} = \dots = G_{n,n+k-1} = G_{k-1} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

tehát a ciklikus matrixoknál szokásos jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R(R, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{L} &= L(L_0, L_1, \dots, L_{n-1}) \\ \mathbf{C} &= C\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu, -C_1, -C_2, \dots, -C_{n-1}\right) \\ \mathbf{G} &= G\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} G_\nu, -G_1, -G_2, \dots, -G_{n-1}\right) \end{aligned}$$

továbbá, bevezetve az $l_\nu = j\omega L_\nu$, $c_\nu = -(G_\nu + j\omega C_\nu)$ rövidítéseket, és megjegyezve, hogy:

$$\begin{aligned} l_{\nu+n} &= l_{\nu-n} = l_\nu = l_{-\nu} \\ c_{\nu+n} &= c_{\nu-n} = c_\nu = c_{-\nu} \end{aligned}$$

és

$$l_n = l_0; \quad c_n = c_0$$

nyerjük, hogy az $(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C})$ szorzat-matrix is ciklikus, és pedig

$$\begin{aligned} &(\mathbf{R} + j\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + j\omega \mathbf{C}) = \\ &= \left\{ \left[-R \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu - l_0 c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu} - l_0) c_\nu \right], \right. \\ &\left[Rc_1 - l_1 c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+1} - l_1) c_\nu \right], \dots, \left[Rc_k - l_k c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+k} - l_k) c_\nu \right], \dots \\ &\dots, \left[Rc_{n-1} - l_{n-1} c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (l_{n-\nu+(n-1)} - l_{n-1}) c_\nu \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Mint hogy valamely $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ n -edrendű ciklikus matrix sajátértékei [6]:

$$\lambda_k = a_0 + a_1 \omega_k + a_2 \omega_k^2 + \dots + a_{n-1} \omega_k^{n-1}$$

ahol:

$$\omega_k = e^{j\varphi_k}; \quad \varphi_k = \frac{2k\pi}{n}$$

tehát az $(R + j\omega L)(G + j\omega C)$ matrix saját-értékeit a

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \sum_{\nu=0}^{n-1} l_\nu \omega_k^\nu - R \left[c_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu (1 - \omega_k^\nu) \right] + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\nu (l_{n-\nu+\mu} - l_\mu) \omega_k^\mu \end{aligned}$$

képlet szolgáltatja.

Ha a vezetékek száma (n) páratlan egész szám, akkor:

$$l_1 = l_{n-1}, \quad l_2 = l_{n-2}, \dots, \quad l_\nu = l_{n-\nu}, \dots, \quad l_{\frac{n-1}{2}} = l_{\frac{n+1}{2}}$$

$$c_1 = c_{n-1}, \quad c_2 = c_{n-2}, \dots, \quad c_\nu = c_{n-\nu}, \dots, \quad c_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n+1}{2}}$$

ez esetben tehát az $\omega_k^\nu + \omega_k^{n-\nu} = 2 \cos \nu \varphi_k$ összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \left\{ R + l_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} l_\nu \cos \nu \varphi_k \right\} - 2R \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} c_k (1 - \cos \nu \varphi_k) + \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} c_\nu \left\{ (l_\nu - l_0) + \sum_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} (l_{n-\mu+\nu} - 2l_\mu + l_{\mu+\nu}) \cos \mu \varphi_k \right\}. \end{aligned}$$

Ha a vezetékek száma (n) páros egész szám, akkor:

$$l_1 = l_{n-1}, \quad l_2 = l_{n-2}, \dots, \quad l_{\frac{n}{2}-1} = l_{\frac{n}{2}+1}$$

$$c_1 = c_{n-1}, \quad c_2 = c_{n-2}, \dots, \quad c_{\frac{n}{2}-1} = c_{\frac{n}{2}+1}$$

ez esetben tehát az ω_k -ra vonatkozó fenti összefüggés felhasználásával :

$$\begin{aligned} \lambda_k = & -c_0 \left\{ R + l_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} l_\nu \cos \nu \varphi_k \right\} - 2R \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_k (1 - \cos \nu \varphi_k) + \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_\nu (l_\nu - l_0) + 2 \sum_{\mu=1}^{\frac{n}{2}-1} (l_{n-\mu+\nu} - 2l_\mu + l_{\mu+\nu}) \cos \mu \varphi_k - \\ & - Rc_n \left(1 - \omega_k^{\frac{n}{2}} \right) + \\ & + \omega_k^{\frac{n}{2}} \left\{ -c_0 l_n + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}-1} c_\nu (l_{\frac{n}{2}-\nu} - l_n) + c_n (l_0 - l_{\frac{n}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

Nyilván :

$$\omega_k^{\frac{n}{2}} = e^{j \frac{n}{2} \varphi_k} = e^{jk\pi} = \begin{cases} +1, & \text{ha } k = 0, 2, 4, \dots \\ -1, & \text{ha } k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Mint hogy valamely \mathbf{C} ciklikus matrix adott $f(\mathbf{C})$ analitikus függvény

$$f(\mathbf{C}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \bar{\omega}_k^2 \dots \bar{\omega}_k^{n-1}]$$

alakban állítható elő [8], tehát :

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma x} &= e^{-V(\mathbf{R}+j\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+j\omega\mathbf{C})x} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-V \bar{\lambda}_k x} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1 \bar{\omega}_k \bar{\omega}_k^2 \dots \bar{\omega}_k^{n-1}]. \end{aligned}$$

Például $n = 3$ esetén :

$$\lambda_k = -c_0 \left[R + l_0 + 2l_1 \cos \frac{2k\tau}{3} \right] - \\ - 2c_1 [R + (l_0 - l_1)] \left[1 - \cos \frac{2k\tau}{3} \right] \quad (k = 1, 2, 3)$$

tehát :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -(c_0 + 3c_1) (R + l_0 - l_1) = \\ = [G_0 + 3G_1 + j\omega (C_0 + 3C_1)] [R + j\omega (L_0 - L_1)]$$

és

$$\lambda_3 = -c_0 (R + l_0 + 2l_1) = [G_0 + j\omega C_0] [R + j\omega (L_0 + 2L_1)].$$

Ily módon adódik, hogy :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = R (G_0 + 3G_1) - \omega^2 (C_0 + 3C_1) (L_0 - L_1) + \\ + j\omega [R (C_0 + 3C_1) + (G_0 + 3G_1) (L_0 - L_1)]$$

és

$$\lambda_3 = RG_0 - \omega^2 C_0 (L_0 + 2L_1) + j\omega [RC_0 + G_0 (L_0 + 2L_1)].$$

Minthogy pedig :¹

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3} \left\{ e^{-j\sqrt{\lambda_1}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + e^{-j\sqrt{\lambda_2}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] + \right. \\ \left. + e^{-j\sqrt{\lambda_3}x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t} = \\ = \frac{1}{3} \left\{ e^{-j\sqrt{\lambda_1}x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] + e^{-j\sqrt{\lambda_3}x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t},$$

¹ Az ú. n. »harmadik egység-gyökök« szokott jelölésével :

$$\omega_1 = \varepsilon, \omega_2 = \bar{\varepsilon}, \omega_3 = 1 \\ \text{és ily módon :} \\ \omega_1^2 = \bar{\varepsilon}, \omega_2^2 = \varepsilon, \omega_3^2 = 1$$

következésképpen :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3} \left\{ 3e^{-\gamma \bar{\lambda}_1 x} \mathbf{E} + [e^{-\gamma \bar{\lambda}_2 x} - e^{-\gamma \bar{\lambda}_3 x}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \right\} u_0 e^{j\omega t}$$

mert :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \bar{\varepsilon} \ \varepsilon] + \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} [1 \ \varepsilon \ \bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} & \varepsilon^2 \\ \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon}^2 & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon & \bar{\varepsilon}^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{E} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1]$$

Ha például — speciális esetként — feltesszük, hogy

$$u_0 = U_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

akkor :

$$\mathbf{U} = U_0 e^{-\gamma [R(G_0+3G_1) - \omega^2(C_0+3C_1)(L_0-L_1) + j\omega\{R(C_0+3C_1) + (G_0+3G_1)(L_0-L_1)\} x]} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} e^{j\omega t}$$

minthogy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 0$$

Úgynevezet »ideális vezeték« esetében (ha t. i. $\mathbf{R} = 0$, valamint $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_1 = 0$) azt nyerjük, hogy :

$$\mathbf{U} = U_0 e^{\mp \omega \sqrt{(C_0+3C_1)(L_0-L_1)} x} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} e^{j\omega t};$$

Tehát az egyes vezetékben keletkező feszültségek leírására az alábbi függvények adódnak :

$$U_1 = U_0 e^{\mp \omega \sqrt{(C_0+3C_1)(L_0-L_1)} x + j\omega t}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (-1 + j\sqrt{3}) U_0 e^{\mp \omega t} \overline{(C_0 + 3C_1)(L_0 - L_1)} x + j\omega t$$

$$U_3 = \frac{1}{2} (-1 - j\sqrt{3}) U_0 e^{\mp \omega t} \overline{(C_0 + 3C_1)(L_0 - L_1)} x + j\omega t.$$

Hasonlóképpen képezhetők az egyes vezetékben fellépő feszültségeket leíró függvények az általános ($R \neq 0$, $G_0 \neq 0$; $G_1 \neq 0$) esetben is.

(A számításaink kiindulásaként felírt (1) és (2) egyenleteket arra az esetre képeztük, amikor a nullvezeték árammentes, tehát

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Amennyiben $\sum_{k=1}^n i_k \neq 0$, a (2) egyenlet a következőképpen módosul:

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x} = R_k i_k + \sum_{k=1}^n i_k R_0 +$$

$$+ L_{k1} \frac{\partial i_1}{\partial t} + \dots + L_{kk} \frac{\partial i_k}{\partial t} + \dots + L_{kn} \frac{\partial i_n}{\partial t}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_0 & R_0 & R_0 & \dots & R_0 \\ R_0 & R_2 + R_0 & R_0 & \dots & R_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_0 & R_0 & R_0 & \dots & R_n + R_0 \end{bmatrix}$$

egyébként a további tárgyalásmód analóg a $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ esettel).

IRODALOM

[1] *Egerváry J.*: Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, III. kötet, 4. szám.

[2] *S. O. Rice*: Steady state solutions of transmission line equations. The Bell System Technical Journal, Vol. XX., No. 2.

[3] *H. J. v. Baeyer* und *R. Knechli*: Über die Behandlung von Mehrleitersystemen mit transversal elektromagnetischen Wellen bei hohen Frequenzen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. Vol. III. Fasc. 4.

[4] Lásd pld.: *A. G. Webster—G. Szegő*: Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik, Berlin 1930., Teubner kiadás; 53. o.

[5] Lásd pld. *A. G. Webster—G. Szegő* idézett munkáját.

[6] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

[7] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

[8] Lásd *Egerváry J.* idézett munkáját.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МАТРИЦ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, СЛУЖАЩЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ

В. Ловашш-Надь

Р е з ю м е

Настоящая работа, используя некоторые новейшие результаты теории матриц, исследует распространение бросков напряжения в электросети, состоящей из произвольного числа проводов. После нахождения общего решения матричного дифференциального уравнения (аналогичного скалярному телеграфному уравнению и являющегося обобщением последнего), выведенного из системы уравнений с частными производными, задающей распределение напряжения и силы тока в отдельных проводах как функций места и времени, автор занимается случаем, когда образующие электросеть провода располагаются эквидистантно на поверхности круглого цилиндра, описанного вокруг нейтрали и когда размеры, а также материальные постоянные проводов являются одинаковыми. В таком случае решение производится с помощью некоторых свойств циклических матриц. В заключение автор в качестве примера дает применение выведенных результатов для трехфазных дальних линий.

LÖSUNG, MIT HILFE DES MATRIZENKALKÜLS, EINES PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS, DAS ZUR BESCHREIBUNG DER ELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN IN EINEM AUS PARALLELELEITERN BESTEHENDEN SYSTEM DIENT

V. LOVASS-NAGY

Zusammenfassung

Unter Anwendung einiger neueren Ergebnisse des Matrizenkalküls wird in vorliegender Abhandlung die Fortpflanzung der Spannungswellen in einem System untersucht, das aus einer beliebigen Anzahl paralleler Leitern besteht. Vorerst wird eine allgemeine Lösung der einzigen Matrixdifferentialgleichung gegeben, die aus dem, die in den einzelnen Leitern entstehenden Spannungs- und Stromstärkeverteilungen als Funktionen von Ort und Zeit beschreibenden, partiellen Differentialgleichungssystem abgeleitet wurde und eine Verallgemeinerung der skalaren Telegraphengleichung ist. Sodann behandelt Verfasser gesondert den Fall, in dem die Leiter des Systems auf einer Kreiszylinderfläche, die um einen »Null-Leiter« geschrieben ist, equidistant verteilt und die Materialkonstanten und Abmessungen der Leiter gleich sind. In diesem Falle erfolgt die Lösung durch Anwendung einiger Eigenschaften der zyklischen Matrizen.

Zum Schluss wird — als Beispiel — die Anwendung der erhaltenen Ergebnisse bei Drehstromleitung dargestellt.

KÖRKERESZTMETSZETŰ VEZETŐBEN FELLÉPŐ ÁRAMKISZORÍTÁSRÓL

FREUD GÉZA

Összefoglalás

A szerző kiszámítja egy homogén, ω körfrekvenciájú, sinusosan változó mágneses térbe helyezett körkeresztmetszetű vezetőben az áramsűrűségeloszlást, ha abban I áram folyik. Ennek segítségével meghatározza a vezető hosszegységében fellépő Joule-veszteséget.

Bevezetés

Mint ismeretes, egyetlen magános körkeresztmetszetű vezetőben fellépő áramkiszorítás számítását *A. Sommerfeld* [3] oldotta meg. Bár *Sommerfeld* számításának számos fontos alkalmazása van, az nem használható fel minden esetben. Ha olyan körvezetőről van szó, amely kevés és egymástól távoleső vezetőkből álló vezeték része, akkor *Sommerfeld* számítása jól használható. Ugyanis ilyen esetben a távolabbi vezetők mágneses tere és az azoktól származó áramkiszorítás a kiválasztott vezetőben elhanyagolható a vezető áramától származó mágneses tér és ennek az árameloszlásra gyakorolt visszahatása mellett. Egészen más viszonyok alakulnak ki, ha nagyszámú vezetőkből álló köteg egyes vezetőit tekintjük.

- Ilyen körülmények közt a többi vezetőben folyó áramok sokkal nagyobb mágneses teret hozhatnak létre, mint a tekintetbe vett vezető által létrehozott mágneses tér saját árama. Ha a vezetőköteg igen sok kis átmérőjű vezetőből áll, feltehető, hogy a többi vezetőben folyó áramok által keltett mágneses tér egyetlen vezető helyén még homogén. A feladat tehát az alábbi módon egyszerűsödik: Egy térben homogén, időben sinusosan változó ω körfrekvenciájú mágneses térbe egy körkeresztmetszetű vezetőt helyezünk, melyben ugyancsak ω körfrekvenciájú sinusos áram folyik. Meghatározandó az árameloszlás a vezetőben. Az árameloszlás ismeretében meg fogjuk határozni a vezető hosszegységére eső Joule-veszteséget.

Az így megfogalmazott probléma a kérdés matematikai oldalát tekintve határesetre egy *Ch. Maneback* [1] által tárgyalt feladatnak: határozzuk meg azt az örvényárameloszlást, amit egy végtelen homogén körkeresztmetszetű vezetőben egy vele párhuzamosan futó vonalszerű áramfonal kelt. A vezetőhengeren kívüli tér vákuum vagy pedig homogén szigetelő. *Ch. Maneback* ezt az elektrodinamikai problémát egy integrálegenlet megoldására vezette vissza. A jelen dolgozat függelékében ismertetjük a Maneback-féle feladat elemi megoldását, amely csak a potenciálmélet általánosan ismert összefüggéseit feltételezi, integrálegenlet megoldását nem teszi szükségessé. Meg-

oldásunk két vonatkozásban többet nyújt, mint *Ch. Manebacké*: Először is minden külön megfontolás nélkül egysapásra megadja az örvényáramok által keltett mágneses teret a vezetőhengeren kívül is. Másodsor minden nehézség nélkül számításba lehet venni a mágneses erővonalak törését a vezetőhenger palástfelületén annak következtében, hogy a vezető anyagának és a vele érintkező szigetelő közegnek (ill. vákuumnak) a mágneses permeabilitása különböző. Amennyiben a vezető ferromágneses anyagból készült, ezáltal az örvényáramok intenzitása tetemesen megnövekedik.

Visszatérve arra az esetre, amikor a külső mágneses teret a vezető környezetében homogénnek feltételezzük, ezt az előbbiből határátmenettel úgy származtathatjuk, hogy az áramfonalnak a vezetőhenger tengelyétől miért R távolságát minden határon túl növeljük, miközben az áramfonalban az I áramintenzitás úgy növekedik, hogy az I/R hányados állandó maradjon. Mint várható, a határeset közvetlen tárgyalása egyszerűbb és áttekinthetőbb, mint az általánosabb eseté. Ugyanakkor megvan az az előnye, hogy kombinálni lehet a mágneses térerősség közvetlen kísérleti meghatározásával és akkor is minden nehézség nélkül használható, ha az egyes áramfonalak által keltett mágneses teret erősen mágneseződő anyagok (pl. vas) jelenléte jelentékenyen módosítja. Ilyen vonatkozásban pl. a közölt módon kiszámítható a járulékos veszteség körkeresztmetszetű vezetővel tekercselt kismotorok hornyaiban. *R. Richter* (Archiv f. Elektrotechnik 4 1915, 15.) erre az esetre közelítő képletet állít fel.¹ Ennek során feltételezi, hogy a vezetőben indukált örvényáramok tere az erővonalak lefutását nem módosítja, ez a közelítés nyilván csak egészen kis frekvenciáknál jogosult. Ugyancsak számítható a járulékos veszteség körkeresztmetszetű transzformátor tekercselésében. Ebben az esetben a közölt közelítés mellett elhanyagoljuk a vezető görbületét; a mágneses térerősség akár számítással, akár modellkísérlettel meghatározható. Hasonló módon tárgyalható több más, a műszaki gyakorlatban előforduló elrendezés is.

Az árameloszlás számítása

A feladatban szereplő elektromágneses tér két tér szuperpozíciójának fogható fel. Az első tér az I áram által átfolyt vezető saját tere, ha a külső mágneses tér nem hat. A második, erre szuperponálódó elektromágneses teret úgy származtatjuk, hogy az időben sinusosan változó homogén külső mágneses térbe belehelyeztük a körkeresztmetszetű vezetőt. A vezetőben a külső tér hatására örvényáramok indukálódnak, de a vezető hosszabani eredő áram nem folyik.

Az I amplitúdójú áram által átfolyt vezetőben kialakuló árameloszlást, ha a külső tér nem hat, az

$$(1) \quad i(r) = \frac{Ip}{2\pi a} \frac{J_0(pr)}{J_1(pa)} \quad \text{ahol} \quad p = \frac{\sqrt{-2}}{\delta}$$

(lásd *Simonyi* [1], 3c. 31. képlet, 235. o.) összefüggés szolgáltatja. Ebben a képletben a jelenti a vezetőhenger sugarát, $i(r)$ az áramsűrűség komplex

Fényes Tamás kollégánk megállapította, hogy *Richter* eredeti képlete téves, az egy π 4 tényezővel szorozandó.

amplitúdóját a vezető tengelyétől r távolságban, j a képzetes egység, δ a behatolási mélység, amely a

$$(2) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \gamma}}$$

képlet segítségével számítható, ahol μ_2 a vezető homogén anyagának abszolút mágneses permeabilitása és γ a vezető anyagának fajlagos vezetőképessége (lásd *Simonyi* [1] 3c. 42. képlet, 236.). $J_0(x)$, ill. $J_1(x)$ a nulladrendű, ill. elsőrendű elsőfajú Bessel-függvény. Erre szuperponálódnak a külső mágneses tér által keltett örvényáramok.

A vezető belsejében fellépő tér előállítása vektorpotenciállal

Először is a vezető belsejében létesülő mágneses teret vektorpotenciál segítségével állítjuk elő. A Maxwell-egyenletek, a szereplő fizikai mennyiségeket MKS egységben kifejezve:

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i + \frac{\partial D}{\partial t} \\ \operatorname{rot} E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{ahol } D = \epsilon_2 E \text{ és } B = \mu_2 H$$

és az Ohm-törvény differenciális alakja:

$$(4) \quad i = \gamma E.$$

A második Maxwell-egyenlet teljesül, ha

$$(5) \quad B = \operatorname{rot} A \text{ és } E = -\frac{\partial A}{\partial t}.$$

A mágneses tér vektorpotenciálja. Feltételezzük, hogy μ_2 állandó. Az első Maxwell-egyenlet is kielégül, ha a vektorpotenciál a (helyettesítéssel nyert)

$$(6) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = -\mu_2 \frac{\partial A}{\partial t} - \epsilon_2 \mu_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

parciális differenciálegyenletnek tesz eleget. Miután a vezető belsejében töltés nem halmozódhat fel, $\operatorname{div} D = 0$, ami teljesül, ha kiegészítésképpen kikötjük, hogy

$$(7) \quad \operatorname{div} A = 0.$$

A másik kiegészítő egyenlet, t. i. $\operatorname{div} B = 0$ szintén teljesül, mert a mágneses teret vektorpotenciállal állítottuk elő. (6) és (7)-ből, ha felhasználjuk a vektoranalízisből ismert

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A$$

összefüggést, kapjuk :

$$(8) \quad \Delta A - \mu_2 \gamma \frac{\partial A}{\partial t} - \varepsilon \mu_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Közelebbről meg akarjuk vizsgálni az olyan megoldásokat, amelyek a z koordináta irányában terjedő haladó hullámokat állítanak elő :

$$(9) \quad A = A_0 e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right)}$$

ahol λ a vezető mentén terjedő hullám hullámhossza. Ha (8)-ba behelyettesítjük (9)-et és (2)-őt is számításba vesszük, kapjuk, hogy

$$(10) \quad \Delta A_0 - \left(\frac{2\gamma}{\delta^2} + \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) A_0 = 0.$$

Fenti egyenletben

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}$$

az olyan szigetelőközegben terjedő ω körfrekvenciájú síkhullám hullámhossza, amely szigetelőközeg abszolút dielektromos állandója ε_2 és abszolút mágneses permeabilitása μ_2 , vagyis ugyanakkora, mint a tekintetbevett vezetőé. A további számításokat nagy mértékben egyszerűsíti, hogy a szokásos vezetőanyagokra a legalacsonyabb frekvenciától egészen a mikrohullámú frekvenciáig is érvényes, hogy

$$\delta \ll \Lambda \quad \text{és} \quad \delta \ll \lambda.$$

Ilyen módon (10) helyett jó közelítéssel a numerikus számítások szempontjából sokkal jobban kezelhető

$$(11) \quad \Delta A_0 - \frac{2j}{\delta^2} A_0 = 0$$

egyenletre szorítkozunk. A $\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ tag elhanyagolása azt jelenti, hogy az eltolási áramot a vezetési áramhoz képest elhanyagoljuk, vagyis a folyamatot a vezetőn belül kvázistacionáriusként kezeljük. A $\frac{4\pi^2}{\Lambda^2}$ tag elhanyagolása azt jelenti, hogy az elektromágneses tér hullámszerű terjedését nem vesszük számításba. Elegendő tehát a teret egy a vezető tengelyére merőleges síkban vizsgálnunk.

A vektorpotenciál meghatározása

Áttérünk a konkrét feladat tárgyalására. A mágneses teret olyan vektorpotenciálból származtatjuk, amely a tér minden helyén a vezetőhenger tengelyével párhuzamos, és előjeles értéke A_0 . A vezetőkön belül legyen

$$(12) \quad A_0 = c_1 J_1 \left(\sqrt{\frac{2j}{\delta}} r \right) \cos \varphi,$$

ahol (r, φ) a vezetőhengerre merőleges síkban mért polárkoordináták, és a polárkoordinátarendszer kezdőpontja a vezetőhenger középvonalának dőfőpontja a síkon.

A mágneses tér A_0^* vektorpotenciálja a vezető hengeren kívül az

$$\Delta A_0^* = 0$$

egyenletnek tesz eleget; ennek megfelelően vegyük fel (a henger tengelyével párhuzamos) vektorpotenciált,

$$(13) \quad A_0^* = B_1 r \cos \varphi + c_2 \frac{\cos \varphi}{r}.$$

alakban. Fenti kifejezést derékszögű koordinátákra átírva,

$$A_0^* = B_1 x + c_2 \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Ebből pedig a B mágneses indukcióvektorkomponenseit a $B = \text{rot } A$ összefüggésből számítva:

$$B_x = \frac{\partial A_0^*}{\partial y} = - \frac{2c_2 xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$B_y = - \frac{\partial A_0^*}{\partial x} = - B_1 + \frac{2c_2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{c_2}{x^2 + y^2}$$

Ebből azonnal leolvasható, hogy a vezetőtől nagy távolságban a mágneses tér homogén és a mágneses indukció értéke B_1 a tér $-y$ irányú.

A (12), ill. (13)-ban szereplő c_1 és c_2 állandókat abból a feltételből határozzuk meg, hogy a vezető hatására a mágneses indukcióvektor normális komponense és a mágneses térerősségvektor tangenciális komponense folytonosan megy át:

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial \varphi} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial A_0^*}{\partial \varphi} \right)_{r=a}$$

és

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A_0}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A_0^*}{\partial r} \right)_{r=a},$$

ahol μ_1 a vezetón kívüli homogén közeg abszolút mágneses permeabilitása. Fenti összefüggésekbe A_0 és A_0^* (12) és (13) alatti kifejezését helyettesítve, c_1 és c_2 meghatározására az alábbi kétismeretlenű elsőfokú egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} c_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) - c_2 \frac{1}{a} &= B_1 a \\ c_1 \frac{\sqrt{-2j}}{\mu_2 \delta} J_1' \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + c_2 \frac{1}{\mu_1 a^2} &= \frac{B_1}{\mu_1} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$c_1 = \frac{2\mu_2 a B_1}{\mu_2 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + \mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} J_1' \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)},$$

ill. a $J_1'(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + J_0(x)$ összefüggés felhasználásával

$$(14) \quad c_1 = \frac{2\mu_2 a B_1}{\mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} I_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + (\mu_2 - \mu_1) J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)},$$

és hasonló kifejezést nyerünk c_2 -re; ez utóbbira azonban nem lesz szükségünk. A kitűzött feladatot meg is oldottuk: az örvényáramok sűrűségének eloszlása a vezető belsejében

$$i = \gamma E = -\gamma \frac{\partial A_1}{\partial t} = -j \omega \gamma A_0$$

azaz (12) és (14) felhasználásával:

$$(15) \quad i = \frac{2j \omega \gamma \mu_2 a B_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos \varphi}{\mu_1 \frac{\sqrt{-2j} a}{\delta} J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right) + (\mu_2 - \mu_1) J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} a \right)}$$

A wattvesztés számítása

Tekintettel (1) és (15)-re, a vezetőben fellépő eredő áramsűrűség komplex amplitúdója, amely a vezető saját áramának és a külső mágneses tér által indukált örvényáramnak az eredője,

$$(16) \quad i = b_0 J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) + b_1 J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos \varphi$$

alakú. A (16) képlet az áramsűrűség komplex amplitúdóját szolgáltatja. Tehát az időegység alatt a vezető hosszegységében hővé átalakuló effektív teljesítmény:

$$(17) \quad W = \frac{1}{2\gamma} \int |i|^2 df = \\ = \frac{1}{2\gamma} \left\{ |b_0|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_0 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \right|^2 r dr d\varphi + \right. \\ \left. + |b_1|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left| J_1 \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \right|^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi \right\}.$$

Ebben a kifejezésben az a figyelemreméltó, hogy az összes veszteség két tagra bontható: az első tag tartalmazza a vezető saját áramától származó veszteséget, figyelembevéve a sugárirányú áramkiszorítást, ami független a külső mágneses tértől, a második tag viszont a külső mágneses tértől származó örvényáramok okozta wattveszteséget tartalmazza, és ez utóbbi független a vezetőben folyó áram intenzitásától.

A (17)-ben szereplő integrálokat az alábbi képlet segítségével számíthatjuk (lásd *Simonyi* [2] 15.13 képlet 102.):

$$\int_0^a x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2} [\alpha J_n(\beta a) J'_n(\alpha a) - \beta J_n(\alpha a) J'_n(\beta a)],$$

ahol a mi konkrét esetünkben $\alpha = \frac{\sqrt{-2j}}{\delta}$; $\beta = \frac{\sqrt{2j}}{\delta}$ és $n = 0, 1$. Vezessük be az $x = \frac{\sqrt{2}}{\delta} a$ jelölést; akkor a vezető saját áramától származó veszteség

$$(18) \quad W_1 = J_{eff}^2 R_0 g(x),$$

ahol $R_0 = \frac{1}{\gamma a^{2\pi}}$ a vezető hosszegységére eső egyenáramú ellenállás és

$$(19) \quad g(x) = \frac{x}{2} \frac{\operatorname{Im} \{ \sqrt{-j} J_0(\sqrt{j} x) J'_0(\sqrt{-j} x) \}}{|J_1(\sqrt{-j} x)|^2}.$$

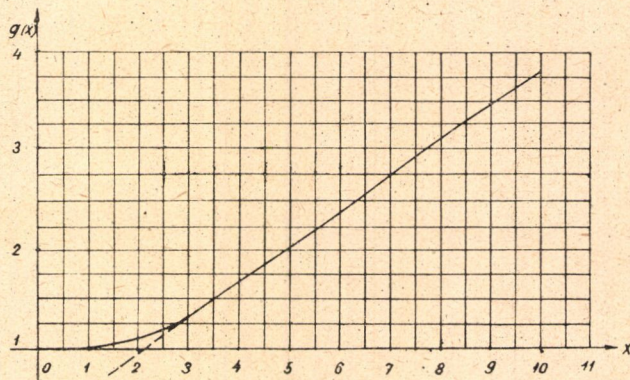
A külső mágneses tér okozta további wattveszteség, ha $\mu_1 = \mu_2$ (ami lényegében réz- vagy alumíniumvezető esetében teljesül)

$$(20) \quad W_2 = \frac{H_1^2}{\gamma} h(x),$$

ahol $H_1 = B_1/\mu_1$, a külső homogén mágneses térerősség amplitúdója és

$$(21) \quad h(x) = 2\pi x \frac{\operatorname{Im} \left\{ \sqrt{-j} J_1(\sqrt{j}x) J_1'(\sqrt{-j}x) \right\}}{|J_0(\sqrt{-j}x)|^2}.$$

A $g(x)$ értéke természetesen R/R_0 , ahol R a körvezető már *Sommerfeld* által számított váltóáramú ohmos ellenállása. x nagy értékeire a Bessel-függ-



I. ábra

vények nagy argumentumra érvényes aszimptotikus előállításából az alábbi közelítő képletek adódnak:

$$(22) \quad g(x) \sim \frac{x}{2\sqrt{2}} \frac{1 + \frac{2\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} - \frac{27\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4}}{1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} + \frac{45\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{225}{16384x^4}} \sim$$

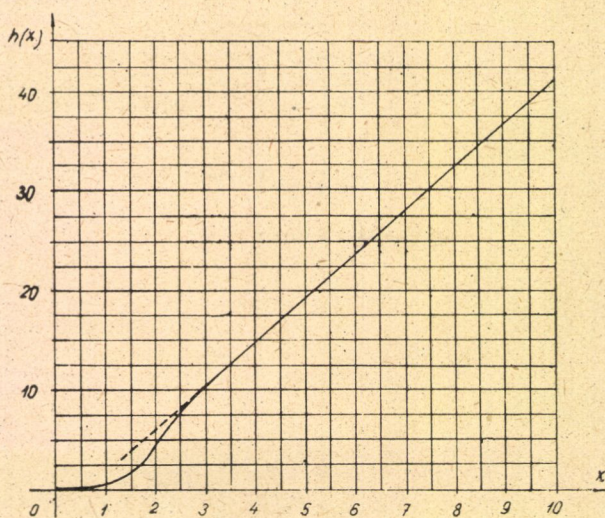
$$\sim \frac{x}{2\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^2} - \frac{243}{2048} \frac{1}{x^4} + \dots \right\}.$$

$$(23) \quad h(x) \sim \sqrt{2}\pi x \frac{1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} - \frac{30}{128x^2} - \frac{15\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4}}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{16x} + \frac{2}{128x^2} + \frac{9\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{81}{16384x^4}} \sim$$

$$\sim \pi\sqrt{2}x \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} - \frac{11}{4096} \frac{1}{x^4} + \dots \right\}.$$

Vasvezeték esetén csak azt az esetet tárgyalhatjuk, amikor a vezetőkön átfolyó áram igen kicsi, tehát a H_1 nem túl nagy és így a vasanyag permeábi-

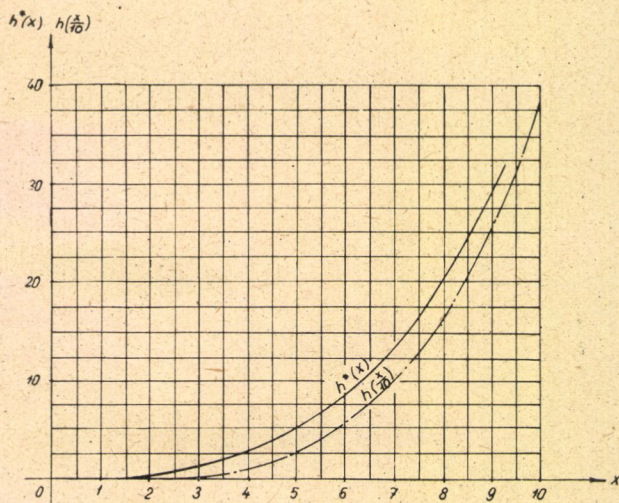
litása egyenlőnek vehető annak kezdeti permeabilitásával. Ennek értékét az irodalmi adatok alapján 101-gyel vettük egyenlőnek, így $\mu_1 = 1$ mellett



2. ábra

$\mu_2 - \mu_1 = 100$ kerek számnak adódik. Ilyen feltételek mellett a külső mágneses térből származó járulékos veszteség

$$(24) \quad W_2^* = \frac{B^2}{\gamma} h^*(x),$$



3. ábra

Tekintettel δ -nak μ -tól való függésére, $h^*(x)$ és $h(x/10)$ az azonos vezetősugarhoz tartozó értékek.

ahol $h^*(x)$ -et a III. ábrán tüntettük fel. Egyben közöljük a $h^*(x)$ -re a Bessel-függvények aszimptotikájából nagy x értékekre adódó közelítő képletet, tetszőleges μ_1 és μ_2 esetén:

$$h^*(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2} \Phi} \left[1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} - \frac{30}{128x^2} - \frac{15\sqrt{2}}{1024x^3} - \frac{135}{16384x^4} \right], \text{ ahol}$$

$$\Phi = \mu_1^2 \left[x^2 - 7\sqrt{2}x + \frac{49}{64} + \frac{36 - 33\sqrt{2}}{512x} + \frac{3249}{16384x^2} + \frac{885\sqrt{2}}{16384x^3} + \frac{225}{16384x^4} \right] +$$

$$+ \mu_2^2 \left[1 - \frac{6\sqrt{2}}{16x} + \frac{18}{128x^2} + \frac{45\sqrt{2}}{1024x^3} + \frac{225}{16384x^4} \right] +$$

$$+ \mu_1 \mu_2 \left[\sqrt{2}x - \frac{7}{4} + \frac{57\sqrt{2}}{64x} - \frac{171}{512x^2} - \frac{1575\sqrt{2}}{16384x^3} \right].$$

Véges távolságban futó áramfonal által keltett örvényáram számítása

Az a sugarú vezetőtől R távolságban I intenzitású áramfonal van. Az ábra szerint vegyük fel az (r, φ) polárkoordinátarendszert. Akkor az áramfonalból származó vektorpotenciál

$$(25) \quad \frac{\mu_1 I}{2\pi} \log \frac{1}{R} = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \log \left(\frac{R - re^{i\varphi}}{R} \right) \right\} =$$

$$= - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{R^n} \cos n\varphi$$

tehát $A_n r^n \cos n\varphi$ alakú tagokból tehető össze, ahol

$$(26) \quad A_n = - \frac{\mu_1 I}{2\pi} \frac{1}{n R^n}.$$

Az a sugarú vezetőhengeren belül az áramfonalból és az örvényáramokból származó eredő mágneses tér vektorpotenciálja, amely kielégíti a (11) parciális differenciálegyenletet, előállítható az alábbi ortogonális sörfejtés alakjában:

$$(27) \quad A^* = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n2} J_n \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos n\varphi,$$

ahol $J_n(z)$ az n -edrendű Bessel-függvény.

Ugyanakkor a vezetőhengerben folyó örvényáramok által keltett járulékos mágneses tér vektorpotenciálját a vezetőn kívül vegyük fel

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n1} \frac{\cos n\varphi}{r^n}.$$

alakban, ahol a kifejtés minden tagja kielégíti a Laplace-egyenletet. Tehát a vektorpotenciál a vezetőn kívül

$$(28) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + c_{n1} \frac{1}{r^n} \right) \cos n\varphi.$$

A határfeltételek az $r = a$ sugarú hengerpáláston

$$(29) \quad (A)_{r=a} = (A^*)_{r=a}$$

és

$$(30) \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_{r=a}$$

(27), (28), (29) és (30) c_{n1} és c_{n2} meghatározására az alábbi lineáris egyenlet-rendszerre vezet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^n} c_{n1} - J_n(\sqrt{-j} x) c_{n2} &= -A_n a^n \\ \frac{n}{\mu_0 a^{n+1}} c_{n1} + \frac{1}{\mu_1 a} \left(-n J_n(\sqrt{-j} x) + \sqrt{-j} x J_n'(\sqrt{-j} x) \right) c_{n2} &= \frac{A_n}{\mu_0} n a^{n-1}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$(31) \quad c_{n1} = \frac{-\mu_1 I}{2\pi} \cdot \frac{a^{2n} - n \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j} x) + \sqrt{-j} x J_{n-1}(\sqrt{-j} x)}{n R^n \left(\left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j} x) + \sqrt{-j} x J_{n-1}(\sqrt{-j} x) \right)}$$

és

$$(32) \quad c_{n2} = \frac{I \mu_2}{\pi R^n} \frac{a^n}{n \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j} x) - \sqrt{-j} x J_{n-1}(\sqrt{-j} x)}$$

A vektorpotenciált a vezetőn kívül tehát a (26), (28) és (31) képletek, míg a vezetőn belül a (27) és (32) képletek szolgáltatják. A vektorpotenciál ismeretében az $i = -j \omega \gamma A^*$ összefüggésből megkaphatjuk az örvényáramok sűrűségeloszlását

$$(33) \quad i = \frac{-j \omega \gamma \mu_2 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{R} \right)^n \frac{J_n \left(\frac{\sqrt{-2j}}{\delta} r \right) \cos n\varphi}{n \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) J_n(\sqrt{-j} x) - \sqrt{-j} x J_{n-1}(\sqrt{-j} x)}$$

Ha $\mu_1 = \mu_2$, ez átmegy a *Maneback* által számított képletbe.

Munkatársamnak, *Szilvay Gézánnának* ezúton is köszönetet mondok a kézirat gondos átnézése, valamint a részletszámítások elvégzése terén nyújtott értékes segítségért.

IRODALOM

- [1] *Ch. Maneback*: An integral equation for skineffect in parallel conductors. Journal of Math. and Phys. MIT. 1922. 123. o.
[2] *Simonyi Károly*: Elméleti Villamosságtan. Egyetemi Tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
[3] *A. Sommerfeld*: Elektromagnetische Schwingungen. (Franck—Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik c. könyv. V. fejezete) (21) 2§.

О ВЫТЕСНЕНИИ ТОКА, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ПРОВОДНИКЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Г. Фрейд

Резюме

Определяется распределение и плотности тока в проводнике круглого сечения, помещенном в однородном синусоидально изменяющемся магнитном поле (частоты). С помощью этого определяются джоулевые потери, возникающие в проводнике на единицу измерения.

ÜBER DIE STROMVERDRÄNGUNG IN LEITERN MIT KREISFÖRMIGEM QUERSCHNITT

G. FREUD

Zusammenfassung

In einem homogenen, magnetischen Wechselfeld wird ein stromdurchflossener Leiter hineingesetzt. Es wird die Stromverteilung und der Joulesche Verlust der Längeneinheit berechnet.

PÁRHUZAMOS ELEKTROMOS VEZETŐK MÁGNESES TERÉNEK SZÁMÍTÁSÁRÓL

2. rész

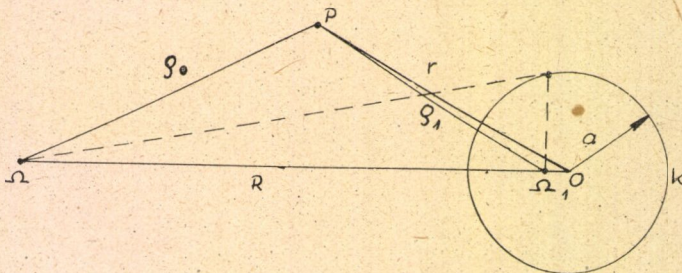
FREUD GÉZA és SZILVAY GÉZÁNÉ

Összefoglalás

Két párhuzamos körkeresztmetszetű vezetőlől álló vezetők önindukcióját a (24) képlet szolgáltatja. A számítás során a szerzők feltételezik, hogy az egyes vezetők az árameloszlás radiálisan szimmetrikus, ami teljesül, ha a vezetők elég messze vannak egymástól, vagy a frekvencia nem túl nagy. A számítás során tekintetbevétték a vezető-hengerek mágnesesződésének befolyását.

Bevezetés

Röviden áttekintjük a dolgozat első részében közölt eredményeket, melyeket számításainknál később felhasználunk. Meg kell jegyeznünk, hogy



1. ábra

az előzőekben Gauss-féle mértékrendszerben számoltunk, most pedig képleteinket MKS egységekben adjuk meg.¹

Az a sugarú μ_1 permeabilitású V vezetőhenger tengelyétől R távolságban I intenzitású vonalszerű áram folyik. A hengeren kívül a teret μ_0 permeabilitású anyag tölti ki. Kimutattuk, hogy a henger mágnesesződése útján létrejött mágneses tér két vonalszerű áram I_1 és I_1^* mágneses terével helyettesíthető. Ha az I áram egyenese a V vezetőhenger k keresztmetszetszögének síkját Ω pontban metszi, akkor I_1 vonalszerű áram egyenese a keresztmetszet-

¹ A dolgozat már megjelent első felébe néhány jelölési következetlenség és pontatlanság csúszott. Ezeket most korrigáljuk.

kör síkját Ω -nak k körre vonatkozó inverz pontjában Ω_1 -ben metszi. Ω_1 -nek 0-tól való távolsága $\frac{a^2}{R}$. Az I_1^* áram a V henger tengelyében folyik. A V henger belsejében ekkor olyan a mágneses tér, mintha az egész teret μ_1 permeabilitású közeg töltené ki és I helyén I' áram folyna. A mágneses tér vektorpotenciálja a V henger tengelyével párhuzamos és értéke V hengeren kívül

$$(1a) \quad A = -\frac{1}{2\pi} \mu_0 [I \log \varrho_0 + I_1 \log \varrho_1 + I_1^* \log r],$$

a V hengeren belül

$$(1b) \quad A' = -\frac{1}{2\pi} \mu_1 I' \log \varrho_0 + C.$$

Vezessük be az (r, φ) polárkoordinátarendszert, az 1. ábra szerint

$$(2) \quad \begin{aligned} \varrho_0 &= (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \\ \varrho_1 &= \left(\frac{a^4}{R^2} + r^2 - 2 \frac{a^2}{R} r \cos \varphi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(1)-re teljesülnie kell a dolgozat első részének (2) és (3) egyenlőségének, valamint felhasználva (2)-t, a következő formulákat nyerjük²:

$$(3) \quad C = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I \log R = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \xi_1 I \log R$$

és

$$(4) \quad I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I = \xi_1 I = -I_1^*$$

$$I' = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0} I = \eta_1 I.$$

A V vezetőhenger tengelyével párhuzamosan, tőle d távolságban a sugarú W vezetőhengert helyezünk el, melyben $-I$ áram folyik. A W vezető mágneses permeabilitása μ_2 , és keresztmetszete κ .

A további számítás során a tüköráramok keltette tüköráramokat is számításba vettük. Ezek középpontjai az ábra síkjában az O_n , ill. Ω_n pontok, melyeknek az utolsó inverziócentrumtól mért távolságát r_n , ill. ϱ_n -nel jelöltük, aszerint, hogy az utolsó inverziót k , vagy a κ körre végeztük. Az így nyert tüköráramok, melyek összességükben ugyanazt a mágneses teret hozták létre,

² Mint az első részben.

$$\xi_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0}, \xi_2 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0}, \eta_1 = \frac{2\mu_0}{\mu_1 + \mu_0}, \eta_2 = \frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0}$$

mint a vezetők anyagának mágneseződése, az első rész 2a, 2b táblázatában vannak összefoglalva. Az r_n , ill. ϱ_n sorozatok monoton növekedők és az a , ill. α korlát alatt maradnak, tehát a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n+1} = r_\infty$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{2n+1} = \varrho_\infty$$

határértékek léteznek.

Miután 0_n és r_n -t, illetőleg Ω_n és ϱ_n -t iterált tükrözéssel nyertük, az

$$(5) \quad r_{n+1} = \frac{a^2}{d - \frac{a^2}{d - r_{n-1}}}, \quad \varrho_{n+1} = \frac{a^2}{d - \frac{a^2}{d - \varrho_{n-1}}}$$

rekurziós formulák érvényesek. Ennek alapján az $\{r_n\}$ és $\{\varrho_n\}$ sorozatok határértéke számítható, mivel a keresett határértéket az

$$r_\infty = \frac{a^2}{d - \frac{a^2}{d - r_\infty}}, \quad \varrho_\infty = \frac{a^2}{d - \frac{a^2}{d - \varrho_\infty}}$$

formulák rendezése után nyert másodfokú egyenletek

$$\begin{aligned} dr_\infty^2 - r_\infty(d^2 - a^2 + a^2) + a^2d &= 0 \\ d\varrho_\infty^2 - \varrho_\infty(d^2 - a^2 + a^2) + a^2d &= 0 \end{aligned}$$

a , ill. α -nál kisebb gyökei szolgáltatják. Ugyanis az r_∞ és ϱ_∞ értékek a V ill. W vezető belsejébe esnek.

A továbbiakban szükségünk lesz néhány becslésre, melyet a dolgozat első részéből idézünk :

$$(6) \quad \frac{r_\infty - r_{n+1}}{r_\infty - r_{n-1}} < \left[\frac{a\alpha}{(d - r_\infty)(d - \varrho_\infty)} \right]^2 = q^2$$

és

$$(7) \quad \frac{\varrho_\infty - \varrho_{n+1}}{\varrho_\infty - \varrho_{n-1}} < \left[\frac{a\alpha}{(d - \varrho_\infty)(d - r_\infty)} \right]^2 = q^2.$$

A (6) és (7) egyenlőtlenségekből összeszorzással nyerhetjük a következő egyenlőtlenségeket :

$$(8) \quad \begin{aligned} r_\infty - r_{2n+1} &< (r_\infty - r_1) q^{2n} & n &= 1, 2, \dots \\ r_\infty - r_{2n} &< (r_\infty - r_0) q^{2n} & n &= 1, 2, \dots \\ \varrho_\infty - \varrho_{2n+1} &< (\varrho_\infty - \varrho_1) q^{2n} & n &= 1, 2, \dots \\ \varrho_\infty - \varrho_{2n} &< (\varrho_\infty - \varrho_0) q^{2n} & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mivel ϱ_0 és r_0 definíciószerűen 0 és ϱ_1 ill. r_1 pozitív értékek, becsléseinknek a következő formát adhatjuk:

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} r_\infty - r_{2n+1} \\ r_\infty - r_{2n} \end{aligned} \right\} < r_\infty q^{2n}$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho_\infty - \varrho_{2n+1} \\ \varrho_\infty - \varrho_{2n} \end{aligned} \right\} < \varrho_\infty q^{2n}.$$

Hengeres vezetékrendezések mágneses terének energiájáról

A mágneses térenergia ismert kifejezésének érvényességét akarjuk megvizsgálni, ha hengeres elrendezésről van szó. A külön vizsgálatra azért van szükség, mert a szokásos levezetés, ami az elektrodinamika kézikönyveiben megtalálható, feltételezi, hogy a mágneses térerősség $1/r^2$ nagyságrendű és a vektorpotenciál $1/r$ nagyságrendű, ezenkívül a vezetők és a környező szigetelő mágneses permeabilitását is rendszerint egyenlőnek veszik. Kimutatjuk, hogy az eredmény hengeres elrendezésre is használható, és meggondolásainkból a továbbiak szempontjából lényeges következtetéseket fogunk levonni a vektorpotenciál normálására.

Egyetlen egyenes idő áramot tartalmazó áramfonal vektorpotenciálja, ha a térben mágneseződő anyag nincs jelen

$$d\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{i} df \log \varrho,$$

ahol ϱ jelenti a potenciálpontnak az áramfonal egyenesétől mért távolságát. Tehát a hengeres árameloszlásból származó vektorpotenciál

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int \mathbf{i} \log \varrho df,$$

ahol egy lehetséges additív állandót zérusnak választottunk. Jelöljük r -rel a potenciálpontnak egy térben rögzített, az áramfonalakkal párhuzamos egyenestől mért távolságát. Akkor³

$$\log \varrho = \log r + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

amiből leolvasható, hogy

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \log r \int \mathbf{i} df + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

³ Az analízisben szokásos módon $O\left(\frac{1}{r}\right)$ egy $\frac{1}{r}$ nagyságrendű olyan $f(r)$ függvényt jelöl, amelyre $|rf(r)|$ egész térben korlátos marad.

hacsak az összes áramfonalak egy véges átmérőjű nyalábban helyezkednek el. A töltés megmaradása folytán ugyanannyi áram folyik előre, mint visszafelé, tehát

$$(10) \quad \int i \, df = 0$$

és így

$$(11) \quad \mathbf{A} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

A dolgozat első részében láttuk, hogy a vezetők mágnesezése olyan mágneses teret kelt a vezetők közt, amely páronként ellentétes előjelű, egyenlő vonalszerű áramokra bontható, ilyen módon a tetszőleges additív állandó választásával elérhető, hogy a teljes vektorpotenciál nagyságrendje is $O\left(\frac{1}{r}\right)$ legyen.

Ez általános esetben is kimutatható.

Válasszunk ki egy keresztmetszetsíkot az áramok i anyára merőlegesen; ezen a felületelemet df -fel fogjuk jelölni. Az a mágneses térenergia, amely két egymástól hosszegységnyi távolságban levő, a vezetőkre merőleges sík közti térben van tárolva

$$(12) \quad U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \mathbf{B} \, df = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} \, df.$$

Felhasználva a

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

összefüggést, a Gauss-tétel segítségével (12)-ből

$$(13) \quad U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} \, df + \frac{1}{2} \sum \oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H})_n \, dl,$$

ahol az összeg második tagjában integrálnunk kell egyrészt egy az egész síkot a vezetőnyalábtól »végtelen nagy távolságra« burkoló C_1 görbére, továbbá mindazon C_2 görbék mindkét pontjára, amelyek két oldalán a vektorpotenciált (és így a mágneses térerősséget is) két különböző analitikus kifejezés állítja elő; vagyis a vezetők határgörbéire. A C_1 görbét, mint egy rögzített a vezetők közelében levő pontból rajzolt r sugarú kör határhelyzetének tekintjük. Ha $H_{\max}(r)$ jelenti a mágneses térerősség maximumát ezen a körön, akkor tekintettel (11)-re

$$|\oint (\mathbf{A} \times \mathbf{H})_n \, df| < 2\pi r \cdot H_{\max}(r) \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) \rightarrow 0, \text{ ha } r \rightarrow \infty.$$

A vezető és szigetelő határán a mágneses térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át. Feltételezzük, hogy a vektorpotenciált a vezetők belsejében úgy normáltuk, hogy a vezetők kívüli tér vektorpotenciáljához folytonosan csatlakozzék. Mindkét körülményt figyelembevéve $\mathbf{A} \times \mathbf{H}$ -nak a C_2 -re merőleges komponense folytonosan megy át. Tekintettel arra, hogy a C_2 görbe két pontjára vett integrálban a normális irányítása ellentétes, a két

partra vett integrál egymást kiejti. Tehát (13)-ban a jobboldalon álló összeg zérust eredményez. Tehát (13)-ból, tekintettel arra, hogy $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$

$$(14) \quad U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}.$$

Fenti képlet levezetésénél feltételeztük, hogy

a) a vektorpotenciál az egyes vezetők és a szigetelő határán folytonosan megy át ;

b)⁴ a vezetőktől nagy távolságra a vektorpotenciál nagyságrendje $O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Az alábbiakban a vektorpotenciált ennek megfelelően fogjuk normálni. A mágneses térenergiát a hosszegységre eső önindukció együttthatóival, Λ -val kifejezve :

$$U_m = \frac{1}{2} \Lambda I^2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f},$$

tehát

$$(15) \quad \Lambda = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}.$$

Ezt a képletet használjuk a vezeték önindukciójának számítására. Továbbiakban az egyszerűség kedvéért legyen $I = 1$.

Önindukció számítása

Nyilván elegendő a (15) integrál számítását az egyik vezetőre, pl. V -re részleteznünk. Az integráljel alatt a vektorpotenciált 3 tagra bontjuk :

$$(16) \quad \Lambda_V = \int_{(V_1)} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{f} + \int_{(V)} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{f} + \int_{(V)} \mathbf{A}_3 \cdot d\mathbf{f},$$

ahol \mathbf{A}_1 a V vezető saját áramától származó mágneses tér vektorpotenciálja, \mathbf{A}_2 a W vezetőben folyó áram által keltett mágneses tér vektorpotenciálja és végül \mathbf{A}_3 a V és W vezetők mágnesesződésétől származó mágneses tér vektorpotenciálja, amit a tükráramok segítségével fejeztünk ki.

a) \mathbf{A}_1 számítását arra az esetre részletezzük, amikor a radiális áramkiszorítás elhanyagolható. A vezető belsejében \mathbf{A}_1 -nek a

$$\Delta A_1 = \frac{d^2 A_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_1}{dr} = -\frac{1}{\pi a^2}$$

⁴ Ez a feltétel (10) következtében

$$A = C + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

becsléssel helyettesíthető, ahol C egy állandó vektort jelent.

differenciálegyenletet kell kielégítenie, amiből

$$(17) \quad A_1 = -\frac{\mu_1}{4\pi} \frac{r^2}{a^2} + C_1.$$

A vezetőkön kívül

$$(18) \quad A_1 = -\frac{\mu_0}{2\pi} \log r.$$

Miután $r = a$ esetén (17) folytonosan megy át (18)-ba, kapjuk, hogy

$$C_1 = \frac{\mu_1}{4\pi} - \frac{\mu_0}{2\pi} \log a.$$

Ennek alapján

$$(19) \quad \int_{(V)} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{i} \, df = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\mu_1}{4} - \mu_0 \log a \right).$$

Amennyiben a radiális áramkiszorítást nem hanyagoljuk el, (19) helyett az

$$(19a) \quad \int_{(V)} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{i} \, df = A_{bV} - \frac{\mu_0}{2\pi} \log a$$

összefüggést nyerjük, ahol A_{bV} a V körkeresztmetszetű vezető belső önindukció együtthatója, ennek számítását illetően *Sommerfeld* [2] dolgozatára utalunk. Ha a radiális áramkiszorítást elhanyagoljuk, (19a) (19)-be megy át.

b) A W vezetőben folyó $-I = -1$ áram által közvetlenül keltett vektorpotenciál az (1b), (3), (4) alapján, tekintettel arra, hogy W vezető tengelye a V vezető tengelyétől d távolságra van,

$$A_2 = \frac{1}{2\pi} \mu_1 \eta_1 \log \varrho_0 - \frac{1}{2\pi} \mu_0 \xi_1 \log d.$$

Ebből

$$(20) \quad \int_{(V)} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{i} \, df = \frac{1}{2\pi} \mu_1 \eta_1 \int_0^a \mathbf{i}(r) \cdot r \, dr \int_{-\pi}^{+\pi} \log \varrho_0 \, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \mu_0 \xi_1 \log d$$

Az első tagban a belső integrál értéke r -től független:

$$(21) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \log \varrho_0 \, d\varphi = 2\pi \log d.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\int_0^a \mathbf{i}(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_{(V)} \mathbf{i} \, df = 1$$

$$(22) \quad \int_{(V)} \mathbf{A}_2 \, \text{idf} = \frac{1}{2\pi} (\mu_1 \eta_1 - \mu_0 \xi_1) \log d = \frac{\mu_0}{2\pi} \log d.$$

(19a), ill. (19) és (22) összege kiegészítve a W vezetőre vonatkozó megfelelő tagokkal, szolgáltatja a párhuzamos vezetők már *Maxwell* [1] által közölt, az elektrotechnikában jól ismert kifejezését. A teljesség kedvéért részletezzük a (21) integrál számítását: A residuumtétel alapján

$$\oint \log(z-d) \frac{dz}{z} = 2\pi i \log(-d) = 2\pi i \log d - 2\pi^2,$$

ha a baloldali integrált az $|z| = r < d$ kör mentén végezzük el. A $z = re^{i\varphi}$ helyettesítéssel

$$\oint \log(z-d) \frac{dz}{z} = i \int_{-\pi}^{+\pi} \log(re^{i\varphi} - d) d\varphi = i \int_{-\pi}^{+\pi} \log \varrho_0 d\varphi - \int_{-\pi}^{+\pi} \arccos(z-d) d\varphi$$

és fenti két egyenletünkben a jobboldalon a képzetes részt egyenlővé téve, (21)-et nyerjük.

c) Az $\int A_3$ idf, azaz a tüköráramoktól származó járulékek számítása újabb elvi nehézséggel nem jár, mert ugyanolyan tagokból tevődik össze, mint amelyet a *b*) pont (22) képletében számítottunk. A (2a) és (2b) táblázatok felhasználásával

$$(23) \quad \int_{(V)} A_3 i df = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\xi_2 \log \frac{d - q_1}{d - q_2} - \xi_1 \xi_2 \log \frac{d - q_1}{d - q_2} + \right.$$
$$+ \xi_1 \xi_2^2 \log \frac{d - q_2}{d - q_3} - \xi_1^2 \xi_2^2 \log \frac{d - q_3}{d - q_4} +$$
$$+ - \dots\dots\dots$$
$$+ \xi_1^n \xi_2^{n+1} \log \frac{d - q_{2n}}{d - q_{2n+1}} - \xi_1^{n+1} \xi_2^{n+1} \log \frac{d - q_{2n+1}}{d - q_{2n+2}} +$$
$$\left. + - \dots \right].$$

A teljes önindukció tehát (19), (22) és (23) felhasználásával

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mu_1}{4} + \mu_0 \left(\log \frac{d}{a} + \xi_2 \log \frac{d}{d - \varrho_1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \xi_1 \xi_2 \log \frac{d - \varrho_1}{d - \varrho_2} + \xi_1 \xi_2^2 \log \frac{d - \varrho_2}{d - \varrho_3} + \dots \right) \right].$$

Kimutatjuk, hogy a (23)-ban szereplő végtelen sor igen gyorsan konvergál úgyhogy segítségével az önindukció könnyen számítható.

$$\begin{aligned}\log \frac{d - \varrho_{2n}}{d - \varrho_{2n+1}} &= \log \left(1 + \frac{\varrho_{2n+1} - \varrho_{2n}}{d - \varrho_{2n+1}} \right) < \frac{\varrho_{2n+1} - \varrho_{2n}}{d - \varrho_{2n+1}} \\ \log \frac{d - \varrho_{2n+1}}{d - \varrho_{2n+2}} &= \log \left(1 + \frac{\varrho_{2n+2} - \varrho_{2n+1}}{d - \varrho_{2n+2}} \right) < \frac{\varrho_{2n+2} - \varrho_{2n+1}}{d - \varrho_{2n+2}}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \log \frac{d - \varrho_{2n}}{d - \varrho_{2n+1}} &< \frac{\varrho_\infty}{d - \varrho_\infty} - q^{2n} \\ \log \frac{d - \varrho_{2n+1}}{d - \varrho_{2n+2}} &< \frac{\varrho_\infty}{d - \varrho_\infty} q^{2n}. \end{aligned}$$

Végeredményképpen felírhatjuk a V és W vezető együttes önindukcióját.

Tekintsük a (24) képlet segítségével különböző anyagból készült vezetők azonos geometriai elrendezéséhez tartozó önindukcióját ; feltételeztük, hogy a vezetők sugara azonos : $a = \alpha$. Amennyiben $\frac{d}{\alpha} = 3$, a következő eredményre jutunk :

487

0,2%, bár ez utóbbi a külső önindukciónak 4,6%-a. Számításunk természetesen csak a kezdeti permeabilitás tartományában érvényes. Rézvezetónél a külső önindukció a túlnyomó, mely a teljes önindukciónak 81,6%-a, a belső önindukció viszont 18,6%. A A_m itt is kicsi, a teljes önindukciónak 0,8%-a.

Ilyen módon a technikában a mágneseződéstől származó önindukció-komponens elhanyagolása jogosult.

IRODALOM

[1] *J. C. Maxwell*: A treatise on electricity and magnetism. 3. ed. Oxford, 1892. §. 685—686 o.

[2] *A. Sommerfeld*: Elektromagnetische Schwingungen. *Frank—Mises*: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. II. Teil c. könyvében. XXI. Kapitel § 2.

О ВЫЧИСЛЕНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДОВ

Г. Фрейд и Сильва Г.

Резюме

Самоиндукцию электропровода, состоящего из двух параллельных проводников круглого поперечного сечения, дает формула (24). При расчетах предполагаем, что распределение тока в каждом проводе радиально симметрическое. Это выполняется в том случае, если проводники находятся на достаточно большом расстоянии один от другого или при токе не слишком высокой частоты. При расчетах принималось во внимание влияние намагниченности ведущих цилиндров.

ÜBER DAS MAGNETISCHE FELD EINER PARALLELEITUNG. II.

G. FREUD UND FRAU G. SZILVAY

Zusammenfassung

Anschliessend an die in der vorigen Nummer erschienenen Arbeit des ersten Verfassers, wird die Selbstinduktion einer Parallelleitung berechnet, in dem die Berechnung der magnetischen Kraftlinien an der Oberfläche der Leitung berücksichtigt wird.

IONOK HIDRATÁCIÓS MUNKÁJÁNAK ELMÉLETI MEGHATÁROZÁSA

LENGYEL SÁNDOR és KEMPELEN MÁRTA

Összefoglalás

A dielektromos telítés figyelembevételével a szerzők kiszámítják az alkálihalogenidek hidratációs munkáját; *Webb* számításaitól eltérően figyelembeveszik *Kirkwood* és *Booth* újabb eredményeit a víz dielektromos viselkedésére vonatkozólag.

A Veszprémi Vegyipari Egyetem Elektrokémiai Iparok Tanszéke mintegy két esztendeje foglalkozik az elektrolit-oldatok elméletének különböző kérdéseivel. E munkába — tekintettel a felmerült matematikai nehézségekre — kb. egy esztendeje felkérésre bekapcsolódott a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete, a közös munka legfontosabb eredményeit *Freud Géza* ismertette a Magyar Tudományos Akadémia 1953. évi nagygyűlésén, *Lengyel Sándor*: »Az elektrolitoldatok egyensúlyi tulajdonságainak elmélete« című előadásához tett hozzászólásában [6], [10].

A közös munka folytatása többek között az ionhidratációs munkák pontosabb elméleti meghatározására irányult.

Az ionkristályok jelentős része igen jól oldódik vízben (pl. NaCl). Ennek az a főoka, hogy igen nagy energiaszabadulással jár az a folyamat, amelyben az ionokat vízmolekulák veszik körül. Ez az ionhidratációs hőnek nevezett energia az észrevehető mértékben oldódó elektrolitok esetében az elektrolit kristályrácsenergiájával egyenlő nagyságrendű.

Az ionhidratációs hő az a hőmennyiség, amely felszabadul, ha egy gramm-molekulasúlynyi iongázból és végtelen sok vízből állandó hőfokon oldat keletkezik.

Az ionhidratációs hőt kísérletileg általában nem egy ionra, hanem csakis egy elektrolitot alkotó ionpárra együttesen tudjuk meghatározni, s ezt sem közvetlenül, hanem a szilárd elektrolit rácsenergiájának s teljes oldáshőjének meghatározása által.

$$(1) \quad Q_H = U_r + Q_0,$$

ahol Q_H : a hidratációs hő kal/mol;

U_r : a rácsenergia «

Q_0 : a teljes oldási hő «

az adott hőfokon.*

*Lásd [4] 991. o.

Mód van arra is, hogy bizonyos ionok hidratációs hőjét külön meghatározzuk olyan megfontolások segítségével, melyek e meghatározásba nagyobb pontatlanságot, illetve bizonytalanságot visznek be, mint amekkorával az ionpárokból álló elektrolitok hidratációs hőjének meghatározása jár. E bizonytalanság, illetve pontatlanság mértékéig valamennyi ion egyedi hidratációs hője meghatározható [5].

Az (1) egyenlet által definiált ionhidratációs hő nem azonos azzal a szabad energia különbözettel (kémiai potenciálbeli különbözettel), amely az ideális iongázból és a végtelen híg oldatban levő hidratált ionokból álló rendszerek szabad energiája között fennáll. Ezt a szabad energia különbözetet ionhidratációs munkának nevezik.

Egy ion hidratációs hője és hidratációs munkája között a következő összefüggés áll fenn:

$$(2)^* \quad \mu_{gáz} - \mu_{old} = Q_H - T(S_{gáz} - S_{old}),$$

ahol

$S_{gáz}$: az iongáz entrópiája;

S_{old} : az ion oldatbeli parciális moláris entrópiája;

$\mu_{gáz}$: az ion kémiai potenciálja az ideális gázfázisban;

μ_{old} : az ion kémiai potenciálja az oldatban.

$$(3)^{**} \quad S_{old} - S_{gáz} = S_H - t$$

az ion hidratációs entrópiájának nevezik. A (2) egyenlet lehetőséget ad arra, hogy a kísérletileg meghatározott hidratációs hőkből a hidratációs munkákat kiszámíthassuk, mert a hidratációs entrópiák is meghatározhatók.*** Az alkáli halogenidek kísérleti ionhidratációs munkáit tartalmazza az 1. táblázat *Latimer, Pitzer és Slansky* [9] szerint.

Az ionhidratációs munkák elméleti meghatározására irányuló törekvések régi keletűek s az első számítások *M. Born*-tól származnak.

Alapul a számításokhoz s a későbbi számításokhoz is az szolgált, hogy a hidratációs munkát egyenlőnek veszik a vákuumban lévő ion által hordozott végtelen kiterjedésű tér elektrosztatikus energiája és a vízben mint dielektrikumban lévő ion terének elektrosztatikus energiája közötti különbséggel.

Born, aki felállította az ionhidratációs munka elméleti meghatározásának fizikai alapjait, még figyelmen kívül hagyta azt a dielektromos telítődést, amely a vízben az ion környezetében a hatalmas erőtér hatására létrejön és így a hidratációs munkára egy g -molnyi ionra vonatkoztatva a

$$(4) \quad \mu_H = \frac{z^2 e^2}{2r} A \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \text{ erg/mol}$$

képletet nyerte.

* Lásd [4] 995. o.

** Lásd [4] 1002. o.

*** Lásd [4] 1001. o.

Itt :

- z : az ion vegyértéke ;
- e_0 : az elemi töltés ;
- r : az ion sugara ;
- A : az Avogadro—Loschmidt-szám ;
- ϵ : az oldószer (víz) dielektromos állandója.

Born e képletével nyert értékek azonban csak nagyságrendileg egyeznek a kísérleti úton meghatározottakkal ; előbbiek 30—40%-kal nagyobbak az utóbbiaknál.

A viszonylag nagy eltéréseknek legalább öt főoka lehet :

1. Az ionok és vízmolekulák kölcsönhatásának létrejöttékor (azaz a hidratálódáskor) nemcsak elektrosztatikus energiák, hanem más természetű energiák is szerepet játszanak, s ezeket a számítás figyelmen kívül hagyja.

2. Az ionok közvetlen közelében a vízben dielektromos telítődés áll elő, ami azt eredményezi, hogy itt a víz dielektromos állandója kisebb a tiszta víznél és kisebb az iontól távolabb mutatkozó dielektromos állandónál.

A Born-féle számítás viszont a vízzel az ion közelében is úgy számol, mint egy a tiszta vízzel egyenlő dielektromos állandójú dielektrikummal.

3. Az elektrolitoldatok látszólagos mólterfogatából, tehát az ionhidratációs munkáktól független kísérleti adatokból arra kell következtetni, hogy a vízmolekulák időátlagban nem tudják az ionokat, illetve a kisebb ionokat annyira megközelíteni, mint amennyire az ionok a kristályrácsban egymást megközelítik. Tehát az ionok úgy tűnnek fel hidratált állapotban, mintha sugaruk megnövekedett volna. Pontosabban : a gömbalakúnak tekintett ion középpontja és az őt közvetlen szomszédként körülvevő s ugyancsak gömbalakúnak feltételezett vízmolekulák középpontja közti távolság időbeli átlaga nagyobb, mint az ion és a vízmolekulák sugarának összege. Ennek megfelelő *ionsugárkorrekciót* a Born-féle számítás nem vesz tekintetbe.

4. A vízmolekula dipólusa, pontosabban kvadropólusa aszimmetrikusan helyezkedik el a gömbalakúnak tekintett vízmolekula belsejében (lásd [1] 10. ábra).

5. Az ionnal közvetlenül szomszédos vízmolekulák másképp helyezkednek el egy pozitív és egy negatív ion körül. Előbbi esetben a vízmolekula dipólusmomentuma radiális irányba mutat, utóbbi esetben pedig nem, hanem a H—O irány áll be a sugár irányába az ion középponthoz képest (lásd : [1] 13. ábra, valamint [7] 3. és 4. ábra).

A későbbi keletű számítások arra törekedtek, hogy a Born-féle számításoknál mutatkozó eltéréseket és ezek említett okait kiküszöböljék.

Az egyéb erők elméleti számításbavételére még nem történt próbálkozás, bár a félempirikusan számított vízkompressziós munka ezt is tartalmazza (lásd később).

T. J. Webb [14] a Born-féle fizikai alapon indul el, de számításba veszi a víz dielektromos telítődését is, vagyis azt, hogy az ion nagy erőterében a dielektromos állandó már nem független a térerősségtől ; viszont a számításhoz a dielektromos állandó és a térerősség közötti kapcsolat kiszámítására a polarizáció Debye-féle :

$$(5) \quad P = N \left\{ \alpha E + \mu L \left(\frac{\mu E}{kT} \right) \right\}$$

képletet használja fel; cikke a dipolfolyadék-elméletek előtti időből való, amely az említett mennyiségek között az

$$(6) \quad \epsilon E = (4\pi \alpha N + 1) E + 4\pi N \alpha L \left(\frac{\mu E}{kT} \right)$$

transzcendens egyenlethez vezet. Itt

$L(x)$: az ú. n. Langevin-függvény $L(x) = \operatorname{ctgh} x - \frac{1}{x}$

P : a dielektromos polarizáció;

N : a vízmolekulák száma köbcentiméterenként;

α : a vízmolekula polarizálhatósága ($= 1,50 \cdot 10^{-24}$);

E : a térerősség;

μ : a vízmolekula permanens dipolmomentuma ($= 1,94 \cdot 10^{-18}$);

k : a Boltzmann-állandó ($= 1,38 \cdot 10^{-17}$);

T : az abszolút hőmérséklet;

ϵ : a víz dielektromos állandója (mint E függvénye).

Megjegyezzük, hogy (6) $T = 298,1^\circ \text{C}$ esetében a következő alakot ölti:

$$(7) \quad \epsilon E = 1,628 E + 8,12 \cdot 10^5 L(4,71 \cdot 10^{-5} E).$$

Webb ezenkívül még két más körülményt is figyelembe vesz a hidratációs munkák számításánál. Először is elméleti úton az elektrosztatikus erőkből és a víz állapotegyenletéből meghatározza azt a térfogatcsökkenést, amelyet az ion az ú. n. elektrosztrikció által az őt körülvevő vízben okoz, mint az ionsugár függvényét. Majd ebből — ugyancsak az ionsugár függvényében — kiszámítja a vízkompresszió munkáját s a számított hidratációs munkákat ezzel korrigálja. Ezek a korrekciók azonban kicsiny, az ion dimenziójától függően 0,01—1,85 kg-kal/mol között változó értékek, amelyeket a továbbiakban elhanyagolunk. Másodszor pedig az elméletileg számított elektrosztrikciós víztérfogat csökkenési értékből, továbbá a NaCl és KCl végtelen hígításra extrapolált — látszólagos moltérfogatából, valamint a kísérleti ionhidratációs munkákból következtetést von le az alkáli fémionok és a halogénionok ionsugárkorrekciós értékére vonatkozóan, s ezt az értéket az alkáli fémionok esetében 0,50—0,55 Å-nek, halogénionok esetében pedig 0,42—0,44 Å-nek találja. E következtetésnél azonban abból a tapasztalattal ellenkező (lásd: [11] 43.) feltevésből indul ki, hogy az ion elektrosztrikciós hatása független töltésének előjelétől.

Végeredményben tehát *Webb* az elméletileg meghatározott elektrosztrikciós víztérfogat-csökkenésekből kiszámított ionsugárkorrekciókat veszi alapul, számításbaveszi a dielektromos telítődést, de *Debye*-nek folyadékokra pontatlan, csak tiszta víz esetében 25°C -on 78,54 helyett 14,40-et eredményező képlete segítségével. Végül pedig a nyert eredményeket a vízkompresszió munkájával korrigálja. Az így nyert értékeket és páronkénti kombinációjukat tartalmazza a 2. táblázat.

Latimer, *Pitzer* és *Slansky* [9] kísérleti eredményeik alapján kiszámították, mekkora értéket kell a Born-féle (4) képletbe helyettesíteniök, hogy a mért értékekkel egyező eredményt kapjanak. Megállapították, hogy jó

egyezés érhető el a tapasztalattal, ha az összes alkáli fémionokra 0,85 Å-mel, az összes halogénionokra 0,1 Å-mel növelik az ion sugarát és az így kapott sugárértékeket helyettesítik (4)-be. Az így nyert hidratációs munkákat tünteti fel a 3. táblázat.

Evvel a módszerrel szemben mindenesetre fel kell vetni azt az elvi kifogást, hogy a vizet konstans dielektromos állandójúnak tekinti. Ez semmi esetre sem felel meg a valóságnak.

A másik kifogás, amelyet fel kell vetni, a következő: az ionsugárkorrekciókat egyszerűen úgy választották, hogy a tapasztalattal egyező értékeket kapjanak, pedig az alkáli halogenidek végtelen hig oldatra vonatkozó látszólagos moltérfogatából, valamint azon empirikus görbékből, amelyek a víz sűrűségét az ionok környezetében leírják [10], ki lehet számítani azt, hogy mennyire tudják a vízmolekulák az egyes ionokat megközelíteni, vagyis ezen az alapon, tehát a hidratációs munkák számításától független úton, meg lehet határozni az ionsugárkorrekciókat, pontosabban az ionközéppont és az ionnal közvetlenül szomszédos gömbalakúnak feltételezett vízmolekulák középpontjának átlagos távolságát. Az erre vonatkozó számítások a közeljövőben kerülnek publikációra. Így az Na , K , Rb és Cs ionra (Webb másként meghatározott értékével összhangban) egyöntetűen $\Delta r = 0,5$ Å, a F^- ionra pedig $\Delta r = 0,15$ Å adódik. Ezen a módon az Li ion sugárkorrekciójára vonatkozóan semmit sem tudunk megállapítani (a 4. táblázat ezért nem tartalmaz az Li ionra vonatkozólag adatot), a Cl , Br és J -ionra pedig azt, hogy sugaruk minden valószínűség szerint változatlan marad, azaz a vízmolekulák teljesen megközelítik őket ($\Delta r = 0$). Látjuk, hogy a halogénionokra vonatkozó ionsugárkorrekciók már nem egyeznek a Webb-féle értékekkel.

Ezért a hidratációs munkák újabb elméleti meghatározásánál a Na^+ , K^+ , Rb^+ és Cs^+ ion esetében 0,5 Å, az F^- ion esetében 0,15 Å, a többi halogénionnál pedig 0,0 Å ionsugárkorrekciót vettük alapul.

Ezenkívül figyelembe vettük azt a dielektromos telítődést is, amely az ion közeli környezetében az ion hatalmas erőterének hatására bekövetkezik. Erre azonban *Debye* képlete a fentemlített oknál fogva nem lévén alkalmas, a dipolfolyadékok modern elméletét használtuk fel. *Debye* elméletét *Onsager* [13], *Kirkwood* [8], majd *F. Booth* [2] fejlesztették tovább, illetve alkalmazták folyadékokra. Ez elméletek közös vonása, hogy csak homogén tér esetre vannak kidolgozva. *Onsager* és *Kirkwood* elmélete többek közt abban különbözik egymástól, hogy előbbi semmi közelebbit nem tételez fel a víz szerkezetéről, utóbbi ellenben a víz szerkezetéről szóló ismereteinkre van alapítva*. Előbbi körülbelül 30-at szolgáltat a 25 °C-os víz dielektromos állandójára kis térerősségnél, utóbbi pedig 70-et (78,52 helyett). *Booth* mindkét elméletet továbbfejlesztette. A *Kirkwood*—*Booth*-féle

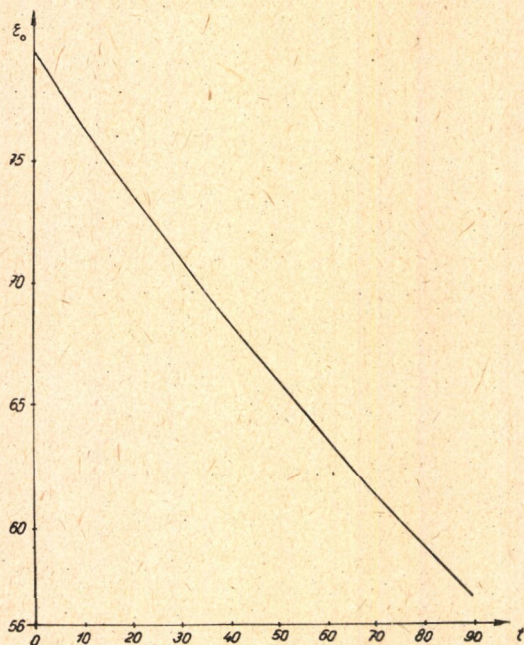
$$(8) \quad \varepsilon E = n^2 E + \frac{28\pi N_0 (n^2 + 2) \mu}{3\sqrt{73}} L \left\{ \frac{\sqrt{73} (n^2 + 2) \mu}{6 k T} E \right\}$$

(T), n : a víz törésmutatója 25° C-on

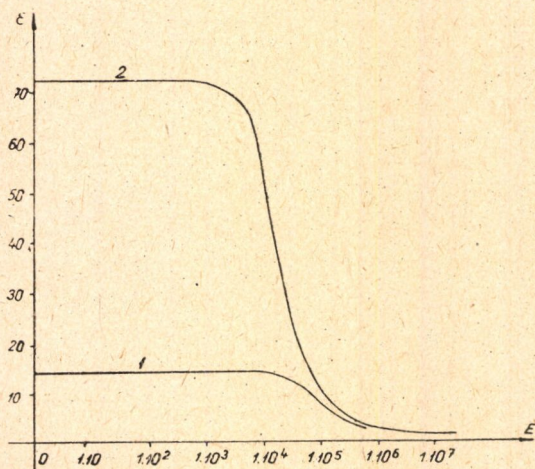
$$(9) \quad \varepsilon E = 1,7756 E + 8,3748 \cdot 10^5 L (2,535 \cdot 10^{-4} E)$$

* Lásd [8] 915—917., illetve (18)—(23) egyenlet.

képlet kis térerősség esetében igen jól megközelíti (72,55) a tapasztalati értéket. (78,54). Nagyobb térerősségre vonatkozóan egyelőre nincs mód a képlet közvetlen ellenőrzésére, mert nem tudunk olyan nagy térerősséget előállítani, melynél a telítődés már számottevő lenne [12]. A Kirkwood—Booth-képlet a dielektromos állandónak a hőmérséklettől való függését aránylag jó közelítéssel írja le (lásd az 1. ábrát). A 2. ábra a dielektromos állandót, mint a térerősség függvényét mutatja be a Debye-, illetve a Kirkwood—Booth-féle képlet esetében.



1. ábra. A dielektromos állandó kis térerősségekre a hőmérséklet függvényében



2. ábra. A dielektromos állandó változása
1 Debye, 2 Kirkwood-Booth szerint

A (9) egyenlet felhasználásával *Kempelen Márta* kiszámította a hidratációs munkát, mint az ionsugár függvényét 1, 2 és 3 vegyértékű ion esetében. Ezt a függvényt ábrázolja a 3. ábra, melyből tetszésszerinti ionsugár esetében leolvasható a hozzá tartozó ionhidratációs munka.

A hidratációs munkát a következőképpen számítottuk. Kiszámítottuk az egy ion által létrehozott elektromos tér szabadenergiáját vákuumban és dielektrikumban s a kettőt kivontuk egymásból.

A vákuumban a szabadenergiát a következő képlettel kaptuk:

$$(10) \quad \frac{(ze_0)^2}{2r_0},$$

ahol z a töltés száma, e_0 az elemi töltés, r_0 a cm-ben mért sugár. A dielektrikumban a szabadenergiát a következő integrál adja:

$$(11) \quad F = \int_{r_0}^{\infty} (4\pi\varphi) r^2 dr,$$

ahol φ az elektromos tér szabadenergiájának térfogati sűrűsége.

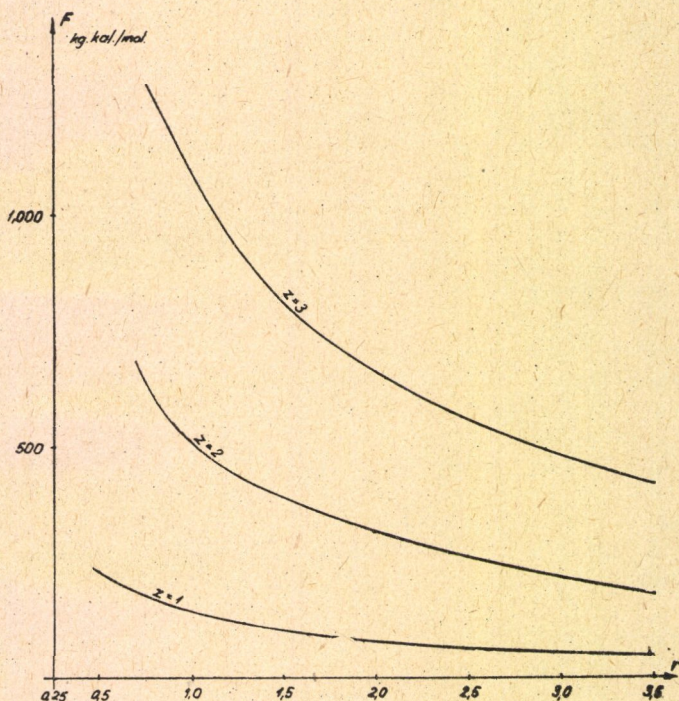
A hidratációs munka ezek szerint

$$(12) \quad \mu_H = \frac{(z e_0)^2}{2r_0} - F.$$

Ismert összefüggés alapján

$$(13) \quad 4\pi\varphi = \int_0^E \varepsilon E dD_i$$

ahol E a D dielektromos indukcióérték esetén fellépő térerősség.



3. ábra

A Kirkwood—Booth-képlet alapján az iontól r távolságban ható térerősséget a (8) egyenlet gyöke adja, amit grafikusán oldottunk meg.

(13)-ban az integrálás elemi módszerrel elvégezhető

$$(14) \quad \int_0^E \varepsilon E dD = \frac{a}{2} E^2 + b E L(cE) - \frac{b}{c} \left(\log \frac{shcE}{cE} \right),$$

ahol a , b , c a (8) képlet állandói

$$a = n^2; b = \frac{28}{3\sqrt{73}} N_0 \pi (n^2 + 2) \mu; c = \frac{\sqrt{73}}{6} \frac{\mu (n^2 + 2)}{kT}$$

A (11) integrál numerikusan kiszámítható. Addig az r értékig számítjuk, míg ε -nak a harmadik jegye keveset tér el ε_∞ -tól. r -tól ∞ -ig az integrált a következő formula adja :

$$(15) \quad \frac{1}{2} \int_r^\infty \varepsilon E^2 r^2 dr = \frac{(ze_0)^2}{2\varepsilon_\infty} - \frac{10^8}{r}$$

Ha az említett 0,5 Å (*Na*, *K*, *Rb*, *Cs*), 0,15 Å (*F*⁻) és 0,0 Å (*Cl*, *Br*, *J*) ionsugárkorrekció elfogadásával a Kirkwood—Booth-képlet alkalmazásával számítjuk ki az ionok hidratációs munkáit s ezekből a megfelelő elektrolitokét, akkor a kísérletiéknél körülbelül 10%-kal nagyobb értékeket nyerünk. Ez értékeket tartalmazza a 4. táblázat.

Az elméleti és kísérleti értékek közötti eltérés valószínűleg az ismertetett számítások azon hiányosságából ered, hogy két, a Born-féle számítással kapcsolatban már említett lényeges körülményt nem vettünk számításba. Ezek egyike, amelynek jelentőségére *Schay Géza* hívta fel a figyelmünket, abban áll, hogy a dipólus aszimmetrikusan helyezkedik el a vízmolekula belsőjében és ennek következtében a dipólus minden esetben távolabb van az iontól, mint a vízmolekula külső felülete s ezenkívül a dipólus a negatív ionhoz közelebb kerül, mint a pozitív ionhoz (ha az ionfelület és a vízmolekula középpontja közötti távolság a kétfajta ion esetében egyenlő).

A második lényeges körülmény, amelyet a fentiekben számításon kívül hagytunk az, hogy pozitív ion szomszédságában a vízmolekula átlagos dipolmomentuma radiális irányú, negatív ion szomszédságában ellenben nem, mert a vízmolekulát H-híd köti az ionhoz s így a H—O kötés áll be az ion középponthoz képest sugárirányban [1]. Ez azt jelenti, hogy a Kirkwood—Booth-képlet alkalmazása a negatív ion körüli legbelső molekuláris vígrétegre számottevő hibával jár. Valószínűleg ennek a körülménynek a következménye az is, hogy a vízmolekulák középpontja (időátlagban) jobban megközelíti a negatív ionokat, mint a pozitívokat.

Az ionhidratációs munkák elméleti kiszámítása továbbfejlesztésének többek között arra kell irányulnia, hogy e két elhanyagolt körülményt is számításbavegye.

Befejezésül rá kell mutatni az ionhidratáció ismertetett számításának következő elvi hibaforrására.

A Kirkwood—Booth-képlet csak homogén elektromos erőterre van levezetve, kérdés, hogy elég pontos-e ez az ion nagymértékben inhomogén erőterében is. Igaz viszont, hogy az egyenlet állandóinak variálása csak csekély mértékben befolyásolja az ionhidratációs munkák értékét.

1. táblázat

Az alkálihalogenidek kísérleti hidratációs munkái (szabad entalpiái) 25° C-on, *Latimer, Pitzer és Slansky* [9] szerint : kg-kal/mol.

	F	Cl	Br	J
Li	229,2	198,7	191,5	182,4
Na	202,6	173,4	167,1	159,0
K	186,3	157,1	150,7	142,9
Rb	179,1	151,5	145,0	137,6
Cs	174,7	142,8	138,2	130,7

2. táblázat

Az alkáli fémionok, a halogénionok, valamint az alkálihalogenidek hidratációs munkájának Webb-féle [14] elméleti értékei 25° C-on kg-kal/mol

		F	Cl	Br	J
Li	—	87	70	66	61
Na	99	186	169	165	160
K	82	169	152	148	143
Rb	77	164	147	143	138
Cs	71,5	158,5	141,5	137,5	132,5

3. táblázat

Az alkálifémionok, a halogénionok és az alkálihalogenidek hidratációs munkájának Latimer, Pitzer- és Slansky-féle [9] elméleti értékei 25° C-on kg-kal/mol.

		F	Cl	Br	J
Li	115	114	84	78	70
Na	90	229	199	193	185
K	74	204	174	168	160
Rb	67	188	150	152	144
Cs	—	181	151	145	137

4. táblázat

Az alkálifémionoknak, a halogénionoknak és az alkálihalogenideknek a Kirkwood—Booth képlet alapján a 3. ábra szerint számított hidratációs munkái 25° C-on kg-kal/mol. Ionsugárkorrekciók: $\Delta r_+ = 0,5 \text{ \AA}$; $\Delta r_F = 0,15 \text{ \AA}$, $\Delta r_- = 0,0 \text{ \AA}$ (Cl, Br, J)

			Cl	Br	J
Li	—	104,6	89,0	83,2	75,8
Na	108,1	212,7	197,1	191,3	183,9
K	88,2	192,8	177,2	171,4	164,0
Rb	82,2	186,8	171,2	165,4	158,0
Cs	74,5	179,1	163,5	157,7	150,3

IRODALOM

- [1] J. D. Bernal & R. H. Fowler: J. Chem. Phys. 1. 515 o. (1933)
- [2] F. Booth: J. Chem. Phys. 19, 391. o. (1951)
- [3] M. Born: Z. Physik 1, 4. o. (1920)
- [4] A. Eucken: Lehrbuch der chemischen Physik (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig) 3. Auflage, 1949.
- [5] K. Fajans: Verh. dtsh. Physik. Ges. 21 549. o. 709 o. 714. o. (1919)
- [6] Freud Géza: Magyar Tudományos Akadémia Kémiai Tudományok Osztályának Közleményei 3, 394. o. (1953)
- [7] J. B. Hasted, D. M. Ritson & C. H. Collie: J. Chem. Phys. 16, 1. (1948)
- [8] J. G. Kirkwood: J. Chem. Phys. 7. o. 911. o. (1939)
- [9] W. Latimer, K. S. Pitzer & C. Slansky: J. Chem. Phys. 7. o. 108. o. (1939)

- [10] *Lengyel Sándor*: Magyar Tudományos Akadémia Kémiai Tudományok Osztályának Közleményei 3, 367. o. (1953).
 [11] *S. Lengyel, E. Zöld, D. Dobos & M. Déri*: Acta Chem. Hung. 3, 13 (1953.)
 [12] *J. Malsch*: Physik. Zs. 29, 770. o. (1928.).
 [13] *L. Onsager*: J. Am. Chem. Soc. 58, 1486 o. (1936.).
 [14] *T. J. Webb*: J. A. Chem. Soc. 48, 2589 o. (1926.).

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОТЫ ГИДРАТАЦИИ

Ш. Лендьель и М. Кемпелен

Резюме

Считаясь с диэлектрическим насыщением, авторы высчитывают работу гидратации щелочных галогенных соединений. Отклоняясь от расчета Вебба, они принимают во внимание новейшие данные Кирквуда и Буса о диэлектрическом поведении воды.

THEORETISCHE HYDRATATIONSWÄRMEBESTIMMUNGEN

S. LENGYEL UND M. KEMPELEN

Zusammenfassung

Es wird unter Berücksichtigung der dielektrischen Sättigung die Hydratationsarbeit der Alkalihalogenide berechnet. Abweichend von Webb's Berechnungen, werden die neueren Resultate von Kirkwood und Booth bezüglich des dielektrischen Verhaltens des Wassers berücksichtigt.

INDUKCIÓSAN HEVÍTETT KÖRHENGER-ALAKÚ FÉMTESTEK MELEGEDÉSÉVEL KAPCSOLATOS EGYES KÉRDÉSEK VIZSGÁLATA

LOVASS-NAGY VIKTOR, PÁL SÁNDOR és PÁSZTOR JÁNOS

Összefoglalás

Jelen dolgozat célul tűzi ki végtelen hosszúnak tekintett, körhenger-alakú vas- illetve fémtest hőmérsékleteloszlásának meghatározását azon esetben, amikor a testet igen nagy frekvenciájú váltakozó árammal indukciós úton hevítjük. Ez esetben ugyanis — a gerjesztő áram frekvenciáját »végtelen nagy«-nak tekintve — az indukciós úton létrejövő hőenergia úgy is felfogható, mintha (az idő- és felületegységre vonatkoztatva) állandó nagyságú hőmennyiség lépne be a testet határoló hengerpaláston. (Vas-test esetében e feltétel csak a »Curie-pontig« bír jogosultsággal.)

A dolgozat meghatározza a hőmérsékleteloszlást leíró függvényt és példákon bemutatja a levezetett képletek alkalmazását diagrammokkal.

Az utóbbi évtizedekben jelentős mértékben előtérbe került a fémek indukciós úton való hevítése. A módszer elterjedésének oka egyrészt a villamos-eljárás általánosan elismert előnye: a hevítendő testtel közölt energia pontos adagolhatóságának és szabályozhatóságának lehetősége, másrészt az a tapasztalat, hogy ezzel az eljárással lényegesen nagyobb energiakonzentráció érhető el a hevített test felületén, mint bármely más, eddig ismert eljárással.

Az indukciós úton hevített testben keletkező hőenergia tudvalevőleg kétféle eredetű:

a) A váltakozó mágneses tér hatására létrejövő ú. n. »örvényáram-veszteség«-ből származó hő, melynek nagysága az indukciónak és a gerjesztő áram frekvenciájának a négyzetével arányos.

b) Az ú. n. »átmágnesezési veszteség«-ből (hiszterézis) keletkező hő, mely az indukció 1-6-ik és a gerjesztő áram frekvenciájának első hatványával arányos. (Átmágnesezési veszteség csak ferro-mágneses anyagokban lép fel.)

Tehát a hevítendő testtel indukciós úton közölhető hőenergia nagysága a gerjesztő áram frekvenciájának függvénye. Az örvényáram sűrűsége a hevített testben nem oszlik meg egyenletesen, hanem a skin-effektus hatására az áram túlnyomórészt a felületi rétegekben folyik. Hengeres testeknél az árameloszlást Bessel-függvények írják le. [1] Ennek alapján az örvényáram behatolási mélysége fordítva arányos a permeabilitásnak és a gerjesztő áram frekvenciájának négyzetgyökével. Nagy permeabilitású fémekben (pl. szerkezeti acélok a Curie-pontnál kisebb hőmérsékleten) ily módon már közönséges váltakozó áram alkalmazása esetén is a behatolási mélység viszonylag kicsi, rádiófrekvenciás áram alkalmazása esetén pedig általában indokolt az a közelítő

feltevés, hogy az örvényáram a hevítendő test »végtelen kicsi vastagságú« rétegében folyik, és ily módon az indukciós úton a testben keletkező hőenergia mint a test határlapján belépő energia vehető figyelembe. Megjegyzendő, hogy ha acéltesteket a Curie-pontnál magasabb hőmérsékletre hevítünk, elveszti ferromágneses tulajdonságait és így az örvényáram behatolási mélysége megnövekszik (közben az időegység alatt keletkező hőenergia mennyisége csökken), ezért acéltestek indukciós úton való hevítése esetén a testben az örvényáram által létrehozott hőenergiát csak akkor lehet a test hőmérsékletének a Curie-pont fölé való emelkedése után is (közelítőleg) a test határlapján belépő energiának tekinteni, ha a gerjesztő áram frekvenciáját »végtelen nagy«-nak tételezzük fel, így jár el pl. I. A. Dreyfus is idézett dolgozatában. Nem-ferromágneses anyagok (pl. alumínium) esetében ez a megkötés természet-szerűen nem lép fel.

Gépalkatrészeknek — felületi edzés céljából — nagyfrekvenciájú változó áram által előidézett melegedése során fellépő hőmérséklet-eloszlásokat vizsgálva, I. A. Dreyfus foglalkozott az egydimenziós hővezetési differenciálegyenletnek »feltér«-re érvényes megoldásával azon esetben, amikor a feltérbe a határoló síkon belépő (idő- és felületegységre vonatkoztatott) hőmennyiség adott, állandó értékkel bír. [2] Jelen dolgozatban végtelen hosszúnak tekintett, körhenger alakú testben fellépő hőmérséklet-eloszlás meghatározásával fogunk foglalkozni, a Dreyfus által tárgyalt esethez hasonló kerületi feltétel mellett, azaz amikor a testet határoló körhenger-paláston a testbe belépő (idő- és felületegységre vonatkoztatott) hőmennyiség értéke adott állandó.

Keresendő tehát azon $T(r, t)$ hőmérséklet-eloszlás,¹ mely kielégíti a következő feltételeket:

I. A test által elfoglalt, végtelen hosszú körhenger-alakú tartományban $T(r, t)$ kielégíti a

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$$

hővezetési differenciálegyenletet, ahol

$$a = \frac{\lambda}{\gamma c}$$

a közeg ú. n. »belső hővezetési állandó«-ja (dimenziója: Watt/m °C).

γ a közeg fajsúlya (kg/m³),

C a közeg fajhője (Watt/kg °C).

II. A testet határoló körhenger-palást minden pontjában a $T(r, t)$ függvény normális deriváltja adott állandó értékkel bír. Ha ugyanis q jelenti az időegység alatt a testet határoló R sugarú körhenger egységnyi felületén kereszt-

¹ Az adott kezdeti és kerületi feltételek mellett a végtelen hosszú körhenger-alakú test belsejében kialakuló hőmérsékleteloszlást a hosszirányú koordinátától, továbbá — hengerkoordináták esetében — a polárszögtől függetlennek tekinthetjük; tehát a test valamely pontjában a T hőmérséklet jelen esetben csupán a körhenger tengelyétől mért r távolságnak és az időnek (t -nek) a függvénye.

től a testbe juttatott hőmennyiséget (dimenziója : Watt/m²), akkor a testet határoló körhenger-paláston a hőmérsékleteloszlás gradiensét $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}$ -val jelölve, a Newton-féle hővezetési törvény értelmében

$$(2) \quad q = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

Ebből $p = \frac{q}{\lambda}$ helyettesítéssel adódik

$$(2a) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = p,$$

(ahol természetesen p dimenziója °C/m).

III. A $t = 0$ kezdőpillanatban a hőmérséklet a test minden pontjában nullával egyenlő :

$$(3) \quad T(r, 0) = 0.$$

Megkíséreljük a keresett $T(r, t)$ függvénynek két tag összegeként $T = T_1 + T_2$ alakban való előállítását,² ahol a $T_1(r, t)$ függvény a

$$(4) \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} = a \Delta T_1$$

differenciálegyenletnek a

$$(5) \quad \left(\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)_{r=R} = p$$

kerületi feltételt kielégítő tetszőszerinti partikuláris megoldása lehet ; a $T_2(r, t)$ függvény viszont kielégíti a

$$(6) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = a \Delta T_2$$

differenciálegyenletet, továbbá eleget tesz a

$$(7) \quad \left(\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

kerületi feltételnek és a

$$(8) \quad T_2(r, 0) = -T_1(r, 0)$$

kezdeti feltételnek. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a (4) és (5) egyenleteket kielégítő T_1 és a (6) és (8) egyenleteket kielégítő T_2 függvények összegeként előállított $T = T_1 + T_2$ függvény az (1), (2) és (3) egyenleteknek egyidejűleg eleget tesz, tehát éppen a keresett hőmérsékleteloszlást szolgáltatja.

² Megjegyezzük, hogy az itt ismertetett eljárás analóg *Egerváry Jenő Lovass-Nagy Viktor* egy korábbi cikkében [3] alkalmazott módszerrel.

A (4) és (5) egyenleteket egyidejűleg kielégítő $T_1(r, t)$ függvény nyilván előállítható

$$T_1 = C \cdot t + \Theta(r)$$

alakban, ahol C egyelőre tetszésszerűen állandó és $\Theta(r)$ a

$$(9) \quad \Delta \Theta(r) = \frac{C}{a}$$

és

$$(10) \quad \left(\frac{d\Theta(r)}{dr} \right)_{r=R} = p$$

egyenleteknek egyidejűleg elegettevő függvény. Célszerű a $\Theta(r)$ függvényt úgy választanunk, hogy :

$$\Theta(r) = \frac{p}{2R} r^2$$

legyen, ekkor ugyanis $\Theta(r)$ automatikusan kielégíti a (10) egyenletet és ha a fenti C állandó értékét

$$C = \frac{2ap}{R}$$

nek vesszük, T_1 kielégíti a (4) és (5) egyenletet. Tehát :

$$T_1(r, t) = \frac{p}{R} \left(2a^2 t + \frac{r^2}{2} \right)$$

és így :

$$T_1(r, 0) = \frac{p}{2R} r^2$$

A (6) és (8) egyenleteket egyidejűleg kielégítő $T_2(r, t)$ függvényre — a Fourier-féle módszert [4] alkalmazva — a következő végtelen sort nyerjük :

$$T_2(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a \frac{\mu_k^2}{R^2} t} J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right).$$

ahol — (8) egyenletből adódólag — az A_k a következő sorbafejtés együtthatóit jelenti :

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) = -\frac{p}{2R} r^2$$

és μ_k jelenti az $J_1(\mu) = 0$ egyenlet k -adik pozitív gyökét.

Egy *G. N. Watson* által megadott összefüggésből [5] a Bessel-függvényekre vonatkozó ismert identitások figyelembevételével adódik, hogy :

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} J_0(\mu_k x); \quad 0 \leq x \leq 1$$

tehát :

$$A_0 = -\frac{pR}{4}, \quad A_k = -pR \frac{2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

A fentiek alapján :

$$(11) \quad T(r, t) = p \left\{ 2a \frac{t}{R} + \frac{r^2}{2R} - R \left[\frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_k^2 \frac{a}{R^2} t} \right] \right\}.$$

Az összeg első tagja egyszerűen interpretálható. Ugyanis

$$\frac{2ap}{R} t = \frac{2q}{\rho c R} t$$

jelenti azt a hőfokot, melyre a henger minden egyes pontja t idő alatt felmelegednék, ha a henger anyagának λ hővezetőképessége végtelen nagy volna.

Bevezetve a

$$(12a) \quad T = pRU(\varrho, \tau)$$

$$(12b) \quad r = R\varrho$$

$$(12c) \quad t = \frac{R^2}{a} \tau$$

jelöléseket, a nyert eredmény a következő, dimenzió nélküli mennyiségeket tartalmazó összefüggés alakjában írható :

$$(13a) \quad U(\varrho, \tau) = 2\tau + V(\varrho, \tau)$$

ahol

$$(13b) \quad V(\varrho, \tau) = \frac{\varrho^2}{2} - \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} J_0(\mu_k \varrho) e^{-\mu_k^2 \tau}.$$

(A $V(\varrho, \tau)$ függvény a »végtelen jó« hővezetés állapotához képest fellépő »hőfok-előresietés«-t, ill. »hőfok-elmaradás«-t jelenti³.)

³ A numerikus számítások szerint

$$\left(V(\varrho, t) - \left(\frac{\varrho^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \right)$$

legnagyobb értékeit általában a $\varrho = 0$ helyen éri el. Itt.

$$\frac{1}{4} - V(0, t) = 0,0086, \quad \text{ha } t = 0,25,$$

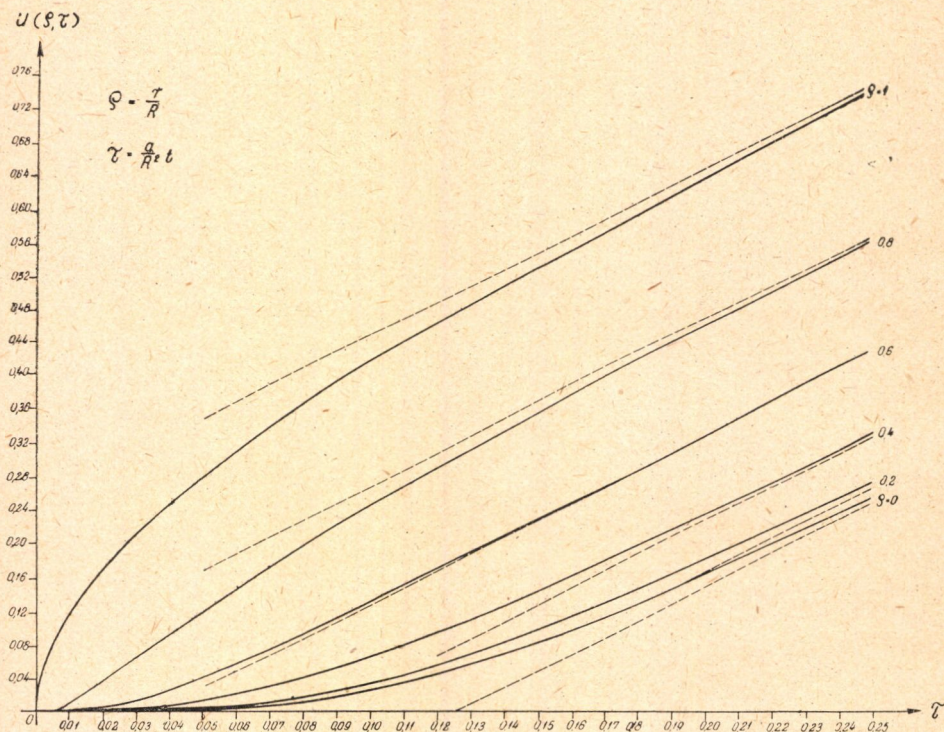
(V. ö. 2. ábra $t = 0,25$ görbéje).

Növekvő t -értékekkel a kifejezés értéke rohamosan csökken. Így $t = 0,4$ esetén már

$$\frac{1}{4} - V(0, t) = 0,000018.$$

1. ábránkon feltüntettük az $U(\varrho, t)$ függvényt, $\varrho = \text{állandó}$ görbék alakjában. A görbék aszimptotájának egyenlete

$$U = 2t + \frac{\varrho_2}{2} - \frac{1}{4}.$$



1. ábra

Jelmagyarázat:

A henger hőfoka r sugáron a hevítés kezdetétől számított t időben:

$$T(r, t) = \frac{q}{\lambda} R U(\varrho, t),$$

ahol

q a henger palástjának felületegységén az időegységben bevitt hőmennyiség;

λ az anyag belső hővezetési állandója;

R a henger sugara;

továbbá

$$\varrho = \frac{r}{R},$$

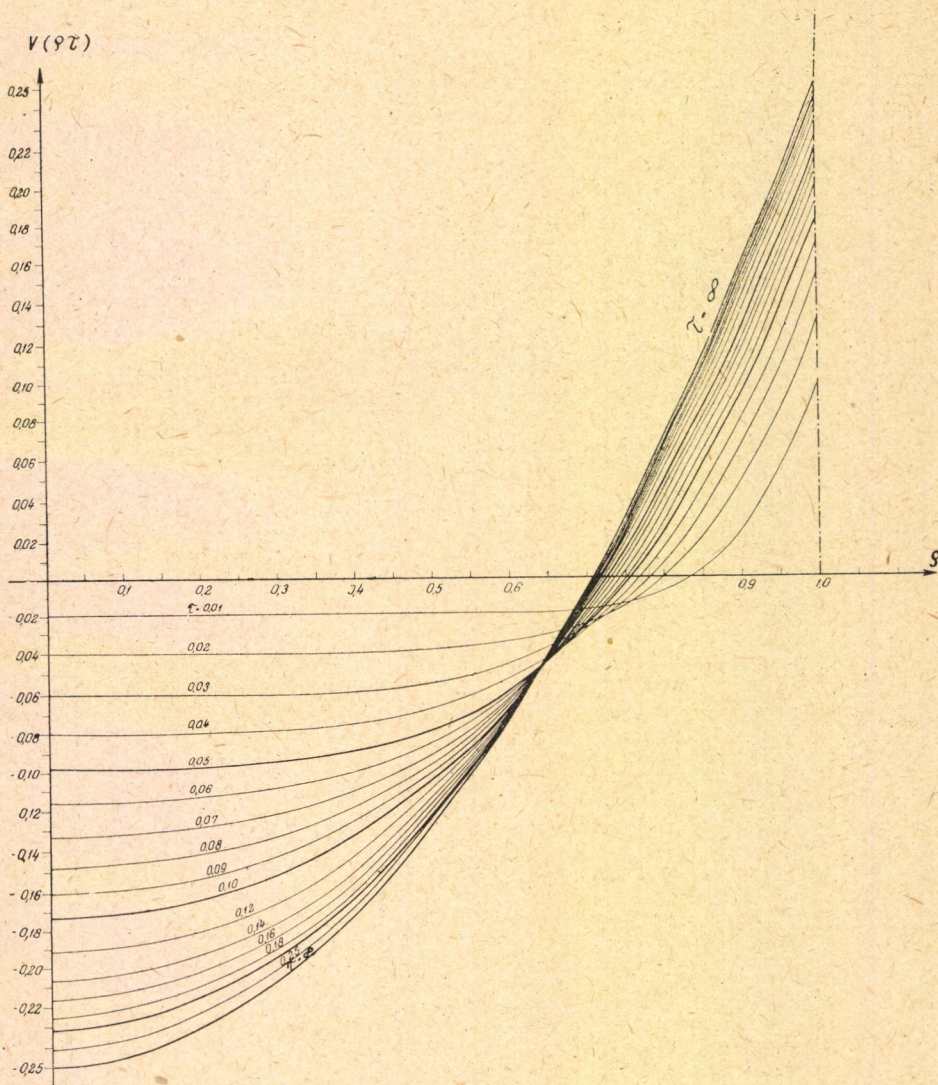
$$t = \frac{\lambda}{\gamma c} \frac{t}{R^2},$$

γ a sűrűség, C a fajhő.

2. ábránkon a $V(\varrho, t)$ függvény $t = \text{állandó}$ görbéi láthatók, melyek a henger keresztmetszetének hőfoka eloszlásáról adnak »pillanatképeket«.

$t \rightarrow \infty$ esetén

$$V(\varrho, t) \rightarrow \frac{\varrho^2}{2} - \frac{1}{4},$$



2. ábra

Jelmagyarázat:

$$V(\varrho, t) = U(\varrho, t) - 2t$$

a »végtelen jó hővezetőképesség« hőfokához képesti hőmérséklet-előresietés.
A többi jelölés magyarázatára vonatkozóan lásd az 1. ábrát.

vagyis elég hosszú idő elteltével a hőfok-előresietés állandóvá válik és a henger átmérő-síkjában mérhető hőfokeloszlás görbéje olyan parabola, melynek csúcspontja a henger tengelyébe esik.

P é l d á k

Fémek nagyfrekvenciás hőkezelésének matematikai módszerekkel való követésénél a hőfokeloszlást elsősorban abból a szempontból kell megvizsgálni, hogy a hőkezelendő test különböző rétegei között milyen hőfok-különbségek lépnek fel a hevítés végén.

A hőfokeloszlással szemben támasztott követelmények a hőkezelés fajtájától függenek.

I. Felületi edzés esetén kívánatos, hogy a hevítés végén, amikor az edzendő test felülete elérte már az edzés (az austenitté való átalakulás) hőfokát, a belső rétegekben még ne keletkezzék a szövetet megváltoztató felmelegedés. Ezért arra törekszünk, hogy az edzési hőfoknak a felületen történt elérésekor nagy legyen a hőfok gradiense a hengernek felületéhez közeli rétegeiben.

Ellenőrizzük ebből a szempontból egy 40 mm átmérőjű — végtelen hosszú hengernek tekinthető — tömör acéltengely felületi edzését. Tegyük fel, hogy az acélhenger anyaga nagy széntartalmú acélból készült, melynek A_{c3} kritikus hőmérséklete összeesik a Curie-ponttal. Noha az edzés gyakorlati kivitele alkalmával ennél valamivel magasabb hőmérsékletet kell elérni, elegendő a számítást eddig a hőmérsékletig elvégezni.

A henger sugara : $R = 2$ cm.

Az edzés időtartama : $t_v = 1,71$ mp (kényelmi szempontból választjuk ezt a nem kerek időtartamot, hogy a 2. ábra görbéi közötti interpolációt elkerüljük).

Elérendő hőfok a felületen : 769°C .

Kezdeti hőmérséklet : 20°C .

Tehát a felületen fellépő maximális felmelegedés :

$$T_{\max} = T(R, t_v) = 749^\circ \text{C} .$$

Anyagi állandók :

$\lambda = 0,1$ kal/cm sec $^\circ\text{C}$ (középértékben),

$\gamma = 7,89$ g/cm³,

$C = 0,1372$ kal/g $^\circ\text{C}$.

Keressük : 1. a henger belsejében való hőfokeloszlást a felületi 769°C elérésekor ;

2. az edzésre felhasználandó villamos teljesítményt.

Az anyagi állandók és t_v ismeretében meghatározható a t_v -hez tartozó τ_v

$$\tau_v = \frac{\lambda}{\gamma c} \frac{t_v}{R^2} \cong 0,04$$

vagyis a 2. ábra görbéi közül a $t_v = 0,04$ görbe megadja alakra helyesen a henger belsejének hőfokeloszlását a hevítés befejezésekor.

A görbéről a következő adatok olvashatók le :

$$V(1, 0,04) = 0,168 ;$$

így tehát

$$U_{\max} = U(1, 0,04) = 2 \cdot 0,04 + 0,168 = 0,248.$$

Tekintettel arra, hogy U_{\max} -on, a hengerpalást hőfokának redukált értékén kívül T_{\max} a valódi érték is ismeretes, a $\tau = 0,04$ - és V -görbe V -skálája átskálázható Celsius fokokra. Ugyanis 100°C -nak a V -skálán

$$\frac{100 \cdot U_{\max}}{T_{\max}} = \frac{0,248 \cdot 100}{749} = 0,331$$

egység felel meg. Ilyen módon megszerkeszthető a henger rétegeinek valószínű hőfokeloszlási görbéje (3. ábra).

A hőmérséklet gradiense a felületen, tehát a $[T(r, t)]_{t=\text{átl}}$ görbe $r = R$ pontbeli érintőjének meredeksége a (2) egyenlet értelmében éppen p .

(12a) szerint azonban

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = p = \frac{T_{\max}}{RU_{\max}}$$

A kiszámított és ismert numerikus értékeket behelyettesítve

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = 1510^\circ \text{C/cm}$$

adódik.

A (2a) egyenlet alapján ebből

$$q = 0,1 \cdot 1510 = 151 \text{ kal/cm}^2 \text{ mp}$$

vagy villamos egységekben

$$q = 632 \text{ watt/cm}^2.$$

Ennek alapján a tengely 1 cm hosszú szakaszának megedzése

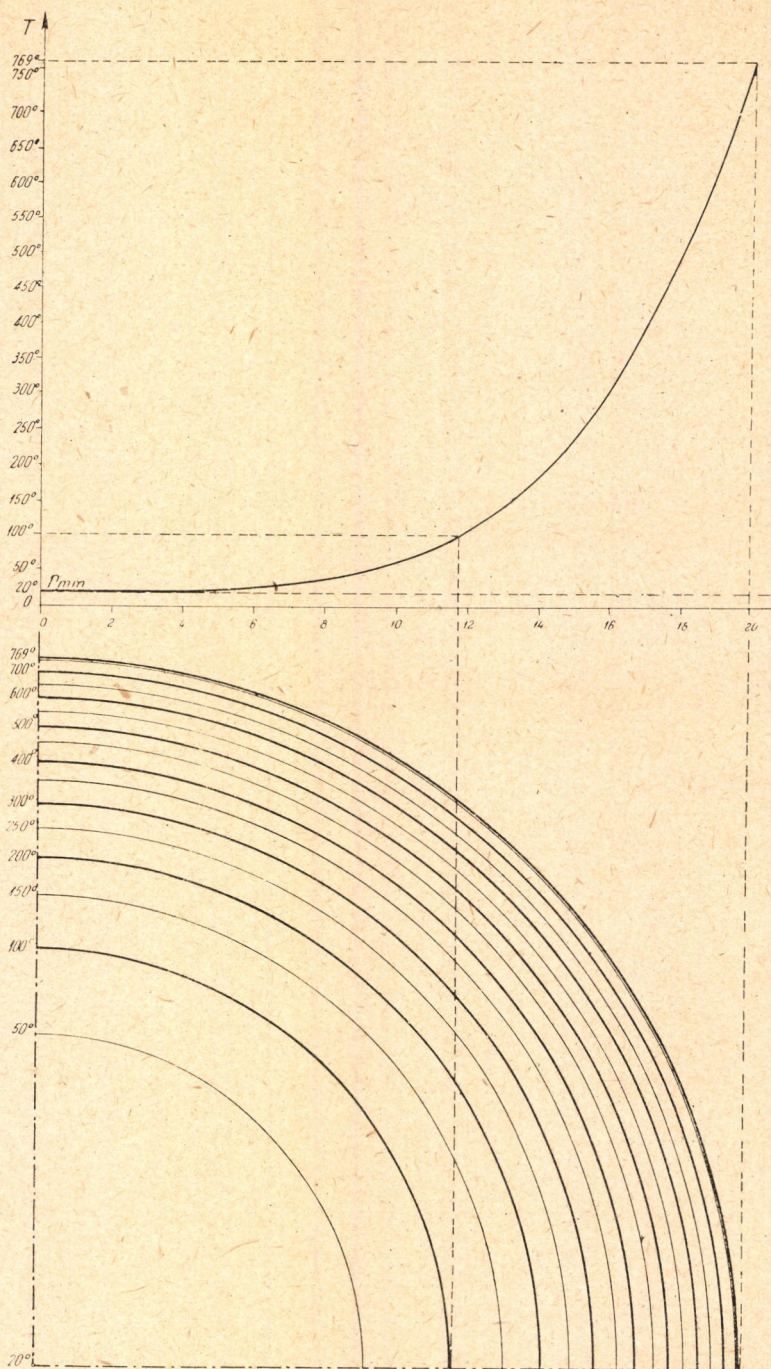
$$\frac{632 \cdot 2,2\pi \cdot 1,71}{3600} = 3,76 \text{ wattóra}$$

hasznos villamosmunkát emészt fel.

II. Ha az anyagot *kovácsolás* céljából hevítjük fel, a felületi edzéssel ellentétben fontos, hogy a hevítendő test keresztmetszete egyenletesen melegedjék, tehát a hevítés végén a henger palástjának és tengelyének hőfoka közel egyező legyen.

A (13) egyenletekből látható, hogy ez akkor teljesül (ami egyébként fizikailag is nyilvánvaló), ha

$$V(q, t) \ll 2t,$$



3. ábra

tehát ha a hevítés lassú. Ha ez a feltétel nem teljesül, egyben jó közelítéssel

$$(14) \quad V(q, t) \cong \frac{q^2}{2} - \frac{1}{4}.$$

Definiáljuk a hevítés végén a hőmérsékleteloszlás egyenlőtlenségi fokát a következőképp:

$$\delta = \frac{T(R, t_v) - T(0, t_v)}{T(R, t_v)},$$

vagyis mint a henger tengelyének a palásthöz képest vett relatív hőfokelmaradását a hevítés végén. Akkor a (12) és (14) egyenletek figyelembevételével

$$(15) \quad \delta = \frac{1}{4t + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{4at_v}{R^2} + \frac{1}{2}}.$$

Ha a műszaki tapasztalat szerint a kovácsolás esetén megengedhető maximális $T(R) - T(0)$ hőfokelmaradásból indulunk ki, ez megszabja a hevítéshez szükséges minimális időt.

Legyen pl. a kovácsolandó hengeres test anyaga alumínium, maximális hevítési hőfok: 630 °C, tehát

$$T_{\max} = T(R, t_v) = 610 \text{ °C}$$

a henger sugara ismét $R = 2 \text{ cm}$.

Anyagi állandók: [6]

$$\lambda = 0,485 \text{ kal/cm mp °C (középértékben),}$$

$$\gamma = 2,7 \text{ g/cm}^3,$$

$$C = 0,245 \text{ kal/g °C}$$

A tengely megengedett hőfokelmaradása a palásttól a hevítés befejeztekor 20 °C.

Ebből

$$\delta = \frac{20}{610} = 0,0628$$

és (15) alapján

$$t_v = 7,5.$$

Az anyagállandók felhasználásával

$$a = \frac{0,485}{2,7 \cdot 0,245} = 0,733,$$

és

$$t_v = \frac{2^2 \cdot 7,5}{0,733} = 40,9 \text{ mp}$$

t_v ismeretében meghatározható $U_{\max} = U(1, t_v)$:

$$U(1, \tau_v) = 2\tau_v + \frac{1}{4} = 15,25,$$

Ezzel a paláston

$$q = \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{T_{\max}}{U_{\max}} = \frac{0,485}{2} \cdot \frac{610}{15,25} = 9,7 \text{ kal/cm}^2 \text{ mp},$$

vagyis

$$40,6 \text{ watt/cm}^2$$

hasznos teljesítményt kell bevinni.

IRODALOM

[1] *Simonyi K.*: Elméleti villamosságtan, Tankönyvkiadó, Budapest, 1952. 231. o.

[2] *L. A. Dreyfus*: High Frequency Heating and Temperature Distribution in Surface Hardening of Steel, Acta Polytechnica Stockholm, Electrical Engineering Series Vol. 4. Nr. 5. (Stockholm, 1952.). 47. o.

[3] *Egerváry Jenő—Lovass-Nagy Viktor*: A hővezetési differenciálegyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett. A MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei, I. kötet. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[4] Lásd pld.: A. H. Тихонов-А. А. Самарский: Уравнения математической физики 455. o.

[5] *G. N. Watson*: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922. University Press. 580. o.

[6] Metals Reference Book. Colin J. Smithels, London, Butterworths Sc. Publ. 1949.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ СВЯЗАННЫХ С НАГРЕВАНИЕМ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ, НАКАЛЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ИНДУКЦИИ

В. Ловаш-Надь, Ш. Пал, Я. Пастор

Резюме

Цель настоящей работы — определение распределения температуры в бесконечном железе (металлическом) теле формы круглого цилиндра, когда оно нагревается индуцированным переменным током высокой частоты. Если частота возбуждающего тока полагается бесконечной, то, индуцированную тепловую энергию можно считать постоянным в единицу времени и на единицу поверхности потоком тепла, перетекающим поверхность тела. (В случае железного тела это условие имеет право только до «пункта Кюри».) В работе определяется функция распределения температуры тела. Применение наиболее важных формул иллюстрируется примерами и диаграммами.

UNTERSUCHUNG EINIGER DIE ERWÄRMUNG EINES DURCH INDUKTION ERHITZTEN KREISZYLINDER-FÖRMIGEN KÖRPERS BETREFFENDEN FRAGEN

V. LOVASS-NAGY, J. PÁSZTOR, S. PÁL

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung der Temperaturverteilung in einem als unendlich lang angenommenen Eisen- bzw. Metallzylinder, wenn dieser durch Wechselstrom sehr hoher Frequenz induktiv erhitzt wird. Nämlich in diesem Falle — die Frequenz des Erregerstromes als »unendlich hoch« ansehend — kann die durch Induktion zustande kommende Wärmeenergie so aufgefasst werden, als ob in das Innere des Körpers eine Wärmemenge von (auf Zeit- und Flächeneinheit bezogen) konstanter Grösse durch den den Körper begrenzenden Zylindermantel einströmen würde. (Im Falle eines Eisenkörpers ist diese Annahme nur bis zum sogenannten Curie-Punkt berechtigt.)

In der Arbeit wird die die Temperaturverteilung darstellende Funktion bestimmt und die Anwendung der abgeleiteten Formeln an Hand von einigen Beispielen durch Diagramme illustriert.

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET OSZTÁLYAI ÉS CSOPORTJAI SZEMINÁRIUMÁBAN, ILLETVE ÉRTEKEZLETEIN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK KIVONATAI

Mechanikai és szilárdságtani osztály

Lovass-Nagy Viktor: Nagyfrekvenciás árammal indukciós úton hevített vas-, illetve fémtesteken fellépő hővezetési folyamatokra vonatkozó néhány kérdésről. (1953. augusztus 8.)

Az előadás néhány, a gépalkatrészek nagyfrekvenciájú váltakozó árammal (kovácslás, ill. edzés végett) való hevítése során felmerülő hővezetési probléma matematikai vizsgálatával foglalkozott. Az előadó bemutatott egy általa konstruált módszert valamely végtelen hosszúnak tekintett, körhenger alakú test hőmérsékletének meghatározására azon esetben, amikor a test hőmérséklete a külső hengerpaláston az idő tetszőszerinti adott függvénye. Foglalkozott továbbá az előadó azzal a problémával, hogy ha — ugyan-csak végtelen hosszúnak tekintett, körhenger alakú test esetében — a külső hengerpaláston belépő (idő-, és felületegységre vonatkoztatott) energia van megadva, miként lehet a test melegedését leíró függvényt meghatározni. Az előadó a problémát egy Volterra-típusú, másodfajú integrálegyenletre vezette vissza. *Pál Sándor* hozzászólásában a módszer egyszerűsítését célzó hasznos javaslatokat tett. (A vizsgálatok eredményének egy részéről *Lovass-Nagy Viktor, Pál Sándor és Pásztor János* — utóbbi a Vaskutató Intézet munkatársa — jelen kötetben »Indukciósan hevített körhenger alakú fémhenger melegedésével kapcsolatos egyes kérdések vizsgálata» c. cikkben számolnak be.)

Egerváry Jenő: Megjegyzések Stieltjes egy lemmájához. (1953. szeptember 12.)

Ha egy kvadratikus matrixnak összes főminorai pozitívok, és a fődiagonálison kívüli összes elemei negatívok, akkor a reciprokok matrix csupa pozitív elemmel bír. Ennek a tételnek, mely a Green-függvény pozitívitásáról szóló tétel finit analogonjának tekinthető, előadó két bizonyítását adta, melyek közül a második a tétel élesítését is tartalmazza. Kimutatta továbbá az előadó, hogy bármely kontrakciós lineáris-transzformáció (egy megfelelő magasabb dimenziójú tér igénybevételével) előállítható, mint egy forgatásnak és egy arra következő merőleges vetítésnek a szorzata. Ez egy *Szőkefalvi Nagy Bélától* származó, a Hilbert-tér kontrakciójára vonatkozó tételnek finit analogonja.

Valószínűségszámítási osztály

Prékopa András: *A. N. Kolmogorov:* »Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung« (Math. Ann. 104.) című dolgozatának ismertetése. (1953. január 16. és 23.)

Rényi Alfréd: Homogén, véges sok állapotrendszerrel kapcsolatos Markov-folyamatok ergodicitása. (1953. február 6.)

Előadó egyszerű bizonyítást adott a Markov-folyamatok ergodicitására.

Fényes Imre: A kvantummechanika valószínűségszámítási interpretációja. (1953. március 5.)

Előadó ismertette a Schrödingeregyenletből de Broglie által származtatott

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{m} \operatorname{div} v \nabla \Sigma = 0$$

$$v \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + Vv + v \frac{1}{2m} (\nabla \Sigma)^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} v^{1/2} \Delta v^{1/2} = 0$$

egyenletek valószínűség-számítási interpretációjára vonatkozó elgondolásait, amelyek az első egyenletnek és a második egyenletből gradiens-képzéssel nyert egyenleteknek a Markov-folyamatok elméletében ismert Kolmogorov-egyenletekhez való hasonlóságán alapulnak.

Rényi Alfréd hozzászólásában rámutatott, hogy a kvantummechanikában szereplő sztochasztikus folyamatok nem Markov-folyamatok és így az előadó által felírt egyenlet nem azonos a Kolmogorov-féle egyenletekkel, amely csak Markov-folyamatokra vonatkozik.

Lipták Tamás: A kvantummechanika egy valószínűség-számítási problémájáról. (1953. március 27.)

Az előadó vizsgálta a kvantummechanikában szereplő hely- és impulzusvektorok együttese által alkotott sztochasztikus folyamatot. A kvantummechanikai operátor-számítást használva előadó előállította a hely- és impulzuskoordináták együttes sűrűség-függvényét a ψ állapotfüggvény segítségével. A harmonikus oszcillátor esetében ez az együttes eloszlás kétdimenziós normális eloszlás, melynek komponensei (a hely- és impulzusvektor) egymástól független, normális eloszlású változók.

Székelly Gábor: *A. Ja. Hincsin*: »Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse« (Math. Ann. 109.) (1934) 604-610 című dolgozatának ismertetése. (1953. április 3.)

Takács Lajos: Példák stacionárius sztochasztikus folyamatok harmonikus analízisére. (1953. április 3.)

Tekintsük a $-\infty < t < \infty$ időpontokra értelmezett

$$\eta_t = \sum_{-\infty < t_n \leq t} f(t - t_n, \chi_n)$$

valószínűségi függvényt, ahol a $\{t_n\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots$) időpontok λ sűrűségű Poisson-folyamatban előforduló események időpontjait jelentik és a χ_n valószínűségi változók függetlenek és ugyanazon $H(x)$ eloszlásfüggvénnyel bírnak. Az $f(u, x)$ függvényről feltesszük, hogy $f(u, x) = 0$ ha $u < 0$.

Ez az η_t folyamat a gyakorlatban elektronsokszorozóval történő részecskeszámlálásoknál lép fel, amikor is $f(u, x) = xe^{-au}$ alakú és elektronsövek anódáramingadozásának tárgyalásánál, amikor is $f(u, x)$ jelenti egy a katódról x kezdősebességgel kilépő elektron által influált áram időbeli lefolyását.

Az η_t folyamat spektrális eloszlásfüggvényét $F(\omega)$ -val jelölve erre fennáll, hogy

$$F'(\omega) = \frac{2\pi\lambda}{\sigma^2} \int_0^\infty |A(\omega, x)|^2 dH(x),$$

ahol

$$A(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(u, x) e^{-i\omega u} du$$

és

$$\sigma^2 = \lambda \int_0^\infty \left| \int_0^\infty f(u, x) dH(x) \right|^2 du.$$

A fizikában használatos teljesítményspektrum: $G(\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \infty$) ezzel a következőképpen fejezhető ki:

$$G(\omega) = m^2 + \sigma^2 [F(\omega) - F(-\omega)],$$

ahol

$$m = \lambda \left| \int_0^\infty \int_0^\infty f(u, x) dH(x) \right| du.$$

$G(\omega)$ jelentése a következő: Ha η_t -t áramnak tekintjük, amelyet egységnyi ellenálláson vezetünk át, úgy a leadott átlagteljesítmény

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \eta_t^2 dt \right\} = m^2 + \sigma^2.$$

és $G(\omega)$ ennek a teljesítménynek a $(0, \omega)$ frekvenciasávba eső részét szolgáltatja.

Medgyessy Pál: Gauss-görbék szuperpozíciójaként előálló függvények komponenseinek meghatározása. (1953. április 17.) (Lásd a — jelen kötetben megjelent — »Valószínűségi eloszlás-függvények keverékének felbontása összetevőire« című dolgozatot.)

Prékopa András: W. Feller: »Zur Theorie der stochastischen Prozesse« (Math. Ann. 113. 1936. 116—160. o. dolgozatának ismertetése. (1953. május 8.)

Palásti Ilona: P. Halmos: »Measure theory« c. könyve első fejezetének ismertetése. (1953. október 9.)

Rényi Alfréd: A valószínűség fogalmának általánosítása. (1953. október 9.)

A valószínűségszámítás különböző alkalmazási területein (pl. a kvantummechanikában a szabad elektronnal kapcsolatban, az integrálgeometriában stb.) nehézséget okoz az a körülmény, hogy az egész térben, illetve síkon egyenletes valószínűségi-eloszlás nem létezhet. Ennek a nehézségnek a kiküszöbölését, és így a valószínűségszámítás alkalmazási körének kibővítését előadó úgy oldja meg, hogy a valószínűség fogalmát általánosítja.

Legyen H egy tetszőleges halmaz, T_1 a H halmaz részhalmazainak egy Borel-féle halmazteste, legyen továbbá T_2 a T_1 halmaztest egy részhalmaza. Tegyük fel, hogy a $P(A|B)$ kétváltozós halmazfüggvény értelmezve van, ha $B \in T_2$ és $A \in T_1$, és elegendő tesz az alábbi három axiómának:

I. $P(A|B) \geq 0$ és $P(B|B) = 1$.

II. $P(A|B)$ tetszőleges rögzített B mellett mint A függvénye teljesen additív.

III. $P(A|BC)P(B|C) = P(AB|C)$ ha $A \in T_1$ és $B \in T_1$ továbbá ha $C \in T_2$ és $BC \in T_2$.

Ezen axiómák teljesülése esetén azt mondjuk, hogy a H eseménytér a T_1 -en és T_2 -ön értelmezett $P(A|B)$ halmazfüggvénnyel egy *feltételes valószínűségi mezőt* alkot; a $P(A|B)$ számot az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűségének nevezzük. Ebben az elméletben tehát a feltételes valószínűség a primér fogalom; feltétel nélküli (abszolút) valószínűségek általában ebben az elméletben nincsenek is értelmezve. Megjegyzendő, hogy a feltételes valószínűségekre vonatkozó összefüggés, amely a klasszikus valószínűségszámításban mint tétel, a Kolmogorov-féle elméletben mint definíció szerepelt, ebben az elméletben az axióma szerepét játssza. Abban a speciális esetben, ha $H \in T_2$, bevezetve a $P(A|H) = P(A)$ jelölést, a $P(A)$ számot az A esemény (abszolút) valószínűségként értelmezve:

$$P(A|B) = \frac{P(A|BH)}{P(B|H)} = \frac{P(A|B)}{P(B)}$$

és így visszajutunk a valószínűségszámítás jólismert Kolmogorov-féle elméletéhez. Abban az esetben, amikor H nem eleme T_2 -nek, a Kolmogorov-féle elméletnél általánosabb elméletet nyerünk.

Előadó bebizonyította, hogy bizonyos feltételek mellett a $P(A|B)$ halmazfüggvény akkor is előállítható $P(A|B) = \frac{Q(A|B)}{Q(B)}$ alakban, ha H nem eleme T_2 -nek; ez esetben azonban $Q(B)$ nem szükségképpen korlátos halmazfüggvény. Így pl. ha H

az n -dimenziós E_n euklidesi tér ($n = 1, 2, 3, \dots$) T_1 az E_n tér mérhető részhalmazainak összesége, T_2 az E_n tér pozitív és véges mértékű mérhető részhalmazainak összesége, és $P(A|B) = \frac{m(AB)}{m(B)}$ ahol $m(C)$ a C halmaz n -dimenziós Lebesgue-féle mértéke, a fenti

feltevések és axiómák teljesülnek. Ez a példa egyben azt is megmutatja, milyen értelemben lehet az egész n -dimenziós térben egyenletes valószínűségeloszlásról beszélni az új elméletben. Előadó vázolta, hogyan lehet a fenti axiómarendszerre a valószínűségszámítás általánosított elméletét felépíteni. Ebben az elméletben a valószínűségi változó fogalma változtatás nélkül átvihető, azonban csak feltételes eloszlásfüggvényről, feltételes függetlenségről, feltételes várható értékről és szórásról stb. lehet beszélni, egy T_2 -höz tartozó B feltételre nézve. Rögzített $B \in T_2$ mellett a valószínűségszámítás összes tételei megfelelően átfogalmazva megtartják érvényüket; egy B_1 feltételről egy más B_2 feltételre való áttérés sajátos, új problémákra vezet.

Palásti Ilona: *P. Halmos*: »Measure theory« című könyve második fejezetének ismertetése. (1953. október 16.)

Edward Marczewski (Wrocław): A kompakt mértékről. (1953. december 3.) Előadó ismertetette a kompakt mérték általa bevezetett fogalmát, alkalmazását szorzat-terek mértékeinek konstrukciójára és munkatársainak idevágó eredményeit.*

Marek Fis (Warszawa): A valószínűségszámítás némely problémáiról. (1953. december 10.)

I. Legyenek X_1 és X_2 valószínűségi változók, melyekre

$$(1) \quad P(X_i = k) = e^{-w_i} \frac{w_i^k}{k!} \quad (i = 1, 2)$$

ahol $w_i \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$ Tegyük fel, hogy

$$(2) \quad w_i = n d_i$$

ahol d_i és n pozitív számok. Vezessük be a következő jelöléseket

$$z = \frac{k - (w_2 - w_1)}{\sqrt{w_1 + w_2}}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$p_{r+2} = \begin{cases} (w_1 + w_2) - \frac{r}{2} & (r = 2, 4, 6, \dots) \\ (w_2 - w_1)(w_1 + w_2) - \frac{r+2}{2} & (r = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

Tétel. Ha X_1 és X_2 két olyan valószínűségi változó, melyekre (1) és (2) fennállnak, akkor, ha $n \geq 1$ és $w_i \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2$) érvényes a következő aszimptotikus formula:

$$(3) \quad P(X_2 - X_1 = k) = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2}} \left\{ \varphi(z) + \sum_{r=1}^n F_r[-\varphi(z)] + 0 \right\} \frac{1}{(w_1 + w_2)^{\frac{n+1}{2}}} \Bigg|.$$

ahol az $F_r[-\varphi(z)]$ függvény minden $r = 1, 2, \dots$ értékre meghatározható az

$$\exp \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p_{r+2}}{(r+2)!} [-\varphi(z)]^{r+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \right\} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} F_r[-\varphi(z)] \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r$$

azonosságból.

Ha $w_1 = w_2$, akkor

$$(4) \quad P(X_2 - X_1 = k) = e^{-2w} I_k(2w),$$

ahol $I_k(2w)$ tiszta imaginárius argumentumú Bessel-függvény. Az ilyen Bessel-függvényekre (3) és (4) alapján megadható egy aszimptotikus formula.

* Lásd a következő dolgozatokat: *E. Marczewski*: On compact measures, *Fund. Math.* 40 (1953) 113–124. *E. Marczewski* és *C. Ryll-Nardzewski*: Projections in abstract sets és Remarks on the compactness and non direct products of measures u. o. 160–164 és 165–170. *C. Ryll-Nardzewski*: On quasi-compact measures, u. o. 125–130.

II. Az $(X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nr})$ valószínűségi változók eloszlása a következő kifejezés által van adva:

$$P(X_{n1} = k_1, X_{n2} = k_2, \dots, X_{nr} = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_{n1}^{k_1} p_{n2}^{k_2} \dots p_{nr}^{k_r},$$

Tétel: Legyenek $A_{nm} \neq 0$ és B_{nm} ($m = 1, \dots, r$) valós számsorozatok. Tegyük fel, hogy az $A_n! X_{n1} + B_{n1}, \dots, A_n! X_{nr} + B_{nr}$ valószínűségi változók eloszlása konvergál egy $r-1$ dimenziós nem elfajult változó eloszlásához, ha $n \rightarrow \infty$. Ebben az esetben a határeloszlás valamilyen (ξ, η) független változó-pár eloszlása, ahol ξ j -dimenziós ($0 \leq j \leq r-1$) Poisson-eloszlású, η pedig $r-j-1$ -dimenziós normális eloszlású változó.

Takács Lajos: Egy sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatos paradoxonról. (1953. december 10.) Lásd az »Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalására« c. ebben a kiadványban megjelent dolgozatot.

Arató Máttyás: P. Halmos: »Measure theory« c. könyve III. fejezete első részének ismertetése. (1953. december 17.)

Matematikai statisztikai osztály

Sarkadi Károly: J. Oderfeld: »Alternativa szerint osztályozható áruk statisztikai minőségellenőrzése.« Varsó, 1950 c. munkájának ismertetése. (1953. május 20.)

A szerző munkájának »Dualizmus elve« című fejezetében azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy adott mintavételi eljárás eredményeiből hogyan állapíthatók meg adott valószínűséggel a tétel selejtarányának határai. Ezeket a határokat retrospektív paramétereknek nevezzük, szemben az általánosan használt prospektív paraméterekkel, amelyek ismertnek feltételezett selejtarány esetében adnak tájékoztatást a mintavételi eljárás várható eredményére nézve. A priori egyenletes eloszlás feltételezése mellett a retrospektív paraméterek meghatározása visszavezethető a prospektívékére.

A következő fejezetben ismertetett ú. n. zárt szekvenciális terv elve, hogy a döntést akkor kell meghozni, amikor adott valószínűség-információval rendelkezünk arról, hogy a tétel selejtaránya meghalad egy adott p_1 selejtarányt, illetve egy p_2 selejtarány alatt van ($p_1 < p_2$). E rendszernek több előnye van a Wald-féle szekvenciális tervvel szemben; így pl. abban az esetben, ha a vizsgálandó tétel selejtaránya a két hatarselejtarány között van, a vizsgálat lényegesen megrövidül.

Sarkadi Károly: J. Oderfeld: »Alternativa szerint osztályozható áruk statisztikai minőségellenőrzése« c. munkájának ismertetése, folytatás. (1953. június 25.)

Az ismertetett munka hátralevő része azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy hogyan lehet az elmúlt átvételek tapasztalatait figyelembevenni.

A — Steinhaus gondolata alapján kidolgozott — kontós rendszerben pontozás formájában gyűjtik össze az egyes átvételi eljárások eredményét. A pontszám a mintában talált selejt darabszámától függ és a pontozás állásának befolyása van az átvételre. Minden tervnek egy jellemző selejtaránya van: ha a tételek selejtaránya ennél nagyobb, akkor egy bizonyos idő után minden tételt majdnem biztosan visszautasítanak; illetve, ha kisebb, majdnem biztosan átvesznek.

A következő részben a retrospektív probléma megoldásával foglalkozik a priori β -eloszlás feltevése mellett. A retrospektív paraméterek meghatározása — az egyenletes eloszlás esetéhez hasonlóan — visszavezethető a prospektívékére. A módszer könnyebb alkalmazhatósága érdekében táblázatok, diagrammok készíthetők. Az a priori β -eloszlás feltételezése a tapasztalati adatok szerint jogosult.

Vegyipari osztály

Fenyő István a következő témájú szemináriumokat tartotta: (1953. szeptember 1-től kezdve hetente).

Az integráltranszformációkról általában. Az integráltranszformációk szerepe peremértékfeladatokra. A Bochner-féle megfordítási tétel. A Watson-féle problémakör.

Speciális integráltranszformációk. A Laplace-féle transzformáció és annak megfordítási tétele. A Laplace-féle transzformáció főbb tulajdonságai. A Hankel-féle

transzformáció. A Hankel-féle megfordítási tétel. A Hankel-transzformáció alkalmazása peremértékfeladatok megoldására. A Fourier-transzformáció. A Fourier—Plancherel-féle tétel.

Parciális differenciálegyenletek megoldása Fourier-módszerrel. A kapott eredmények konvergenciájának vizsgálata. Tárgyalás kapcsán a Laplace-, Poisson- és binomiális egyenlet különböző peremértékfeladatok melletti meghatározásáról.

Végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszerek elméletének alapjai. A megoldás meghatározásának módszerei. A megoldás inicításáról szóló tételek, a megoldás numerikus megoldásának meghatározására vonatkozó módszerek. Reguláris és teljesen reguláris egyenletrendszerek megoldási módszerei.

Numerikus és grafikus módszerek osztálya

Pál Sándor: Két alkalommal tartott előadást mozgóalkatrészes nomogrammok alkalmazásairól. (1953. március 11. és 25.)

Tóth Károly: $S = S - (c - t)k$ kapcsolat (fajsúlytszámítás, $c = \text{const.}$) nomografikus ábrázolásáról tartott előadást. (1953. május 5.)

Horváth Ferenc: $f_1 f_2 f_{34} + (f_1 + f_2) G_{34} + h_{34} = 0$ Clark-féle nomogrammtípus különböző transzformált alakjai s konkrét alkalmazása az elektrotechnikai csillag-, háromszög-kapcsolás egymásba transzformálásával foglalkozott. (1953. október 26.)

Góts László: Változó keresztmetszetű tengelyek lehajlás és szögelfordulás-számítása nomografikus úton. (1953. december 5.)

Hajtóművek tengelyeinél a korszerű méretezéshez a fogaskerek helyén a lehajlás és szögelfordulás, a csapágycsuk helyén a szögelfordulás értékeit ismernünk kell. A gyakorlatban erre a Mohr-féle szerkesztő-számító eljárás honosodott meg. Mivel sok helyen változó keresztmetszetű tengelyeknél sokszori számítás esetén még ez is hosszadalmasnak mutatkozik, további egyszerűsítések célszerűnek mutatkoznak.

Az inercianyomatékok arányában redukált nyomatéki ábra háromszögeiből a lehajlás (y) szuperpozíció útján is előállítható.

$$y = \left(\sum_{i=1}^n K_{yi} \right) \frac{P_i l^3}{I_b E}$$

a szögelfordulás irántangense pedig

$$\varphi = \left(\sum_{i=1}^n K_{\varphi i} \right) \frac{P_i l^3}{I_b E}$$

képlet alapján számolható. Itt annyi » K_i « értéket kell összegezni, ahány keresztmetszet-változás (n) van.

A » K_i « faktor értékeit nomografikusan határozzuk meg. Ez függ a kérdéses lehajlás vagy szögelfordulás helyétől, az inercianyomatéktól, az erő hatásvonalának távolságától és a keresztmetszetváltozás helyétől. Kéttámaszú konzolos és konzol nélküli, valamint befogott tartók esetén a faktor görbesorokkal, illetve görbesorokkal kapcsolt szorzónomogrammal számítható. Így a számítás menete meggyorsul és leegyszerűsödik. Ha az egyes intervallumokra külön adjuk meg a » K_i «-t, Cauchy-féle pontsoros és pontmezős, összeadó-, szorzó- és mozgólappos nomogrammok tervezhetők. Ezeknek a használata már nehézkesebb és sok tévedési lehetőséget rejt magában.

Elektrotechnikai csoport

Fazekas Ferenc: A »Hidroflox« esztergapadokra felszerelhető automatikus másolóberendezésre vonatkozó számításokról tartott előadást. (1953. június 17.)

Az előadást vita követte. Ennek során *Török Vilmos* is felszólalt. (Lásd *Fazekas Ferenc:* »Egy magyar automatikus másolóberendezés másolási pontosságának matematikai vizsgálata«, *Török Vilmos:* »Hidroflox« másolóeszköz szabályozástechnikai vizsgálata« c. jelen kiadványban megjelent dolgozatokat.)

Freud Géza, Frei Tamás és Szűsz Péter: Az interpolációról, különösen a Lagrange-interpolációról és a Hermite-interpolációról adtak elő. (1953. február 1-től július 1-ig folytatólag, hetente).

Az előadások körül egyesek új eredményeket is tartalmaztak az ismert klasszikus tételek részletes bizonyítása mellett.

Freud Géza: A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeinek nagyságrendje. (1953. május 16.)

Megjelent Acta Math. IV. 1—2. 137—142. o.

Matematikai fizika differenciálegyenleteinek csoportja

Freud Géza és Szilvay Gézáné: Hővezetés kettőscsőben áramló rendszer esetén (1953. december 18.)

Az ábra szerinti kettős csőben összenyomhatatlan közeg áramlik. Feltételezhető, hogy a sebesség a belső cső minden helyén, ill. a külső cső minden helyén ugyanakkora; v_b ill. v_k . Úgy a külső, mint a belső fal hővezető. A probléma differenciálegyenlete, ha T_b ill. T_k a hőmérséklet a belső ill. a külső csőben:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 T_b}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_b}{\partial r} + \frac{\partial T_b}{\partial z^2} - \frac{V_b}{a^2} \frac{\partial T_b}{\partial z} = 0$$

ill.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 T_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_k}{\partial r} + \frac{\partial T_k}{\partial z^2} + \frac{V_k}{a^2} \frac{\partial T_k}{\partial z} = 0.$$

Tekintettel a belső csőfalban történő hővezetésre, ha $r_b = a$ -val jelöljük a belső cső sugarát:

$$(3) \quad \left(\frac{\partial T_b}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial T_k}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=a}.$$

$$(4) \quad \left(T_k - T_b - k \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=a} = 0.$$

Fenti parciális differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

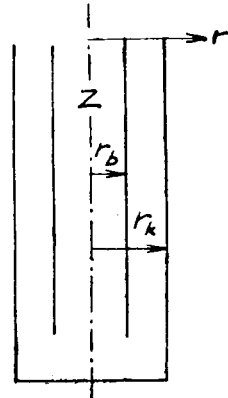
$$(5) \quad \begin{aligned} T_b &= A J_0(v_1 r) e^{\lambda z} \\ T_k &= [J_0(v_2 r) + B N_0(v_2 r)] e^{\lambda z} \end{aligned}$$

alakú, ahol v_1 és $v_2 \neq v_1$ -et úgy kell választanunk, hogy a

$$\lambda^2 - \frac{v_b}{a^2} \lambda - v_1^2 = 0$$

és

$$\lambda^2 + \frac{v_k}{a^2} \lambda - v_2^2 = 0$$



1. ábra

egyenleteknek közös gyöke legyen. Az (5) egyenletekben szereplő A és B állandók (3) és (4)-ből, mint egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai adódnak. Jelöljük az így kapott megoldást, amely még függvénye a λ paraméternek $T(r, z; \lambda)$ -val. Akkor az általános megoldás

$$(6) \quad \int f(\lambda) T(r, z; \lambda) d\lambda.$$

Fenti megoldás $f(\lambda)$ alkalmas választásával a külső csőfal mentén tetszőlegesen előírt peremfeltételhez illeszthető.

**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT
TARTALMAZÓ, 1953-BAN MÁSUTT MEGJELENT ÉS SAJTÓ ALATT LÉVŐ
DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

Mechanika

1. *Egerváry J.*: Az Alkalmazott Matematikai Intézet eredményei a matematikai fizika és annak ipari alkalmazásai terén. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei III. 1953. 353—356.)

2. *Egerváry J.*: Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei III. 1953. 417—458.)

Valószínűségszámítás, matematikai statisztika

1. *Arnóth Edit*: Valószínűségszámítási alapfogalmak és a szórásелемzés alkalmazása mezőgazdasági kísérleteknél. (Szarvasi Öntözési- és Talajjavítási Kutató Intézet Közleményei 1953. sajtó alatt.)

2. *Rényi A.*: Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei III. 1953. 364—379.)

3. *Rényi A.*: Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben. Bericht über die Mathematiker — Tagung in Berlin vom 14. bis 18. Januar 1953. Berlin 1953, 203—212.

4. *Rényi A.*: A rendezett minták elméletéről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei III. kötet 467—503.)

5. *Takács L.*: »Várákózási idő»-problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével. (MTA. III. oszt. Közleményei. Sajtó alatt.)

6. *Takács L.*: Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei. Sajtó alatt.)

7. *Takács L.*: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatra vonatkozó tételről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei. Sajtó alatt.)

8. *Vincze I.*: Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszereiről. (Természet és Technika 1953. IV. 200—204.)

9. *Vincze I.*: Eloszlások meghatározása középértékek segítségével. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei. Sajtó alatt.)

*Differenciál- és integrálegyenletek, függvényegyenletek,
operátorszámítás*

1. *Aczél J.*: Lösung des Funktionalgleichungsystems der erzeugenden Funktionen von Kettenreaktionen... (Acta Math. Hung. Sajtó alatt.)

2. *Aczél J.*: A középértékek elméletéről. (Kossuth Lajos Tudományegyetem évkönyve. Sajtó alatt.)

3. *Aczél J.*: Eine Bemerkung zur Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynomen. (Acta Math. Hung. Sajtó alatt.)

4. *Aczél J.*: Grundriss einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen. (Publ. Math. 3. 1953 119—133.)

5. *Aczél J.*: Általános módszerek a függvényegyenletek elméletében és a függvényegyenletek néhány újabb alkalmazása. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei. Sajtó alatt.)

6. *Fenyő I.*: Banach-terekben értelmezett, nem-lineáris integrálegyenletekről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 71—83.)
7. *Fenyő I.*: Magasabbrendű gömbfelületi függvényekre vonatkozó integrálegyenletekről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 513—520.)
8. *Fenyő I.*: Eine Bemerkung über das Dirichletsche Problem bezüglich der Kugel. (Publ. Math. Sajtó alatt.)
9. *Fenyő I.*: A Bessel-függvényekkel kapcsolatos végtelen sorokról. (Matematikai Lapok. Sajtó alatt.)
10. *Fenyő I.*: A többszörös Fourier-transzformáció elméletéhez. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **IV.** 1954. Sajtó alatt.)

Matematikai fizika

1. *Fenyő I.*: A sugárzás-elmélet integrálegyenletének sajátértékéről. (Matematikai Lapok. Sajtó alatt.)
2. *Freud G.*: Hozzászólás Lengyel Sándor előadásához. (Dielektrikumok elmélete.) (MTA. Vegyipari Osztály Közleményei.)

Konstruktív függvénytan

1. *Alexits Gy.*: Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens. (Acta Math. Hung. **IV.** Sajtó alatt.)
2. *Alexits Gy.*: Über den Einfluss der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe. (Acta Math. Hung. **IV.** Sajtó alatt.)
3. *Alexits Gy.*: Sur la sommabilité des series orthogonales. (Acta Math. Hung. **IV.** Sajtó alatt.)
4. *Freud G.*: Restglied eines Tauberschen Satzes II. (Acta Math. **III.** 292—307.)
5. *Freud G.*: Über einen Satz von P. Erdős und P. Turán. (Acta Math. Sajtó alatt.)
6. *Freud G.*: Egy Tauber típusú tételről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 45—53.)
7. *Freud G.*: I. P. Natanson »Konstruktív függvénytan« című könyvéről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 109—112.)
8. *Freud G.*: Ortogonális polinomsorok erős (C, 1) szummálhatóságáról. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 507—512.)
9. *Freud G.*: Fejér Lipót egy sorelméleti tételéről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 505—506.)
10. *Freud G.*: A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 563—568.)
11. *Freud G.*: Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. (Acta Math. Hung. **IV.** Sajtó alatt.)
12. *Freud G.*: Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation. (Acta Math. Hung. **IV.** 137—142.)

Egyéb közlemények

1. *Aczél J.*: Bemerkungen zur Realisierung der Hausdorffschen Axiomen in abstrakten Mengen. (Publ. Math. **3.** 1953. 183—187. o.)
2. *Szűsz P.*: Über die Verteilung der Punkte in der Ebene. (Acta Math. Hung. Sajtó alatt.)
3. *Szűsz P.*: Verschärfung eines Hardy—Littlewoods'schen Satzes. (Acta Math. Hung. **IV.** 115—118.)

Elvi kérdések

1. *Hajós Gy.*: Az alkalmazott matematika helyzete hazánkban. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953.)
2. *Rényi A.*: A Bolyai—Lobacsevszkij-geometria világnézeti jelentőségéről. (MTA. III. oszt. Osztályközleményei **III.** 1953. 254—275.)
3. *Rényi A.*: Прикрепление связи математики с практикой (Природа, 1953. nov.)

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Rényi Alfréd</i> : Előszó	5
<i>Egerváry Jenő</i> : Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldása	11
<i>Lovass—Nagy Viktor</i> : Két végén szabadon felfüggesztett gerenda oldalirányú kihajlással szembeni stabilitásának vizsgálata	33
<i>Rózsa Pál</i> : Elasztikusan kapcsolt korpuszkuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálata matrix számítás alkalmazásával	51
<i>Rényi Alfréd</i> : Kémiai reakciók tárgyalása a sztochasztikus folyamatok elmélete segítségével	83
<i>Prékopa András</i> : Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának valószínűség-számítási tárgyalása	103
<i>Gyires Béla</i> : Egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásáról	125
<i>Takács Lajos</i> : Egy új módszer rekurrens sztochasztikus folyamatok tárgyalásánál	135
<i>Takács Lajos</i> : Részecskeszámlálóknál fellépő koincidencia-problémákról	153
<i>Medgyessy Pál</i> : Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire	165
<i>Medgyessy Pál</i> : Új készülék Fourier-szintézis és analízis, valamint hasonló sorfejtési feladatok elvégzésére	179
<i>Palásti I.—Rényi A.—Szentmártony T.—Takács L.</i> : A raktárkészlet pótlásáról I.	187
<i>L. Ziermann Margit</i> : A raktárkészlet pótlásáról II.	203
<i>Székely Gábor</i> : Egy minőségellenőrzéssel kapcsolatos sztochasztikus folyamatról ..	217
<i>Arató Mátyas</i> : Beszámoló az uzsai kőbányában végzett kötőrési és energiamérési kísérletekről	223
<i>Sors László</i> : Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének meghatározása ...	229
<i>Medgyessy Pál</i> : Kiegészítés a »Galton-féle deszkával kapcsolatos néhány problémáról» c. dolgozathoz	233
<i>Juvancz I.—Lipták T.</i> : Kiegészítés »A matematikai statisztika orvosi-biológiai alkalmazásának néhány problémájáról» c. dolgozathoz	239
<i>Rényi Alfréd</i> : Újabb kritériumok két minta összehasonlítására	243
<i>Vincze István</i> : Mérési eredmények pontatlanságának hatása hisztogram felvételénél	267
<i>Sarkadi Károly</i> : A selejtarány Bayes-féle valószínűségi határaitra vonatkozó dualitási elvről	275
<i>Sarkadi Károly</i> : A selejtarány a priori bétaeloszlásáról	287
<i>Sarkadi Károly</i> : Osztályközök megválasztása minták elemeinek osztálybasorolásánál	299
<i>Fontányi Á.—Sarkadi K.—Vas Gy. né</i> : A rendezett minták elméletének alkalmazása a statisztikai minőségellenőrzésben	307
<i>Fenyő István</i> : Megjegyzés a Hankel-transzformáció elméletéhez	335
<i>Fenyő István</i> : A hengerfüggvények addíciós tételének következményéről	345
<i>Glück Vera</i> : Diffúzióállandó meghatározása többretegű diffúziós rendszer anyageloszlásának ismeretében	361
<i>Pál S.—Tóth K.</i> : Példák szimmetrikus függvénykapcsolatoknak pontmezős nomogramokkal való ábrázolására	367
<i>Aczél J.—Béda Gy.—Gáti J.—Török S.</i> : Nomogramok az általános háromszög megoldásához	383
<i>Frei Tamás</i> : Az integrálgörbék momentumainak felhasználása differenciálegyenletek numerikus megoldásánál	395

<i>Fazekas Ferenc</i> : Egy magyar automatikus másolóberendezés másolási pontosságának matematikai vizsgálata	415
<i>Török Vilmos</i> : »Hidrofix« másolóeszterga szabályozástechnikai vizsgálata	447
<i>Lovass—Nagy Viktor</i> : Párhuzamos vezetékekből álló rendszer elektromos tulajdonságainak leírására szolgáló parciális -differenciál -egyenletrendszer megoldása a matrix-számítás segítségével	457
<i>Freud Géza</i> : Körkeresztmetszetű vezetőkben fellépő áramkiszorításáról	467
<i>Freud G.—Szilvay G.-né</i> : Párhuzamos elektromos vezetők mágneses terének számításáról	479
<i>Lengyel S.—Kempelen M.</i> : Ionok hidratációs munkájának elméleti meghatározása	489
<i>Lovass—Nagy V.—Pál S.—Pásztor J.</i> : Indukciósan hevített körhenger-alakú fémtestek melegedésével kapcsolatos egyes kérdések vizsgálata	499
Az Alkalmazott Matematikai Intézet osztályai és csoportjai szemináriumában, illetve értekezletein elhangzott előadások kivonatai.	513
Az Intézet munkatársainak az Intézet munkájának eredményeit tartalmazó 1953-ban másutt megjelent és sajtó alatt lévő dolgozatainak jegyzéke.	521

СОДЕРЖАНИЕ

А. Реньи: Предисловие	5
Е. Эгервари: О новом методе преобразования билинейных форм и решения систем линейных уравнений, основывающемся на диадическом представлении матриц	11
В. Ловаш-Надь: Исследование устойчивости относительно бокового изгиба балки, подвешенной на двух концах над центром тяжести ее поперечного сечения	33
П. Рожа: Изучение колебаний эластически связанных систем при помощи применения матричного исчисления.	51
А. Реньи: Исследование химических реакций с помощью теории стохастических процессов	83
А. Прекопа: Теоретико-вероятностная трактовка процесса распада длинных цепных молекул	103
Б. Дьиреш: О решении одного дифференциального уравнения второго порядка	125
Л. Такач: Новый метод в теории рекуррентных стохастических процессов ...	135
Л. Такач: О проблемах совпадений, происходящих в счетчиках	153
П. Меддьеш: Определение компонентов смеси функций распределения вероятностей	165
П. Меддьеш: Новый прибор для синтеза и анализа Фурье и подобных задач	179
И. Палашти А. Реньи П. Сентмартони Л. Такач: О пополнении запаса товаров на складе I.	187
М. Зирманн: О пополнение запаса товаров на складе. II. Дополнительные заказы	203
Г. Секель: Об одном стохастическом процессе, связанном с контролем качества	217
М. Арато: Опыты по ломке камня и определении энергопотребления, проведенные в Ужайском каменном карьере	223
Л. Шорш: Определение энергопотребления машиностроительных заводов ...	229
П. Меддьеш: «О некоторых проблемах связанных с прибором Гальтона» ..	233
И. Юванц П. Липтак: Примечание к статье «О некоторых проблемах медицинско-биологического применения математической статистики»	239
А. Реньи: Новые критерии сравнения двух выборок	243
И. Винце: Влияние неточности результатов измерений при построении гистограмм	267
К. Шаркади: О принципе двойственности по отношению к вероятным границам пропорции брака, определяемым по Байесу	275
К. Шаркади: Априорное распределение типа β количества брака	287
К. Шаркади: Выбор интервалов при классификации элементов выборки ...	299
А. Фонтаньи-К. Шаркади-Е. Ваш: Применение теории вариационных рядов при статистическом контроле качества	307
И. Фенье: Замечание к теории преобразований Ганкеля	335
И. Фенье: О некоторых следствиях теоремы сложения цилиндрических функций	345
В. Глюк: «Определение постоянной диффузии при известном распределении вещества многослойной диффузионной системы	361
Ш Пал К. Тот: Примеры изображения симметрических функциональных зависимостей посредством номограмм с бинарным полем	367
Я. Ацель: Номограммы для решения общего треугольника	383
Т. Фрей: Использование моментов интегральных кривых при численном решении дифференциальных уравнений	395

Ф. Фазекаш: Математическое исследование точности копирования одного венгерского копировального станка	415
В. Терек: Исследование копировального токарного станка «Гидрофикс» по теории следящих систем	447
В. Ловаш-Надь: Решение с помощью теории матриц системы уравнений с частными производными, служащей для описания свойств электрической сети, состоящей из параллельных проводов	457
Г. Фрейд: О вытеснении тока, возникающем в проводнике круглого сечения	467
Г. Фрейд и Г. Сильваи: О вычислении магнитного поля параллельных электропроводов	479
Ш. Лендель-М. Кемпелен: Теоретическое определение теплоты гидратации	489
В. Ловаш-Надь, Ш. Пал-Я. Пастор: О некоторых проблемах, связанных с нагреванием металлических тел цилиндрической формы, накаливаемых с помощью индукции	499
Заседания отделений института	513
Список работ, опубликованных в 1953 г. сотрудниками института в других журналах	521

INDEX

<i>A. Rényi</i> : Préface.....	5
<i>E. Egerváry</i> : Eine auf der dyadischen Darstellung der Matrizen beruhende Methode für die Transformation bilinearer Formen und für die Auflösung linearer Gleichungssysteme	11
<i>V. Lovass—Nagy</i> : Untersuchung der Stabilität eines Balkens, der an den zwei Enden über den Schwerpunkt des Querschnitts aufgehängt ist, gegenüber einer seitwertigen Ausbiegung	33
<i>P. Rózsa</i> : Untersuchungen über elastisch gekoppelte Korpuskularsysteme mittels des Matrizenkalküls	51
<i>A. Rényi</i> : Untersuchung chemischer Reaktionen mit Hilfe der Theorie der stochastischen Prozesse	83
<i>A. Prékopa</i> : Statistical treatment of the degradation process of long chain polymers	103
<i>B. Gyires</i> : Über die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.....	125
<i>L. Takács</i> : A new method for discussing recurrent stochastic processes.....	135
<i>L. Takács</i> : Coincidence problems arising in the theory of counters	153
<i>P. Medgyessy</i> : Détermination des composants d'un mélange des fonctions de distribution	165
<i>P. Medgyessy</i> : Un appareil nouvel pour la synthèse et analyse de Fourier ainsi que pour des problèmes analogues	179
<i>I. Palásti—A. Rényi—T. Szentmártony—L. Takács</i> : Über die Ergänzung des Lagervorrats I.	187
<i>M. Ziermann</i> : Über die Ergänzung des Lagervorrats II.	203
<i>G. Székely</i> : Über einen stochastischen Prozess der, mit der Qualitätskontrolle zusammenhängt	217
<i>M. Arató</i> : Bericht über die Energieberechnungsversuche im Steinbruch Uzsa	223
<i>L. Sors</i> : Bestimmung des elektrischen Energiebedarfs von Betrieben	229
<i>P. Medgyessy</i> : A supplement to the paper »Sur quelques problèmes en relation avec la planche de Galton« ..	233
<i>J. Juvancz—T. Lipták</i> : Note sur le travail »Sur quelques problèmes de l'application médico-biologique de la statistique mathématique	239
<i>A. Rényi</i> : Neuere Kriterien zum Vergleich zweier Stichproben	243
<i>St. Vincze</i> : Die Wirkung der Fehler von Messergebnissen bei der Aufnahme eines Histrogramms.....	267
<i>K. Sarkadi</i> : On the »duality law« concerning the Bayes' probability limit of the fraction defective	275
<i>K. Sarkadi</i> : On the a priori beta distribution of fraction defective.....	287
<i>K. Sarkadi</i> : Choice of intervals for grouping of data.	299
<i>A. Fontányi—K. Sarkadi—É. Vass</i> : Anwendung der Theorie der geordneten Stichproben in der statistischen Qualitätskontrolle	300
<i>St. Fenyő</i> : Eine Bemerkung zur Theorie der Hankel-Transformation	335
<i>St. Fenyő</i> : Einige Folgerungen aus dem Additionssatz für Zylinderfunktionen....	345
<i>V. Glück</i> : Bestimmung der Diffusionskonstante bei der Kenntnis der Materieverteilung des mehrschichtigen Systems	361
<i>S. Pál—K. Tóth</i> : Beispiele für die nomographische Darstellung symmetrischer funktioneller Zusammenhänge mittels binären Leitertafeln	367
<i>J. Aczél—Gy. Béla—J. Gáti—S. Török</i> : Nomogrammes pour la résolution des triangles généraux	383

<i>T. Frei</i> : Benützung der Momente der Integral-Kurven zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen	395
<i>F. Fazekas</i> : Mathematische Untersuchung der Genauigkeit einer ungarischen Kopiereinrichtung	415
<i>I. Török</i> : An investigation of the copying lathe »Hydrofix« by the theory of servomechanisms	447
<i>V. Lovass—Nagy</i> : Lösung der partiellen Differentialgleichung, die zur Beschreibung der elektrischen Eigenschaften eines aus parallelen Leitern bestehenden Systems dient, mittels des Matrizenkalküls	457
<i>G. Freud</i> : Über die Stromverdrängung in Leitern mit kreisförmigen Querschnitt ..	467
<i>G. Freud—Frau G. Szilvay</i> : Über das magnetische Feld einer Parallelleitung II.	479
<i>S. Lengyel—M. Kempelen</i> : Theoretische Bestimmung von Hydratationswärmen	489
<i>V. Lovass—Nagy—S. Pál—J. Pásztor</i> : Über einige die Erwärmung durch Induktion erhitzter kreiszylinderförmiger Eisen- und Metallkörper betreffende Fragen	499
Auszüge der in den Seminaren der Abteilungen des Instituts gehaltenen Vorträge.	513
Verzeichnis der im Jahre 1953. in anderen Zeitschriften veröffentlichten Arbeiten der Mitarbeiter des Instituts	521

